

УДК 531.539.538

*М. А. Журавков, д-р физ.-мат. наук, С. С. Щербаков, канд. физ.-мат. наук,  
Л. А. Сосновский, д-р техн. наук*

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОЛОГИИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТРИБОФАТИКЕ**

Розглянуто застосування механіко-математичних моделей механіки деформівного твердого тіла до опису трибофатичних систем, одночасно схильних до контактного і неконтактного навантаження. Приведені результати дослідження напружено-деформованого стану типової силової системи.

## **APPLICATION OF DEFORMABLE RIGID BODY MECHANICS METHODOLOGY IN TRIBO-FATIGUE**

Application of mechanical and mathematical models of deformable rigid body mechanics to the description of tribo-fatigue systems simultaneously subject to contact and non contact loading is considered. Results of stress-strain state research of the typical active system is given.

**Изучаемые объекты.** Одним из основных направлений исследований в трибофатике является построение механико-математических моделей напряженно-деформированного состояния силовых систем. Силовыми являются механические системы, в которых одновременно реализуется контактное взаимодействие с трением (качения, скольжения) между твердыми деформируемыми телами и неконтактное (объемное) деформирование по крайней мере одного из элементов силовой системы [8].

Из экспериментальных исследований [2, 7, 8] известно, что трактовки напряженно-деформированного состояния таких систем, как чисто контактного либо, например, чисто изгибного, содержат существенную погрешность. Исключения представляют предельные случаи, когда тела не содержат больших внутренних полостей (например, система шар / шар), либо длина стержня намного превосходит его толщину (например, изгиб балки).

Если обратиться к типичной силовой системе ролик / вал, то, с одной стороны, нагрузка  $F_N$  (рис. 1) вызывает как контактные деформации при взаимодействии ролика с валом, так и изгиб вала в целом, а с другой – нагрузки  $M$ ,  $M_k$ ,  $Q$  вызывают неконтактные растяжение-сжатие, изгиб, кручение [2, 7, 8].

Расчет напряженно-деформированного состояния в условиях сложного нагружения (локального в области контакта и объемного) может быть выполнен численно, например, методом конечных элементов [5]. Однако в этом случае для достаточно широкого диапазона нестационарных граничных задач (например, при исследовании динамического изменения

напряженно-деформируемого состояния, особенно в трехмерной постановке) требуется разработка специальных расчетных схем и алгоритмов, которые влекут за собой существенные затраты ресурсов (временных, машинных).

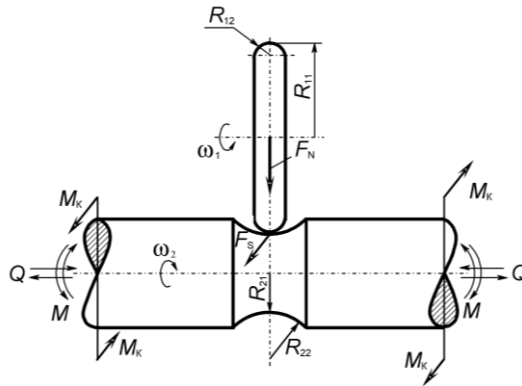


Рис. 1 – Расчетная схема силовой системы ролик / вал при действии контактной ( $F_N$ ) и неконтактных ( $M$ ,  $M_k$ ,  $Q$ ) нагрузок

**Постановка задачи.** При построении механико-математических моделей для исследования напряженно-деформированного состояния силовой системы [6] будем учитывать действие как распределенных нормальных  $p$  и касательных  $q$  усилий на контактной поверхности  $S$ , так и воздействие неконтактных ( $M$ ,  $N$ ,  $Q$ ) нагрузок, исходя из следующих основных положений:

1. По крайней мере одна из нагрузок, приложенных к силовой системе, вызывает в последней как локальные контактные деформации, так и объемное деформирование хотя бы одного из элементов системы.

2. Напряжения, обусловленные контактной и неконтактной нагрузками, в силовой системе действуют одновременно и в единой области.

