Исследование корректности одной краевой задачи для составного уравнения третьего порядка в n-мерном случае

В. В. Дайняк (Минск, Беларусь)

В настоящей работе рассматривается задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами в главной части, представимого в виде композиции гиперболического оператора первого порядка и эллиптического оператора второго порядка в n-мерном случае. Эти неклассические линейные дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ запишем в виде

$$\mathcal{L}u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial x_i} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + a_n^2 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u + \\ + \mathcal{L}_1(x, D)u = f(x), \tag{1}$$

где $\mathcal{L}_1(x, D)u = p_0(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_0} + p_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + p_n(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} - \lambda(x)u$. Здесь a_i и b_i $(i = 1, \ldots, n)$ – постоянные, коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x, D)u$ и их производные $\dfrac{\partial p_i(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ измеримы и ограничены. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathcal{L}$, которые являются достаточными, доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость уравнения (1) в произвольной области при наличии простейших граничных условий.

Обозначим через Ω произвольную ограниченную область $n+1$-мерного пространства переменных $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$. Пусть $\mathcal{L}_0(\tau) = (\tau_0 + b_1\tau_1 + \ldots + b_n\tau_n)(\tau_0^2 + a_1^2\tau_1^2 + \ldots + a_n^2\tau_n^2)$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(\tau) < 0$.

Наряду с задачей (1) (2) рассмотрена и соответствующая ей сопряженная

$$\mathcal{L}^\star v = g(x),$$

$$v\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \partial\Omega^+ = \{x \in \Omega |\, \mathcal{L}_0(\tau) > 0\},$$

где $\mathcal{L}^\star$ – формально сопряженный к $\mathcal{L}$ оператор.

Литература.

1. *Корзюк В.И., Дайняк В.В.* О слабом решении задачи типа Дирихле для линейного дифференциального уравнения третьего порядка *Дифференц. уравнения.* Том **28**, No. 6 (1992), 1056–1066.

3. *Корзюк В.И., Дайняк В.В.* Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка. *Вестник Бел. гос. ун-та.* Сер. 1. Физ. Мат. Информ. No. 3 (2012), 116–121.