Применение метода Льенара–Шипара к исследованию однородного дробно-дифференциального уравнения типа Эйлера

Н. В. Жуковская (Минск, Беларусь)

На полуоси $[1;+\infty)$ рассмотрим однородное дифференциальное уравнение порядка $\alpha+m$

$$A_m x^m \left(D_{1+}^{\alpha+m}y\right)(x) + A_{m-1}x^{m-1}\left(D_{1+}^{\alpha+m-1}y\right)(x) + ... + A_0\left(D_{1+}^{\alpha}y\right)(x) = 0, \qquad (1)$$

где $0<\alpha<1$, $m\in\mathbb{N}$, коэффициенты A_0, A_1, ..., $A_m \in \mathbb{C}$, $(D_{1+}^{\alpha+m}y)(x)$ – дробная производная Римана–Лиувилля, определяемая формулой

$$\left(D_{1+}^{\alpha+m}y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha} \qquad (1\le x<+\infty).$$

Решение $y(x)$ будем искать в классе $I^\alpha\left(L_1[1;+\infty)\right)$. Обозначив $z = D_{1+}^{\alpha}y$, получим уравнение Эйлера

$$A_m x^m z^{(m)}(x) + A_{m-1}x^{m-1}z^{(m-1)}(x) + ... + A_0 z(x) = 0. \qquad (2)$$

Сделав замену $x=e^t$, $0<t<+\infty$, приводим (2) к виду

$$a_m\widetilde{z}^{(m)}(t) + a_{m-1}\widetilde{z}^{(m-1)}(t) + ... + a_0\widetilde{z}(t) = 0, \qquad (3)$$

где коэффициенты a_0, a_1, ..., a_m выражены через A_0, A_1, ..., A_m. Уравнению (3) ставим в соответствие характеристический многочлен

$$P_m(s) = a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + ... + a_1 s + a_0.$$

Пусть $P_m(s)$ не имеет кратных корней. Тогда каждому его корню s соответствует решение уравнения (2) вида $z(x)=x^s$. Учитывая $\left(D_{1+}^{\alpha}y\right)(x) = x^s$ и используя [1], получим решение исходного уравнения (1) в виде

$$y(x) = \left(\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} - \frac{B_{\frac{1}{x}}(s+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)x^{\alpha+s} =$$

$$= \frac{(-1)^\alpha(1-x)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\ {}_2F_1\!\left[\begin{matrix}1, & -s\\ 1+\alpha & \end{matrix}\ \Big|\ 1-x\right],$$

где $B_z(a,b) = \int\limits_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ – неполная бета-функция, ${}_2F_1\!\left[\begin{matrix}a, & b\\ c & \end{matrix}\ \Big|\ z\right]$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Функция $y(x)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -1$, при этом $y\in I^\alpha\left(L_1[1;+\infty)\right)$. Если $\operatorname{Re} s\le -1$, то решению $z(x)=x^s$ уравнения (2) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (1).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть характеристический многочлен $P_m(s)$ имеет κ простых корней $s_j\,(j=1,...,\kappa)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -1$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x) = c_0 x^{\alpha-1} + \sum_{j=1}^{\kappa} c_j \left(\frac{\Gamma(s_j+1)}{\Gamma(\alpha+s_j+1)} - \frac{B_{\frac{1}{x}}(s_j+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right) x^{\alpha+s_j} =$$

$$= c_0 x^{\alpha-1} + \sum_{j=1}^{\kappa} c_j \frac{(-1)^{\alpha}(1-x)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\, {}_2F_1\!\left[\begin{matrix} 1, & -s_j \\ 1+\alpha & \end{matrix} \mid 1-x \right],$$

где c_0, c_1, ..., c_κ– произвольные постоянные.

Представляют интерес методы нахождения числа корней многочлена $P_m(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -1$, не основанные на явном решении характеристического уравнения.

Обозначим $Q_m(t) = P_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ – многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$. Строим функцию $h(Q_m;t,\tau) = -i\frac{Q_m(t)\overline{Q_m}(\tau)-Q_m(\tau)\overline{Q_m}(t)}{t-\tau} = \sum\limits_{k,\,l=0}^{m-1} B_{kl}t^k\tau^l$. Этой функции ставим в соответствие эрмитову форму $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1}) = \sum\limits_{k,\,l=0}^{m-1} B_{kl}t_k\bar{t}_l$.

Из теоремы Эрмита [2] вытекает

Теорема 2. Пусть r и s – ранг и сигнатура эрмитовой формы $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$. Тогда уравнение (1) имеет $(r+s)/2+1$ линейно независимое решение. Если эрмитова форма $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$ определена положительно, то уравнение (1) имеет $m+1$ линейно независимое решение. Если эрмитова форма $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$ определена отрицательно, то уравнение (1) имеет 1 линейно независимое решение $y = c_0\, x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований "Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития" (номер государственной регистрации №20113526).

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Мн.: Наука и техника. (1987).

2. *Крейн М.Г., Наймарк М.А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений.* Харьков: ОНТИ. (1936).