3. Форма и площадь контакта в силовой системе дополнительно определяются изменением кривизны поверхности того из элементов системы, который подвергается объемному деформированию.

Таким образом, применительно к силовой системе будем решать две граничные задачи (рис. 2):

контактную для взаимодействия элементов системы

$$\sigma_{nn}^{(c)} \Big|_S = p(F_c, S); \quad \sigma_{n\tau}^{(c)} \Big|_S = fp(F_c, S); \quad \sigma_{ij}^{(c)} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1)$$

и задачу теории упругости для неконтактных нагрузок

$$Q|_{S_Q} = Q \mathbf{e}_b^-; \quad N|_{S_N} = N \mathbf{e}_b^-; \quad M_{S_N} = M \mathbf{e}_b^-; \quad u_i|_{S_u} = u_i^{(b)}, \quad (2)$$

где  $S \mathbf{e}_b^-$  – площадка контакта;  $F_c$  и  $F_b$  – контактная и неконтактная силы;  $f$  – коэффициент трения;  $\rho$  – расстояние от центра контакта;  $\sigma_{ij}^{(c)}$  – напряженное состояние при контакте;  $n \perp S$ ;  $\tau \parallel S$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  – внутренние поперечное и продольное усилие, а также внутренний момент;  $u$  – перемещения;  $S_Q$ ,  $S_N$ ,  $S_M$ ,  $S_u$  – множества точек твердого тела, к которым приложены различные граничные условия.

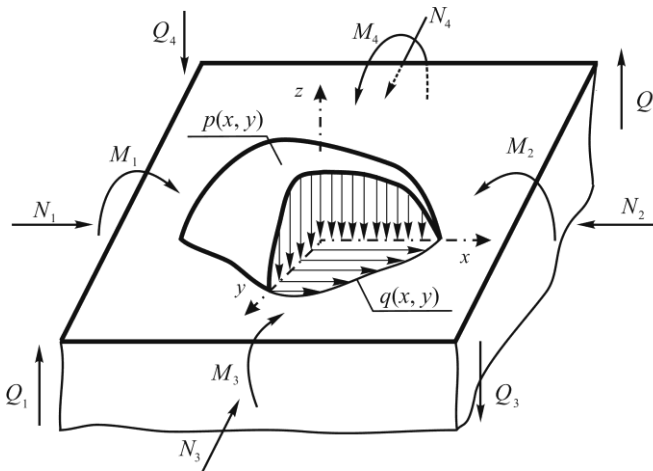


Рис. 2 – Общая схема нагружения силовой системы

**Напряженно-деформированное состояние.** Особенностью напряженного состояния ряда типичных силовых систем (например, ролик / вал) является то, что если напряженное состояние одного из взаимодействующих элементов (ролика) является чисто контактным [2, 4, 7 – 9]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)}; \quad i, j = x, y, z, \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}^{(n)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$  – напряжения, обусловленные соответственно нормальной  $p \mathbf{e}_b^-$  и касательной нагрузками  $q \mathbf{e}_b^-$ , то в другом элементе (вале или кольце), помимо контактных напряжений, также

действуют напряжения, обусловленные неконтактной нагрузкой (например, изгибающей силой  $F_b$ ) [2, 4, 7 – 9]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)}, \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}^{(b)}$  – напряжения, вызванные неконтактной нагрузкой  $F_b$ .

Поскольку в типичных силовых системах взаимодействующие тела (ролик и вал) в области контакта ограничены поверхностями второго порядка [2, 3, 7], то в данном случае площадка контакта  $S(x, y)$  имеет форму эллипса, а нормальные усилия на площадке контакта распределены по эллиптическому закону  $p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$  ( $p_0$  – максимальное давление в центре контакта,  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса) [1, 3].

