О РАСШИРЕНИЯХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 4

И.Н. Белоусов, А.А. Махнев[1],

[1]Институт математики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется регулярным степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем реберно регулярным с параметрами (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется сильно регулярным графом, если он имеет диаметр 2. Графом в половинном случае называется сильно регулярный граф с параметрами $(4\mu + 1, 2\mu, \mu - 1, \mu)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t, для данного натурального числа t. В настоящее время задача Кулена полностью решена для $t = 3$.

В [1] начато решение задачи Кулена для $t = 4$. А именно получена редекция к опрестностям вершин, являющимся исключительными графами. Нетрудно доказать, что сильно регулярный граф без треугольников с неглавным собственным значением 4 имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$, $(352, 36, 0, 4)$, $(392, 46, 0, 6)$, $(552, 76, 0, 12)$, $(667, 96, 0, 16)$ или $(784, 116, 0, 20)$.

В данной статье изучены графы, в которых окрестности вершин имеют вышеуказанные параметры, причем $v \geq 392$. Ранее, в [2] было доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами $(352, 36, 0, 4)$, является сильно регулярным графом с параметрами $(9593, 352, 36, 12)$. Случай окрестностей с параметрами $(352, 26, 0, 2)$ является очень трудным (граница для диаметра имеет вид $d \leq 26$).

Теорема. *Граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами* $(392, 46, 0, 6)$*,* $(552, 76, 0, 12)$*,* $(667, 96, 0, 16)$ *или* $(784, 116, 0, 20)$ *не является дистанционно регулярным.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 14-11-00061).

Литература

1. Махнев А. А. *Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения* // Известия Гомельского госуниверситета. 2014. Т. 84. №3. С. 84–85.

2. Махнев А. А., Нирова М. С. *О графах, в которых окрестности вершин – сильно регулярные графы с параметрами (352,36,0,4)* // Алгебра и приложения. Труды Межд. алгебр. конф. Нальчик. 2014 С. 84–85.