

О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ПЕРМАНЕНТОВ

Д.Б. Ефимов

Отдел математики Коми НЦ РАН, Чернова За, 167000 Сыктывкар, Россия dmefim@mail.ru

Вычисление перманентов имеет большую алгоритмическую сложность. Поэтому актуальной является задача их оценки. В данной работе мы рассматриваем верхние оценки перманентов произвольных вещественных матриц третьего порядка, опираясь на подход, предложенный Юркатом и Райзером в [1].

Определение 1. Алгеброй Пименова с n образующими назовем ассоциативную алгебру $P_n(\iota)$, порожденную над полем вещественных чисел единицей и элементами ι_k , $k = 1, \dots, n$, связанными определяющими соотношениями: $\iota_k^2 = 0$, $\iota_k \iota_l = \iota_l \iota_k$, $k, l = 1, \dots, n$.

Из определения следует, что алгебра $P_n(\iota)$ является конечномерной размерности 2^n , коммутативной, обладает единицей, и каждый ее элемент однозначно представляется в следующем стандартном виде:

$$a = a_0 + \sum_{t=1}^n \sum_{k_1 < \dots < k_t} a_{k_1 \dots k_t} \iota_{k_1} \dots \iota_{k_t}, \quad a_0, a_{k_1 \dots k_t} \in R.$$

Зафиксируем в алгебре $P_1(\iota)$ основной базис $\{1, \iota\}$. Тогда регулярному модулю $P_1(\iota)$ соответствует следующее двумерное матричное регулярное представление:

$$T : a_0 + \iota a_1 \rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если в алгебре $P_n(\iota)$ зафиксировать основной упорядоченный базис $\{1, \iota_1, \iota_2, \dots, \iota_1 \iota_2 \dots \iota_n\}$, то регулярному модулю $P_n(\iota)$ соответствует матричное представление, сопоставляющее каждому элементу $a \in P_n(\iota)$ $2^n \times 2^n$ -матрицу $T(a)$, являющуюся нижнетреугольной, симметричной относительно второстепенной диагонали и с элементами a_0 на главной диагонали. Коэффициент $a_{k_1 k_2 \dots k_t}$ при мономе $\iota_{k_1} \iota_{k_2} \dots \iota_{k_t}$ входит в данное представление в качестве элемента ровно 2^{n-t} раз. В частности, коэффициент $a_{12 \dots n}$ встречается ровно один раз и находится в нижнем левом углу матрицы $T(a)$.

Нетрудно видеть, что $\text{Ker } T = \{0\}$, поэтому данное матричное представление является точным, и алгебру $P_n(\iota)$ можно рассматривать как алгебру $2^n \times 2^n$ нижнетреугольных вещественных матриц специального вида.

Утверждение 2. Рассмотрим 8×8 матрицу $T(a)$, где $a = \sum_{k=1}^3 a_k \iota_k$ — однородный элемент первой степени в алгебре $P_3(\iota)$. Обозначим $|a| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 a_k^2}$. Тогда справедливы следующие утверждения: 1) Если хотя бы один коэффициент a_k равен нулю, то максимальное сингулярное число матрицы $T(a)$ равно $|a|$; 2) Если все коэффициенты a_k не равны нулю, то максимальное сингулярное число матрицы $T(a)$ находится в промежутке $(|a|, 2|a|/\sqrt{3})$.

Хорошо известна связь между алгеброй Грассмана и функцией определителя (см., например, [2]). Аналогичная связь существует между алгеброй Пименова и функцией перманента ([3], стр. 110). Опишем ее более подробно. В алгебре $P_n(\iota)$ рассмотрим m ($m \leq n$) однородных элементов первой степени $a_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \iota_k$, $i = 1, \dots, m$. Через $A = (a_{ij})$ обозначим прямоугольную $m \times n$ матрицу, образованную коэффициентами элементов a_i . Обозначим через $A_{k_1 \dots k_m}$ матрицу, которую образуют столбцы с номерами $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ матрицы A . Тогда нетрудно видеть, что

$$a_1 a_2 \dots a_m = \sum_{k_1 < \dots < k_m} \text{per}(A_{k_1 \dots k_m}) \iota_{k_1} \dots \iota_{k_m},$$

где $\text{per}(A_{k_1 \dots k_m})$ означает перманент матрицы $A_{k_1 \dots k_m}$. В частности, если $m = n$, то

$$a_1 a_2 \dots a_n = \text{per}(A) \iota_1 \iota_2 \dots \iota_n. \quad (1)$$

Далее рассмотрим схему, предложенную Юркатом и Райзером в [1]. Перейдем в формуле (1) от элементов алгебры Пименова к некоторому их матричному представлению. В отличие от [1] мы будем рассматривать матричное регулярное представление:

$$T(a_1)T(a_2) \dots T(a_n) = T(\text{per}(A) \iota_1 \iota_2 \dots \iota_n). \quad (2)$$

Из утверждения 1 следует, что матрица в правой части равенства (2) представляет собой $2^n \times 2^n$ матрицу, у которой в левом нижнем углу стоит элемент $\text{per}(A)$, а все остальные элементы равны 0:

$$T(a_1)T(a_2) \dots T(a_n) = \text{per}(A) E_{2^n, 1}.$$

Тогда применяя к данному равенству любую матричную норму $\|\cdot\|$, для которой $\|E_{2^n, 1}\| \geq 1$, получаем неравенство

$$|\text{per}(A)| \leq \|T(a_1)\| \|T(a_2)\| \dots \|T(a_n)\|, \quad (3)$$

позволяющее оценить перманент матрицы сверху.

Применим к неравенству (3) спектральную норму $\|\cdot\|_s$. Для произвольной вещественной матрицы A она равна ее максимальному сингулярному числу, т.е. корню из максимального собственного числа матрицы $A^T A$. Как следует из утверждения 2, в случае $n = 3$ $\|T(a_i)\|_s \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|a_i|$. Отсюда получаем следующую оценку для перманента произвольной вещественной матрицы 3-го порядка:

$$|\text{per}(A)| \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}|a_1||a_2||a_3|. \quad (4)$$

Если одна из компонент элемента a_i равна 0, то как следует из утверждения 2, $\|T(a_i)\|_s = |a_i|$. Отсюда, с учетом того, что перманент матрицы не меняется при перестановке строк и столбцов получаем, что для перманента произвольной вещественной 3×3 матрицы, среди элементов которой есть хотя бы один нулевой, выполняется следующее неравенство

$$|\text{per}(A)| \leq \frac{4}{3}|a_1||a_2||a_3|. \quad (5)$$

Во многих случаях оценки (4), (5) дают лучший результат, чем оценки, приведенные в [3], стр. 116-117, хотя и не сравнимы с ними. Учитывая специальный вид матриц $T(a)$, $a \in P_n(\iota)$, можно попытаться доказать утверждение, аналогичное утверждению 2, и в случае произвольного n , и, следовательно, получить оценки, аналогичные формулам (4), (5), для вещественных квадратных матриц произвольного порядка.

Литература

1. Jurkat W. B., Ryser H. J. *Matrix factorizations of determinants and permanents* // Journal of Algebra. 1966. V. 3. P. 1–27.
2. Browne J. *Grassmann Algebra*. Melbourne, Australia: Quantica Publishing, 2009.
3. Минк Х. *Перманенты*. М.: Мир, 1982.