

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

О. А. Кононова,
Н. И. Ильинкова,
Н. К. Филиппова

Метод Лагранжа для линейного неоднородного уравнения

учебно-методическая разработка

Минск
2015

Решение о депонировании документа вынес
Совет физического факультета БГУ, протокол №8 от 30.04.2015 г.

Авторы:

доценты кафедры высшей математики и математической физики, кандидаты физико-математических наук : О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова.

Рецензенты:

Белявский С. С. канд. физ-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ;
Альсевич Л. А. канд. физ-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ФПМИ БГУ.

Кононова, О. А. Метод Лагранжа для линейного неоднородного уравнения : учебно-методическая разработка / О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова ; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической. – Минск : БГУ, 2015. – 16 с. – Библиогр.: с. 16.

Реферат (аннотация): Учебно-методическая разработка «Метод Лагранжа для линейного неоднородного уравнения» содержит теоретическое обоснование метода вариации произвольных постоянных (Метода Лагранжа) для линейного неоднородного уравнения n -го порядка. Пособие содержит достаточно большое количество примеров с подробным описанием их решения, которые могут способствовать лучшему усвоению студентами соответствующего раздела систем дифференциальных уравнений, а также служить основой для контролируемой самостоятельной работы студентов физико-математических специальностей по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Теорема. Общее решение неоднородного линейного уравнения

$$L y = f(x) \quad (1)$$

можно найти в квадратурах, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$L z = 0 \quad (2)$$

Доказательство

Будем искать общее решение уравнения (1) в виде:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i(x) z_i(x) \quad (3)$$

где $z_i(x), i = \overline{1, n}$ — фундаментальная система решений уравнения (2).

Найдем производные выражения (3), подчиняя их $n-1$ условиям:

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i(x) z_i'(x) + \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i(x), \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i(x) = 0$$

$$y'' = \sum_{i=1}^n c_i(x) z_i''(x) + \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i'(x), \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i'(x) = 0$$

.....

$$y^{n-1} = \sum_{i=1}^n c_i(x) z_i^{n-1}(x) + \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i^{n-2}(x), \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i^{n-2}(x) = 0$$

$$y^n = \sum_{i=1}^n c_i(x) z_i^n(x) + \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i^{n-1}(x)$$

Подставим (3) и найденные производные в уравнение (1), получим

$$\sum_{i=1}^n c_i(x) L[z_i(x)] + \sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i^{n-1}(x) = f(x) \quad (5)$$

Учитывая, что $L[z_i(x)] = 0$, имеем

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) z_i^{n-1}(x) = f(x).$$

Итак, для определения $c_i(x)$ получаем следующую систему из n уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n c'_i x z_i x = 0 \\ \sum_{i=1}^n c'_i x z'_i x = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n c'_i x z_i^{n-2} x = 0 \\ \sum_{i=1}^n c'_i x z_i^{n-1} x = f x \end{array} \right. \quad (6)$$

Система (6) является линейной и неоднородной относительно $c'_i x$ с определителем Вронского $W x \neq 0$ в интервале a, b непрерывности коэффициентов уравнения (2). Решая систему (6) по правилу Крамера получим

$$c'_i x = \frac{W_{ni}}{W x} f x, i = \overline{1, n} \quad (7)$$

где W_{ni} — алгебраические дополнения к элементам n -ой строки определителя Вронского. Из (7) получаем, что

$$c_i x = \int_{x_0}^x \frac{W_{ni} f x}{W x} dx + c_i, i = \overline{1, n} \quad (8)$$

где c_i — произвольные постоянные, $\forall x_0 \in a, b$.

Подставляя (8) в выражение (3) получим

$$y = \sum_{i=1}^n z_i x \cdot \int_{x_0}^x \frac{W_{ni} f x}{W x} dx + \sum_{i=1}^n c_i z_i x c_i,$$

где первое слагаемое является частным решением неоднородного уравнения (1), а второе слагаемое общим решением соответствующего однородного уравнения (2).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x e^x + c_2 x x e^x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^x + c_2' x x e^x = 0, \\ c_1' x e^x + c_2' x e^x + c_2' x x e^x = \frac{e^x}{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' x + c_2' x x = 0, \\ c_1' x + c_2' x (1+x) = \frac{1}{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1' x = -1, c_2' x = \frac{1}{x} \Rightarrow c_1 x = -x + c_1, c_2 x = \ln|x| + c_2.$$