Расчет напряжений  $\sigma_{ij}^{(hs)}$  в любой точке  $K(x, y, z)$  при  $z < 0$  полупространства при действии на поверхность нормальных усилий  $p(x, y)$  проводится численными методами с использованием функций влияния  $G_{ij}^{(B)}$  из фундаментального решения задачи Буссинеска о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [4, 9]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x, y, z) = \iint_{S(x, y)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(x, y, z; \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5)$$

Необходимо учесть, что в точке приложения единичной нагрузки в задаче Буссинеска  $G_{ij}^{(B)} \rightarrow \infty$ . Это приводит к тому, что для точек  $z = 0$  поверхности полупространства расчет в соответствии с (5) не сходится.

Для расчета напряжений в любой точке  $K(x, y, z)$  поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий  $p(x, y)$  проводится в соответствии со следующей общей формулой [2]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x, y, 0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x, y), \quad (6)$$

где  $\sigma_{ij}^{(S)}(x, y)$  – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области  $S(x, y)$ .

Таким образом, напряжения  $\sigma_{ij}^{(n)}$  в формулах (3) и (4) с учетом (6) будут:

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z < 0, \\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Расчет напряженного состояния  $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ , вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий  $q(\xi, \eta, z)$ , также выполняется численными методами с использованием функций влияния  $G_{ij}^{(C)}$  из решения задачи Черрути для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство [4, 9]:

$$\sigma_{ij}^{(\tau)}(\xi, \eta, z) = \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) G_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta. \quad (8)$$

Напряжения от внеконтактных нагрузок будем определять, применяя теорию изгиба бруса [2]:

$$\sigma_{ij}^{(b)} = \sigma_{ij}^{(M)} + \sigma_{ij}^{(N)} + \sigma_{ij}^{(Q)}, \quad (9)$$

где индексы  $M$ ,  $N$  и  $Q$  соответствуют внутренним моменту, продольному и поперечному усилиям.

Объединенное напряженное состояние, определяемое выражением (4), с учетом (5) – (7), имеет вид [4, 7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[ \sigma_{ij}^{(hs)} \vee \sigma_{ij}^{(surf)} \right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[ \iint_{S(\xi, \eta)} p(\xi, \eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta \vee \sigma_{ij}^{(S)}(\xi, y) \right] + \\ &+ \iint_{S(\xi, \eta)} q(\xi, \eta) G_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z) d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(\xi, y, z) + \\ &+ \sigma_{ij}^{(N)}(\xi, y, z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(\xi, y, z) \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим результаты численного расчета применительно к силовой системе ролик / вал в соответствии с выражением (10). Из распределений, представленных на рис. 3, хорошо видно, что напряженно-

деформированное состояние силовой системы значительно отличается (качественно и количественно) от таковых при традиционно отдельно изучаемых контакте и изгибе.

