ТЕОРЕМА ТИПА ХИНЧИНА ДЛЯ СЛУЧАЯ РАСХОДИМОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.В. Луневич[1], А.С. Кудин[1], Н.В. Шамукова[2]

[1]Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
kifeislife@gmail.com, kunixd@gmail.com
[2]Командно-инженерный институт МЧС РБ, Машиностроительная 25, 220118 Минск, Беларусь
shamukova_n@mail.ru

В 1924 году А.Я. Хинчин [1] доказал замечательную теорему, ставшую основой для многих задач метрической теории чисел. Пусть $\Psi(H)$ – положительная монотонно убывающая функция, определенная на $\mathbb{R}_+$ и $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал. Множество точек $x \in I$, для которых существует бесконечно много решений $p, q \in \mathbb{Z}$ неравенства $|qx - p| < \Psi(q)$, обозначим как $\mathcal{L}_1(\Psi)$. Теорема Хинчина гласит, что $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi)) = 0$, если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$, и $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi)) = \mu(I)$ в противном случае.

По аналогии обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество точек $x \in I$, для которых существует бесконечно много решений неравенства $|P(x)| < H(P)^{-n+1}\Psi(H(P))$ в целочисленных полиномах P степени не более n. При $\Psi(H) = H^{-\lambda}$, $(\lambda \le 1)$ несложно доказать, используя принцип ящиков Дирихле, что $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = \mu(I)$. В 1932 году Малер [2] выдвинул гипотезу, что $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = 0$ при $\Psi(H) = H^{-\lambda}$, $(\lambda > 1)$. В 1964 году гипотеза Малера была доказана Спринджуком [3]. В 1966 году Бейкер доказал, что если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ неравенство $|P(x)| < \Psi^n(H(P))$ имеет не более чем конечное число решений в целочисленных полиномах P степени не более n, а также предположил, что для $\mathcal{L}_n(\Psi)$ справедлива теорема типа Хинчина, а именно, $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = 0$ если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$, и $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = \mu(I)$ в противном случае. Эта гипотеза в случае сходимости была доказана Берником, а в случае расходимости – Бересневичем. Аналогичные результаты были получены в полях комплексных и p-адических чисел Берником, Васильевым и Ковалевской.

В данной работе мы рассматриваем теорему типа Хинчина в случае расходимости в пространстве $\mathbb{R}^3$. Отметим, что Берником, Будариной и Дикинсон получен аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Пусть $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} v_i > 0,\ \lambda_i > 0,\ i = 1, 2, 3, \\ v_1 + v_2 + v_3 = n - 3, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Определим через $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\lambda}}$ множество точек $(x_1, x_2, x_3) \in I = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)^3$, для которых существует бесконечно много неприводимых полиномов P степени ровно n, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < H(P)^{-v_1}\Psi^{\lambda_1}\left(H(P)\right), \\ |P(x_2)| < H(P)^{-v_2}\Psi^{\lambda_2}\left(H(P)\right), \\ |P(x_3)| < H(P)^{-v_3}\Psi^{\lambda_3}\left(H(P)\right). \end{cases}$$

В данной работе доказана следующая

Теорема. *Если* $n \ge 3$ *и* $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) = \infty$, *то* $\mu(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\lambda}}) = \mu(I)$.

В ходе доказательства теоремы мы доказываем регулярность системы точек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n.

Литература

1. Khintchine A. *Einige Satze uber Kettenbruche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen* // Math. Ann. 1924. Vol. 92. Issue 1–2. P. 115–125.

2. Mahler K. *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Teil I* // J. Reine Angew. Math. 1932. Vol. 166. P. 118–150.

3. Спринджук В. Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел.* Минск: Наука и Техника, 1967.