ЗАДАЧА О ВЗВЕШЕННОЙ НЕЗАВИСИМОЙ $\{K_1, K_2\}$-УПАКОВКЕ ГРАФА

В.В. Лепин

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
lepin@im.bas-net.by

Рассматривается задача о взвешенной независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковке графа, имеющего веса на вершинах и ребрах. Частными случаями этой задачи являются задачи об индуцированном паросочетании и о диссоциирующем множестве в графе. Задача о взвешенной независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковке графа возникает при применении метода модулярной декомпозиции для решения указанных задач [1].

Пусть $\mathcal{H}$ — фиксированное множество связных графов. *$\mathcal{H}$-упаковкой* графа G называется множество $\mathcal{S} = \{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ попарно не пересекающихся по вершинам подграфов графа G, каждый из которых изоморфен графу из $\mathcal{H}$. Говорят, что *вершина графа G покрывается $\mathcal{H}$-упаковкой,* если она принадлежит подграфу этой упаковки. *Независимой $\mathcal{H}$-упаковкой* графа G называется $\mathcal{H}$-упаковка S, в которой никакие два подграфа упаковки не соединены ребром графа G. Если дан граф G с весовыми функциями $\omega_V: \ V(G) \to \mathbb{N}$ и $\omega_E: \ E(G) \to \mathbb{N}$ на вершинах и ребрах, и независимая $\{K_1, K_2\}$-упаковка S графа G, то *весом упаковки S* называется $\sum_{v \in U} \omega_V(v) + \sum_{e \in F} \omega_E(e)$, где $U = \bigcup_{G_i \in \mathcal{S},\ G_i \cong K_1} V(G_i)$ и $F = \bigcup_{G_i \in \mathcal{S}} E(G_i)$. Рассматривается задача о взвешенной независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковке графа, в которой требуется найти независимую $\{K_1, K_2\}$-упаковку наибольшего веса.

Если множество подграфов $\mathcal{S}$ является независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковкой графа G, то его можно однозначно задать парой множеств (U, F), где $U = \bigcup_{G_i \in \mathcal{S}_1} V(G_i)$ и $F = \bigcup_{G_i \in \mathcal{S}_2} E(G_i)$.

Будем предполагать, что для каждого ребра $vu \in E$ выполняется

$$\max\{w_V(v), w_V(u), w_E(vu)\} > 0.$$

Подмножество вершин $U \subseteq V(G)$ называется *диссоциирующим множеством* графа G, если максимальная степень вершин в подграфе $G[U]$ не превосходит 1. Задача о диссоциирующем множестве наибольшего размера является NP-трудной для двудольных графов, для C_4-свободных двудольных графов с максимальной вершинной степенью 3. Решается эта задача за полиномиальное время в нескольких классах графов.

Подмножество ребер графа G называется *паросочетанием,* если ни какие два ребра из этого множества не имеют общей концевой вершины. *Индуцированным паросочетанием* называется паросочетание $F \neq \emptyset$, в котором ни какие два ребра не соединены ребром графа G, т.е. максимальная степень вершин в подграфе $G[F]$ равна 1. Задача об индуцированном паросочетании наибольшего размера является NP-трудной для двудольных графов, планарных графов. Она эффективно решается в нескольких классах графов.

Устанавливая определенные веса вершинам и ребрам графа G, мы можем формулировать известные задачи в виде взвешенной задачи о независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковке графа G.

Пусть G — граф. Если $\omega_V(u) = 1$ для каждой вершины $u \in V(G)$, а $\omega_E(e) = 0$ для каждого ребра $e \in E(G)$ и (U^*, F^*) — наибольшего веса независимая $\{K_1, K_2\}$-упаковка графа G, то U^* является наибольшим независимым множеством в графе G.

Если $\omega_V(u) = 0$ для каждой вершины $u \in V(G)$, а $\omega_E(e) = 1$ для каждого ребра $e \in E(G)$ и (U^*, F^*) — наибольшего веса независимая $\{K_1, K_2\}$-упаковка графа G, то F^* является наибольшим индуцированным паросочетанием в графе G.

Если $\omega_V(u) = 1$ для каждой вершины $u \in V(G)$, а $\omega_E(e) = 2$ для каждого ребра $e \in E(G)$, и (U^*, F^*) — наибольшего веса независимая $\{K_1, K_2\}$-упаковка графа G, то $U^* \cup V(F^*)$ является наибольшим диссоциирующим множеством в графе G.

Теорема 1. *Существует алгоритмы, которые решают взвешенную задачу о независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковке для деревьев за время $O(n)$, для унициклических графов за время*

$O(n^2)$, для кографов и расщепляемых графов за время $O(n+m)$, для co-gem-свободных графов за время $O(m(m+n))$, где n — число вершин и m — число ребер графа.