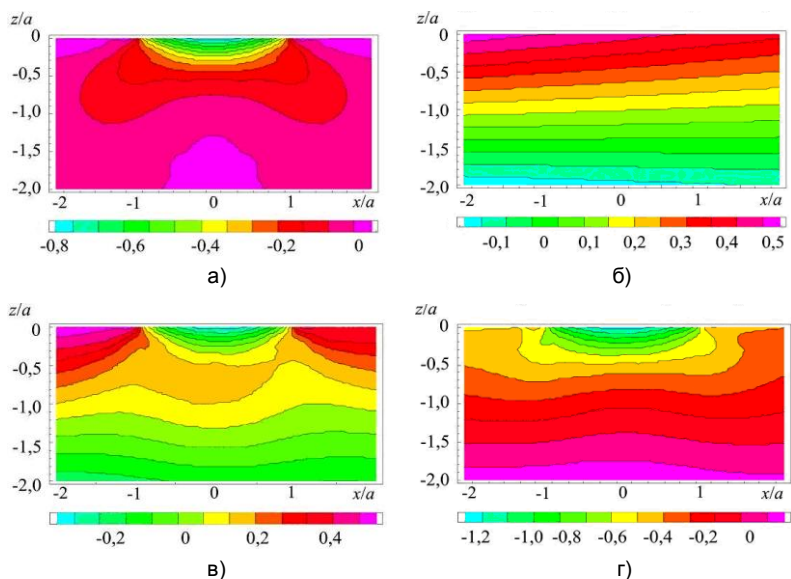


Рис. 3 – Распределение напряжений  $\sigma_{xx}^{(n)}$  (а),  $\sigma_{xx}^{(b)}$  (б),  $\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)}$  ( $F_b < 0$  : область растяжения) (в),  $\sigma_{xx}^{(n)} - \sigma_{xx}^{(b)}$  ( $F_b > 0$  : область сжатия) (г), отнесенных к максимальному  $p_0$ , в окрестности площадки контакта ( $y = 0, a/b = 0,5$ )

### Выводы.

1. Предложено принципиально новое развитие традиционной механики деформируемых тел: исследуются механические состояния не отдельного нагруженного тела, а деформируемой системы как целого, состоящего из двух взаимодействующих тел; такие системы называют силовыми.

2. Представлено общее решение задачи о совмещенном напряженно-деформированном состоянии деформируемых систем, анализ которого приводит к двум заключениям.

а) Если интересоваться как изменяется локальное поле контактных напряжений (деформаций), когда на него накладывается поле напряжений (деформаций), обусловленных объемным деформированием, то, по существу, это новый класс задач в механике контактного взаимодействия.

б) Если же интересоваться, как поле напряжений (деформаций), обусловленных объемным деформированием, возмущается в локальной

области, в которой одновременно возбуждается поле контактных напряжений (деформаций), то, по существу, это новый раздел теории упругости – теория упругости, освобожденная от принципа Сен-Венана.

3. Общее заключение состоит в том, что механико-математические модели, разрабатываемые в рамках трибофатики, являются существенным развитием в перспективном направлении смежных с нею дисциплин механического цикла (механики деформируемого твердого тела, трибологии, механики поврежденности, механики усталостного разрушения).

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Bhusan, B.** Modern Tribology Handbook [Текст]: монография / B. Bhusan et al. // CRC Press, 2000.
2. **Sosnovskiy, L. A.** Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics) [Текст]: монография / L. A. Sosnovskiy // Springer, 2004.
3. **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия [Текст]: монография / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989.
4. **Журавков, М. А.** Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования [Текст] / М. А. Журавков, С. С. Щербаков // Вести НАНБ, сер. физ.-тех. н. – 2008. – № 1. – С. 48–57.
5. **Журавков, М. А.** Компьютерный анализ напряженно-деформированного состояния в зоне эллиптической площадки контакта тел при качении применительно к модели зубчатых зацеплений [Текст] / М. А. Журавков, А. М. Захарик, С. М. Босяков, С. С. Щербаков // Трение и износ. – 2006. – № 1. – С. 12–16.
6. **Журавков, М. А.** Математическое моделирование в трибофатике [Текст] / М. А. Журавков, Л. А. Сосновский, С. С. Щербаков // X Белорусская математическая конференция. Тез. Докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3-7 ноября 2008 г. Ч. 2. – С. 120–121.
7. **Сосновский, Л. А.** Механика износоусталостного повреждения [Текст]: монография / Л. А. Сосновский. – Гомель, 2007.
8. **Сосновский, Л. А.** Основы трибофатики [Текст]: монография / Л. А. Сосновский. – Гомель, 2003.
9. **Щербаков, С. С.** Исследование напряженного состояния силовой системы для испытаний на контактно-механическую усталость [Текст] / С. С. Щербаков // Динаміка, міцність і надійність сільськогосподарських машин: тр. І Междунар. науч.-техн. конф., Тернополь, Украина, 4–7 октября 2004 г. – С. 400–407.

*Белорусский государственный  
университет, Минск, Беларусь*

*НПО «ТРИБОФАТИКА», Гомель, Беларусь*

*Надійшла до редколегії 05.03.2009*