Таким образом, $y = c_1 e^x + c_2 x e^x - x e^x + x \ln|x| e^x$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x e^{-2x} + c_2 x e^{-x}.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^{-2x} + c_2' x e^{-x} = 0, \\ -2c_1' x e^{-2x} - c_2' x e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}, c_2' x = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = -\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx + c_1 = \int \frac{e^x de^x}{e^x + 1} + c_1 = [t = e^x] =$$

$$= -\int \frac{tdt}{t+1} + c_1 = -t + \ln|t+1| + c_1 = -e^x + \ln|e^x + 1| + c_1,$$

$$c_2 x = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} + c_2 = \ln|e^x + 1| + c_2$$

Таким образом, $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \ln|e^x + 1| e^{-2x} + e^{-x} - e^{-x}$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x \cos x + c_2 x \sin x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x \cos x + c_2' x \sin x = 0, \\ -c_1' x \sin x + c_2' x \cos x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = -1, c_2' x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 x = -x + c_1, c_2 x = \ln|\sin x| + c_2.$$

Таким образом, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 2\operatorname{tg}x$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 4 = 0, \lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x \cos 2x + c_2 x \sin 2x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x \cos 2x + c_2' x \sin 2x = 0, \\ -2c_1' x \sin 2x + 2c_2' x \cos 2x = 2\operatorname{tg}x. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = -\operatorname{tg}x \sin 2x, c_2' x = \operatorname{tg}x \cos 2x.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} c_1 x &= -\int \operatorname{tg}x \sin 2x dx + c_1 = -2 \int \frac{\sin x}{\cos x} \sin x \cos x dx + c_1 = \\ &= -\int 1 - \cos 2x dx + c_1 = -x + \frac{\sin 2x}{2} + c_1 \\ c_2 x &= \int \operatorname{tg}x \cos 2x dx + c_2 = \ln|\cos x| + \sin^2 x + c_2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \ln|\cos x| + \sin^2 x \sin 2x + \left(-x + \frac{\sin 2x}{2}\right) \cos 2x$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x e^{-x} + c_2 x x e^{-x}.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^{-x} + c_2' x x e^{-x} = 0, \\ -c_1' x e^{-x} - c_2' x x e^{-x} + c_2' x e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' x + c_2' x x = 0, \\ -c_1' x + c_2' x (1-x) = 3\sqrt{x+1}. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = 3\sqrt{x+1}, c_2' x = -3x\sqrt{x+1}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = -3 \int x\sqrt{x+1} dx + c_1 = \left[t = \sqrt{x+1}, 2t dt = dx \right] =$$

$$= -6 \int t^4 - t^2 dt + c_1 = -6 \frac{t^5}{5} + 2t^3 + c_1 = -\frac{6}{5} x+1^{5/2} + 2 x+1^{3/2} + c_1,$$

$$c_2 x = 3 \int \sqrt{x+1} dx + c_2 = 2 x+1^{3/2} + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \left(-\frac{6}{5} x+1^{5/2} + 2 x+1^{3/2} \right) e^{-x} + 2 x e^{-x} x+1^{3/2} =$$

$$= e^{-x} \left(c_1 + c_2 x - \frac{6}{5} x+1^{5/2} + 2 x+1^{3/2} + 2 x+1 - 1 x+1^{3/2} \right) =$$

$$= e^{-x} \left(\frac{4}{5} x+1^{5/2} + c_1 + c_2 x \right)$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x \cos x + c_2 x \sin x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x \cos x + c_2' x \sin x = 0, \\ -c_1' x \sin x + c_2' x \cos x = \frac{2}{\cos^3 x}. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, c_2' x = \frac{2}{\cos^2 x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = -2 \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + c_1 = 2 \int \frac{d \cos x}{\cos^3 x} + c_1 = -\frac{1}{\cos^2 x} + c_1$$

$$c_2 x = 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} + c_2 = 2 \operatorname{tg} x + c_2$$

Таким образом, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2 \operatorname{tg} x \sin x - \frac{1}{\cos x}$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' - y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x e^x + c_2 x e^{-x}.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^x + c_2' x e^{-x} = 0, \\ c_1' x e^x - c_2' x e^{-x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = \frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right), c_2' x = -\frac{e^x}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right).$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = -\int \frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \right) dx + c_1 = \frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) + c_1$$