Теорема 2. *Существует алгоритм, такой, что если на его вход дан взвешенный граф $G = (V, E)$ и его древесная декомпозиция ширины k, то он решает взвешенную задачу о независимой $\{K_1, K_2\}$-упаковке за время $O(2^k mk)$, где $m = |V(T)|$ — число узлов в дереве декомпозиции.*

Параметризованная сложность. В теории параметризованной сложности вход задачи состоит из двух частей (I, k), где I — это главная часть, а k (часто натуральное число) — параметр. Выделяют следующие три категории фиксированно-параметрической сложности NP-полных задач:

1. Задачи, которые для каждого фиксированного k могут быть решены за полиномиальное время, где степень полинома не зависит от k;

2. Задачи, которые для каждого фиксированного k могут быть решены за полиномиальное время, но степень полинома зависит от k;

3. Для некоторого фиксированного k задача является NP-трудной;

Задачи распознавания, которые принадлежат первой категории, называются фиксированно-параметрически разрешимыми (англ. fixed-parameter tractable) и образуют класс FPT. Другими словами, если задача (I, k) может быть решена алгоритмом с трудоемкостью $O(f(k) + n^c)$ или $O(f(k)n^c)$, где f — это некоторая вычислимая функция, а c — некоторая константа не зависящая от k, то она принадлежит классу FPT.

Известно, что для доказательства того, что некоторая параметризованная задача является фиксированно-параметрически разрешимой, достаточно найти алгоритм преобразования каждой ее индивидуальной задачи к ядру, т.е., для каждой индивидуальной задачи (I, k) задачи P, построить индивидуальную задачу (I', k') такую, что выполняются следующие условия:

1. $k' \le k$ и $|I'| \le g(k)$, где g — некоторая вычислимая функция;

2. преобразование задачи (I, k) к (I', k') осуществляется за полиномиальное время;

3. индивидуальная задача (I, k) имеет ответ "да"тогда и только тогда, когда задача (I', k') имеет ответ "да".

Рассмотрим следующую параметризованную задачу:

ВЗВЕШЕННАЯ ЗАДАЧА О НЕЗАВИСИМОЙ $\{K_1, K_2\}$-УПАКОВКЕ

Вход: граф $G = (V, E)$, весовые функции $\omega_V : V(G) \to \mathbb{N}$ и $\omega_E : E(G) \to \mathbb{N}$, положительное целое k.

Вопрос: Существует ли независимая $\{K_1, K_2\}$-упаковка, имеющая вес не менее k.

Параметр: k.

Частным вариантом ВЗВЕШЕННОЙ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОЙ $\{K_1, K_2\}$-УПАКОВКЕ графа является ЗАДАЧА ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ ПАРОСОЧЕТАНИИ:

Вход: граф $G = (V, E)$, положительное целое k.

Вопрос: Существует ли индуцированное паросочетание с не менее чем k ребрами.

Параметр: k.

Известно, что эта ЗАДАЧА ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ ПАРОСОЧЕТАНИИ является W[1]-трудной, поэтому ВЗВЕШЕННАЯ ЗАДАЧА О НЕЗАВИСИМОЙ $\{K_1, K_2\}$-УПАКОВКЕ также является W[1]-трудной. Следовательно, мало вероятно, что обе задачи принадлежат классу FPT. Поэтому представляет научный интерес выяснение параметризованной сложности этих задач в классах графов, в которых они остаются NP-полными.

Теорема 3. *ВЗВЕШЕННАЯ ЗАДАЧА О НЕЗАВИСИМОЙ $\{K_1, K_2\}$-УПАКОВКЕ в классе графов, степени вершин которых ограничены числом d имеет ядро, состоящее из $O(d^2 k)$ вершин (т.е. размер ядра является линейным, если d — константа). Для любого графа ядро может быть построено за время $O(n + m)$, где $n = |V|$ и $m = |E|$.*

В [3] доказано, что ЗАДАЧА ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ ПАРОСОЧЕТАНИИ является NP-полной в классе C_4-свободных двудольных графов. Поскольку класс C_4-свободных двудольных графов содержится в классе графов с обхватом не меньшим шести, то ВЗВЕШЕННАЯ ЗАДАЧА О НЕЗАВИСИМОЙ $\{K_1, K_2\}$-УПАКОВКЕ является NP-полной в последнем классе графов.

Теорема 4. *ВЗВЕШЕННАЯ ЗАДАЧА О НЕЗАВИСИМОЙ* $\{K_1, K_2\}$*-УПАКОВКЕ в классе графов с обхватом не меньшим шести имеет ядро с* $O(k^3)$ *вершинами. Для любого графа ядро может быть построено за время* $O(n+m)$*, где* $n = |V|$ *и* $m = |E|$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф14РА–004).

Литература

1. Лепин В.В. *Алгоритмы для нахождения независимой* $\{K_1, K_2\}$*-упаковки наибольшего веса в графе* // Труды Института математики. 2014. Т. 22, № 1. С. 78–97.

2. Лепин, В.В. *Решение задачи о взвешенной независимой* $\{K_1, K_2\}$*-упаковке на графах с ограниченной древесной шириной* // Труды Института математики. 2015. Т. 23, № 1. С. 98–114.

3. Lozin V.V. *On maximum induced matchings in bipartite graphs* // Information Processing Letters. 2002. V. 81, № 1. P. 7–11.