О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ПОИСКА ОСОБЫХ ТОЧЕК

А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
Большой Каретный 19, 1, 127051 Москва, Россия slvstv@iitp.ru

Многие важные задачи комбинаторной оптимизации остаются вычислительно трудными после длительного поиска эффективных методов решения [1]. Распознавание особой точки на комплексной гиперповерхности служит примером вычислительно трудной задачи, связанной с комбинаторной оптимизацией [2]. Проективная гиперповерхность, заданная формой f над полем характеристики нуль, особая, если совокупность частных производных первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ для $0 \leqslant k \leqslant n$ имеет нетривиальный нуль. Если форма f имеет рациональные коэффициенты, то это условие можно проверить за экспоненциальное (от n) время. Более того, совместность любой системы алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами может быть проверена за экспоненциальное время [3].

Назовем $(-1,1)$-точкой всякую точку в проективном пространстве, чьи однородные координаты равны -1 или 1 с точностью до общего ненулевого множителя. Это вершины многомерного куба. Проверка принадлежности некоторой $(-1,1)$-точки к данной гиперплоскости является NP-полной задачей [4]. Подходы к ее решению, основанные на теореме Гильберта Nullstellensatz, обсуждаются в [5]. Отметим, что соответствующая задача оптимизации может быть решена псевдополиномиальным алгоритмом, основанным на методе динамического программирования [4]. Подсчет числа $(-1,1)$-точек на гиперплоскости значительно сложнее.

Покажем, что задача о распознавании гиперплоскости, на которой не лежит никакая вершина многомерного куба, сводится к проверке гладкости комплексной проективной гиперповерхности третьей степени (кубики) или пятой степени (квинтики). Эти результаты усиливают ранее полученные результаты из [2].

Далее рассматриваются проективные гиперповерхности, которые заданы формами с целыми коэффициентами.

Теорема 1. *Существует детерминированный алгоритм, который получает на вход гиперплоскость H, заданную линейной формой $h = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k$ с ненулевыми целыми коэффициентами $\alpha_k \neq 0$ для каждого индекса k, где $n \geqslant 3$, и за полиномиальное время выдает такую кубику S, что H не содержит ни одной $(-1,1)$-точки тогда и только тогда, когда S гладкая. Более того, особые точки на S взаимно однозначно соответствуют $(-1,1)$-точкам, принадлежащим H.*

Доказательство. Сопоставим линейной форме h форму третьей степени $f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k^3$. Выходом алгоритма служит ограничение формы f на гиперплоскость H, которое определяет гиперплоское сечение S — гиперповерхность в H.

Форма f определяет гладкую гиперповерхность, поскольку все коэффициенты α_k отличны от нуля. Следовательно, особыми точками на S служат точки касания гиперплоскости H с кубикой, заданной формой f. Если в некоторой $(-1,1)$-точке $\mathbf{x}$ обе формы h и f обращаются в нуль, то проективные гиперповерхности, заданные этими формами, касаются друг друга в $\mathbf{x}$. Следовательно, S имеет особую точку $\mathbf{x}$.

Поскольку для каждого индекса k коэффициент α_k отличен от нуля, градиенты форм ∇h и ∇f коллинеарны в точках с координатами, удовлетворяющими равенствам $x_k^2 = x_j^2$ для всех индексов k и j. Такие точки — это $(-1,1)$-точки. В этом случае особые точки на S взаимно однозначно соответствуют $(-1,1)$-точкам, лежащим на H. Теорема доказана.

Ограничение $n \geqslant 3$ в условии теоремы 1 связано с тем, что в случае $n \leqslant 2$ пересечение S содержит не более трех точек.

В некоторых случаях кубика проективно эквивалентна таковой специального вида, позволяющего определять особые точки, если они существуют [6]. Возможно, изучение гиперповерхностей позволит уточнить результаты о сложности нахождения второго решения NP-полной задачи [7]. Действительно, если известна одна особая точка и проективный автоморфизм кубики, то образ особой точки тоже будет особой точкой. Так поиск второй особой точки сводится к поиску автоморфизма, не оставляющего первую точку неподвижной. Следующий результат говорит о нетривиальности группы автоморфизмов гладкой кубики.

Теорема 2. *Гладкая кубика обладает проективным автоморфизмом второго порядка.*

Результат, аналогичный теореме 1, справедлив и для квинтики, но без взаимно однозначного соответствия особых точек и вершин куба.

Теорема 3. *Существует детерминированный алгоритм, который получает на вход гиперплоскость H, заданную линейной формой $h = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x_k$ с ненулевыми целыми коэффициентами $\alpha_k \neq 0$ для каждого индекса k, где $n \geqslant 3$, и за полиномиальное время выдает такую квинтику S, что H не содержит ни одной $(-1,1)$-точки тогда и только тогда, когда S гладкая. Более того, если S особая, то множество особых точек конечное и включает все $(-1,1)$-точки, принадлежащие H.*

Доказательство. Сопоставим линейной форме h форму пятой степени $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x_k^5$. Выходом алгоритма служит ограничение формы f на гиперплоскость H, которое определяет гиперплоское сечение S — гиперповерхность в H.

Особыми точками на S служат точки касания гиперплоскости H с квинтикой, заданной формой f. Если в некоторой $(-1,1)$-точке $\mathbf{x}$ обе формы h и f обращаются в нуль, то проективные гиперповерхности, заданные этими формами, касаются друг друга в $\mathbf{x}$. Следовательно, S имеет особую точку $\mathbf{x}$.

Поскольку для каждого индекса k коэффициент α_k отличен от нуля, градиенты форм ∇h и ∇f коллинеарны в точках с координатами, удовлетворяющими равенствам $x_k^4 = x_j^4$ для всех индексов k и j. Такие точки — это $(-1, 1, -\sqrt{-1}, \sqrt{-1})$-точки. Поскольку коэффициенты α_k целые, если на H лежит некоторая $(-1, 1, -\sqrt{-1}, \sqrt{-1})$-точка, то на ней лежит и $(-1,1)$-точка, получаемая заменой координат $\pm\sqrt{-1}$ на ± 1. Теорема доказана.

Полученные результаты иллюстрируют вычислительную трудность проверки гладкости гиперповерхностей высших степеней, хотя для квадрики гладкость проверяется легко. С другой стороны, они могут быть полезны для анализа различных комбинаторных задач, поскольку взаимное расположение особых точек связано некоторыми ограничениями.

Литература

1. Емеличев В. А., Супруненко Д. А., Танаев В. С. *О работах белорусских математиков в области дискретной оптимизации* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1982. № 6. С. 25–45.

2. Латкин И. В., Селиверстов А. В. *Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел* // Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика. 2015. № 1 (77). С. 47–55.

3. Чистов А. Л. *Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время* // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1984. Т. 137. С. 124–188.

4. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* М.: Мир, 1991. Т. 1.

5. Margulies S., Onn S., Pasechnik D. V. *On the complexity of Hilbert refutations for partition* // Journal of Symbolic Computation. 2015. V. 66. P. 70–83.

6. Селиверстов А. В. *Кубические формы без мономов от двух переменных* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 1. С. 71–77.

7. Найденко В. Г. *О сложности нахождения второго решения NP-полной задачи* // Весцi Нацыянальнай Акадэмii Навук Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 114–118.