✘

Таким образом,

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{x}$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 4 = 0, \lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x \cos 2x + c_2 x \sin 2x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x \cos 2x + c_2' x \sin 2x = 0, \\ -2c_1' x \sin 2x + 2c_2' x \cos 2x = \frac{1}{\cos 2x}. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = -\frac{\sin 2x}{2 \cos 2x}, c_2' x = \frac{1}{2}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx + c_1 = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + c_1$$

$$c_2 x = \frac{1}{2} \int dx + c_2 = \frac{x}{2} + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x|$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = c_1 x \cos x + c_2 x \sin x$.

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x \cos x + c_2' x \sin x = 0, \\ -c_1' x \sin x + c_2' x \cos x = \operatorname{tg} x. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, c_2' x = \sin x.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} c_1 x &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx + c_1 = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx + c_1 = -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx + c_1 = \\ &= -\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} + \sin x + c_1 = -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + c_1 \\ c_2 x &= \int \sin x dx + c_2 = -\cos x + c_2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \cos x \sin x - \cos x \sin x = \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \end{aligned}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y'' - y = \frac{1}{x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x e^x + c_2 x e^{-x}.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^x + c_2' x e^{-x} = 0, \\ c_1' x e^x - c_2' x e^{-x} = \frac{1}{x}. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = \frac{e^{-x}}{2x}, c_2' x = -\frac{e^x}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 x = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^{-x}}{x} dx + c_1, c_2 x = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^x}{x} dx + c_2.$$

Таким образом, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{e^x}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^{-x}}{x} dx - \frac{e^{-x}}{2} \int_{x_0}^x \frac{e^x}{x} dx$ является

решением исходного уравнения. ▲

Пример 11. Найти общее решение уравнения $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

△ Решаем соответствующее однородное уравнение $y''' + y' = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^3 + \lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x + c_2 x \cos x + c_3 x \sin x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x, c_3 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x + c_2' x \cos x + c_3' x \sin x = 0 \\ -c_2' x \sin x + c_3' x \cos x = 0 \\ -c_2' x \cos x - c_3' x \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1' x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, c_2' x = -\frac{\sin x}{\cos x}, c_3' x = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + c_1 = -\int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} + c_1 = \frac{1}{\cos x} + c_1$$

$$c_2 x = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + c_2 = \int \frac{d \cos x}{\cos x} + c_2 = \ln |\cos x| + c_2$$

$$c_3 x = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx + c_3 = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx + c_3 = -\operatorname{tg} x + x + c_3$$

Таким образом,

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln |\cos x| + -\operatorname{tg} x + x \sin x$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

△ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его

корни: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x e^x + c_2 x x e^x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^x + c_2' x x e^x = 0, \\ c_1' x e^x + c_2' x x e^x + c_2' x e^x = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' x + c_2' x x = 0, \\ c_1' x + c_2' x (1+x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} e^{-x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1' x = -e^{-x} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right), c_2' x = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} e^{-x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = - \int e^{-x} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx + c_1 = e^{-x} \left(1 + \frac{2}{x} \right) + c_1$$

$$c_2 x = \int e^{-x} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2} \right) dx + c_2 = -e^{-x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^x e^{-x} \left(1 + \frac{2}{x} \right) - x e^x e^{-x} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 13. Найти общее решение уравнения $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$.

△ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - y' = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - \lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 + c_2 e^x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x + c_2 x e^x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x + c_2' x e^x = 0, \\ c_2' x e^x = \frac{2-x}{x^3} e^x. \end{cases} \Rightarrow c_1' x = \frac{-2+x}{x^3} e^x, c_2' x = \frac{2-x}{x^3}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = \int \frac{-2+x}{x^3} e^x dx + c_1 = \frac{e^x}{x^2} + c_1$$

$$c_2 x = \int \frac{2-x}{x^3} dx + c_2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + c_2$$

Таким образом, $y = c_1 + c_2 e^x + \frac{e^x}{x^2} + e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = c_1 + c_2 e^x + \frac{e^x}{x}$ явля-

