ПРОСТЫЕ НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ВЕРШИНЫ РЕЛАКСАЦИОННОГО МНОГОГРАННИКА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ И ОТСЕКАЮЩИЕ ФАСЕТЫ

Г.Г. Болоташвили

Институт кибернетики Грузинского технического университета,
ул. Сандро Еули 5, Тбилиси, Грузия
bolotashvili@yahoo.com

Построение многогранника NP-трудной задачи с помощью линейных неравенств а потом использование их при решение задачи есть наша основная задача. Данная работа посвящена этой проблеме. Мы для нецепочисленной вершины релаксационного многогранника задачи линейных порядков находим смежные целочисленные вершины и с их помощью однозначно определяем фасеты.

Пусть имеем множества $N_n = \{1, 2, ..., n\}$. Если любому линейному порядку $i_1 i_2 ... i_n$ из множества элементов N_n сопоставим точку в $(n^2 - n)$-мерном пространстве следующим образом:

$$x_{i_s i_q} = \begin{cases} 1, & s < q, \\ 0, & s > q, \end{cases}$$

то задача линейных порядков как задача целочисленного линейного программирования имеет вид:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow max$$

$$\dot{0} \leq x_{ij} \leq 1, x_{ij} + x_{ji} = 1, i \neq j, i, j = 1, ..., n; \tag{1}$$

$$\dot{0} \leq x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1, i \neq j, j \neq k, i \neq k, i, j, k = 1, ..., n; \tag{2}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \neq j, i, j = 1, ..., n.$$

Многогранник, соответствующий системе $(1), (2)$ есть начальный релаксационный многогранник, который обозначим через B_n. Многогранник B_n имеет как целочисленные вершины взаимно однозначно соответствующие допустимым решениям, так и нецелочисленные вершины. Линейную выпуклую оболочку целочисленных вершин многогранника B_n, назовем многогранником линейных порядков и обозначим через P_n. Учитывая, систему равенств $x_{ij} + x_{ji} = 1, i \neq j, i, j = 1, \ldots, n$ многогранники B_n и P_n рассматриваются в $n(n-1)/2$-мерном пространстве.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Точка x^0, имеющая следующие координаты $x^0 = (x^0_{i_s i_q} = x^0_{j_s j_q} = 1/2, s \neq q, s, q = 1, ..., m;$ $x^0_{i_s j_s} = x^0_{j_s i_s} = 1/2, s = 1, ..., m;$ $x^0_{i_s j_q} = 0, x^0_{j_q i_s} = 1, s \neq q, s, q = 1, ..., m)$, где $I_m = \{i_1, ..., i_m\}$, и $J_m = \{j_1, ..., j_m\}$ непересекающиеся подмножества из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $m \geq 3$, является нецелочисленной вершиной многогранника B_n.*

Определение 1. Нецелочисленную вершину из теоремы 1 назовем простой нецелочисленной вершиной начального релаксационного многогранника B_n.

Теорема 2. *Простая нецелочисленная вершина x^0 многогранника B_n имеет только такие смежные целочисленные вершины, которые соответствуют следующим линейным порядкам:*

$$J^p A_p I^p;$$

где $p = 1, 2, ..., m-1$, J^p *любой линейны порядок из множества* $J_m - \{j_{s_1}, j_{s_2}, ..., j_{s_p}\}$;
A_p *любой линейны порядок из множества пар* $\{i_{s_1}j_{s_1}, i_{s_2}j_{s_2}, ..., i_{s_p}j_{s_p}\}$
I^p *любой линейны порядок из множества* $I_m - \{i_{s_1}, i_{s_2}, ..., i_{s_p}\}$.

Далее рассмотрим фасету многогранника линейных порядков из [1].

$$t\sum_{s=1}^{m} x_{i_s j_s} - \sum_{s=1, s\neq q}^{m} \sum_{q=1}^{m} x_{i_s j_q} \le t(t-1)/2, \tag{3}$$

где $\{i_1, ..., i_m\}$, $\{j_1, ..., j_m\}$ непересекающиеся подмножества из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $m \ge 3$, $1 \le t \le m-2$, сложение и вычитание индексов производится по $mod(m)$.

При $t = 1$ из неравенства (3) получаем первый класс фасет многогранника P_n, которые независимо друг от друга были получены в работах [2–4]. Их называют простыми фасетами.

Теорема 3. *Целочисленные вершины релаксационного многогранника* B_n *соответствующие линейным порядкам*

$$J^p A_p I^p,$$

где $p = t, t+1$, J^p *любой линейны порядок из множества* $J_m - \{j_{s_1}, j_{s_2}, ..., j_{s_p}\}$;
A_p *любой линейны порядок из множества пар* $\{i_{s_1}j_{s_1}, i_{s_2}j_{s_2}, ..., i_{s_p}j_{s_p}\}$
I^p *любой линейны порядок из множества* $I_m - \{i_{s_1}, i_{s_2}, ..., i_{s_p}\}$;
и только эти целочисленные вершины удовлетворяют неравенству (3) как равенству.

Определение 2. Если x^0 нецелочисленная вершина многогранника B_n имеющая смежные целочисленные вершины, которые однозначно определяют фасеты, тогда эти фасеты будем называть максимально отсекающими для нецелочисленной вершины x^0.

Теорема 4. *Пусть* x^0 *простая нецелочисленная вершина многогранника* B_n, *тогда для* x^0 *фасеты (3) являются максимально отсекающими.*

Литература

1. Leung, J., Lee, J. *More facets from fances for linear ordering and acyclic sub graph polytopes* // Discr. Appl. Math. 1994. Vol. 50. P. 185-200.

2. Болоташвили Г. Г. *О гранях перестановочного многогранника.* // Сообщения АН Грузии, 1986. Т. 121, N 2. С. 281-284.

3. Cohen, M., Falmagne, J. C. *Random utility representation of binary choice probabilities: a new class of necessary conditions.* // J. Math. Psych. 1990. Vol. 34. P. 88-94.

4. Grotschel, M., Junger, M., Reinelt, G. *Facets of the linear ordering polytope* // Math. Program. 1985. Vol. 33. P. 43-60.