ется решением исходного уравнения. ▲

Пример 14. Найти общее решение уравнения $y'' + y = -\frac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x \cos x + c_2 x \sin x.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x \cos x + c_2' x \sin x = 0 \\ -c_1' x \sin x + c_2' x \cos x = -\frac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1' x = \frac{\sin x}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}, c_2' x = -\frac{\cos x}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = \int \frac{\sin x}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}} dx + c_1 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{t} + c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} + c_1$$

$$c_2 x = - \int \frac{\cos x}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}} dx + c_2 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, x = \arctg t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right] = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{t^{3/2}} + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg} x}} \sin x = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sqrt{\sin 2x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 15. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1 x e^x + c_2 x e^{-x}.$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^x + c_2' x e^{-x} = 0, \\ c_1' x e^x - c_2' x e^{-x} = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1' x = e^{-x} \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right), c_2' x = -e^x \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right).$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = \int e^{-x} \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) dx + c_1 = e^{-x} \left(-2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + c_1$$

$$c_2 x = - \int e^x \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) dx + c_2 = e^x \left(-2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 16. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$. Для этого записываем характеристический много-

член и находим его корни: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = c_1 x e^{2x} + c_2 x x e^{2x}$.

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^{2x} + c_2' x x e^{2x} = 0, \\ 2c_1' x e^{2x} + 2c_2' x x e^{2x} + c_2' x e^{2x} = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' x + c_2' x x = 0, \\ 2c_1' x + c_2' x (1+2x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow c_1' x = \sqrt{x}, c_2' x = -\frac{1}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = \int \sqrt{x} dx + c_1 = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c_1, c_2 x = -\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + c_2 = -2\sqrt{x} + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} e^{2x} - 2x \sqrt{x} e^{2x} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - \frac{4}{3} x \sqrt{x} e^{2x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 17. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 10y = \frac{e^{3x}}{\cos x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 6y' + 10y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0, \lambda_1 = 3 - i, \lambda_2 = 3 + i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = e^{3x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = e^{3x} (c_1 x \cos x + c_2 x \sin x).$$

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^{3x} \cos x + c_2' x e^{3x} \sin x = 0 \\ c_1' x e^{3x} (3 \cos x - \sin x) + c_2' x e^{3x} (3 \sin x + \cos x) = \frac{e^{3x}}{\cos x} \end{cases}$$

После упрощения система примет вид

$$\begin{cases} c_1' x \cos x + c_2' x \sin x = 0 \\ -c_1' x \sin x + c_2' x \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c_1' x = -\frac{\sin x}{\cos x}, c_2' x = 1. \end{cases}$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + c_1 = \ln |\cos x| + c_1, c_2 x = \int dx + c_2 = x + c_2$$

Таким образом, $y = e^{3x} c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln|\cos x| \cos x + x \sin x$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 18. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 26y = \frac{5e^x}{\cos 5x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 2y' + 26y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 2\lambda + 26 = 0, \lambda_1 = 1 - 5i, \lambda_2 = 1 + 5i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = e^x c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = e^x c_1 x \cos 5x + c_2 x \sin 5x$.

Для нахождения $c_1 x, c_2 x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' x e^x \cos 5x + c_2' x e^x \sin 5x = 0 \\ c_1' x e^x \cos 5x - 5 \sin 5x + c_2' x e^x \sin 5x + 5 \cos 5x = \frac{5e^x}{\cos 5x} \end{cases}$$

После упрощения система примет вид

$$\begin{cases} c_1' x \cos 5x + c_2' x \sin 5x = 0 \\ -c_1' x \sin 5x + c_2' x \cos 5x = \frac{1}{\cos 5x} \end{cases} \Rightarrow c_1' x = -\frac{\sin 5x}{\cos 5x}, c_2' x = 1.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 x = -\int \frac{\sin 5x}{\cos 5x} dx + c_1 = \frac{1}{5} \ln|\cos 5x| + c_1, c_2 x = \int dx + c_2 = x + c_2$$

Таким образом,

$$y = e^x \left(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \frac{1}{5} \ln|\cos 5x| \cos 5x + x \sin 5x \right)$$

является решением исходного уравнения. ▲

Список используемой литературы

1. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Минск: Высш. шк. , 1974. – 766 с.
2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва: Наука , 1969. – 320с.
3. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. – СПб: Лань , 2002. – 432 с.
4. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 176 с.
5. Шилин, А.П. Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры/ А.П. Шилин. – Минск :РИВШ, 2008. – 366 с.
6. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников – Москва: Наука , 1985. – 231.