УДК 517.926.2/4

А. Ф. НАУМОВИЧ

О ВРЕМЕНИ СТАБИЛИЗАЦИИ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x); \tag{1.a}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \tag{1.б}$$

две дифференциальные системы: x, y, $f(t, x)$, $g(t, y)$ — n-мерные векторы-столбцы. Обозначим через $x(t, \xi)$ решение системы (1.а), для которого $x(0, \xi) = \xi$, а через $y(t, \eta)$ — решение системы (1.б), для которого $y(0, \eta) = \eta$.

Пусть при заданном ξ решение $x(t, \xi)$ существует, единственно и продолжимо на полуинтервал $[0, T)$, где $0 < T \leqslant +\infty$. Рассматривая решения $y(t, \eta)$ тоже только для тех η, при которых $y(t, \eta)$ существуют, единственны и продолжимы на $[0, T)$, и предполагая, что множество таких η не пусто, введем следующие характеристики взаимного расположения решений систем (1.а)—(1.б) на полуинтервале $[0, T)$:

$$\delta(\xi, T) = \inf_{\eta} \sup_{t \in [0, T)} \| x(t, \xi) - y(t, \eta) \| ;$$

$$\Delta(\xi, T) = \left\{ \eta \mid \sup_{t \in [0, T)} \| x(t, \xi) - y(t, \eta) \| = \delta(\xi, T) \right\}$$

(вторую из них в предположении, что $\delta(\xi, T)$ конечно).

При простейших предположениях относительно систем (1.а)—(1.б) сравнительные характеристики впервые определены в работах [1, 2].

Пусть имеется непустое множество E в пространстве начальных данных ξ системы (1.а), обладающее свойством, что все решения $x(t, \xi)$ при $\xi \in E$ продолжимы на бесконечный промежуток $[0, +\infty)$.

Назовем число $T_0 = T_0(E)$ временем стабилизации сравнительных характеристик систем (1.а)—(1.б) на $E \subset R^n$, если $T_0(E)$ есть наименьшее из чисел, обладающих свойством, что $\delta(\xi, T)$ и $\Delta(\xi, T)$ при $T \geqslant T_0(E)$ для любых $\xi \in E$ не зависят от T.

В работах [1, 2] изучены, в частности, сравнительные характеристики некоторых систем вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax; \tag{2.a}$$

$$\frac{dy}{dt} = By \tag{2.б}$$

в случае, когда A и B — постоянные устойчивые матрицы второго порядка. В качестве нормы вектора использовалась первая (кубическая) норма [3, стр. 121].

Из результатов проведенного в [1, 2] исследования вытекает, что при

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

(здесь и далее $E=R^2$), время стабилизации сравнительных характеристик $T_0(E)$ равно $1-\varphi_0$, где φ_0 — корень уравнения

$$-\varphi=e^{\varphi-1}\quad(-1<\varphi_0<0).$$

Последний результат обобщим на случай, когда

$$A=\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ \varepsilon & -\lambda\end{bmatrix},\ \lambda>0,\ \varepsilon\neq 0. \tag{3}$$

Здесь получается, что $T_0=\lambda(1-\varphi_0)$, причем T_0 не зависит от ε. Для рассмотренного в упомянутых работах случая, когда

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}\lambda_1+\alpha_1 & 0\\ 0 & \lambda_2+\alpha_2\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\lambda_i<\lambda_i+\alpha_i<0\quad(i=1,\ 2),$$

получим, что $T_0=\max\{T_1,\ T_2\}$.

Здесь

$$T_i=-\frac{1}{\alpha_i}\ln\left(\theta_i\frac{l_i-1}{l_i}\right)\quad(i=1,\ 2) \tag{5}$$

при следующих обозначениях:

$$l_i=-\frac{\lambda_i}{\alpha_i},\ M_i=(l_i-1)^{l_i-1}\mid l_i^{l_i},$$

θ_i удовлетворяет уравнению

$$1-\theta_i=M_i\theta_i^{l_i}\qquad\left(\frac{1}{2}<\theta_i<1\right). \tag{6}$$

Исследуем поведение времени стабилизации в случае, когда $\alpha_i\to+0$. Опустим временно всюду индексы. Пусть $\alpha\to+0$. Тогда

$$l=-\frac{\lambda}{\alpha}\to+\infty,\quad M=\left(\frac{l-1}{l}\right)^{l-1}\cdot\frac{1}{l}\to+0.$$

Так как $0<\theta^l<1$, то $1-\theta\to+0$, т. е. $\theta\to1-0$.

Обозначим $\theta\cdot\frac{l-1}{l}$ через ψ $(\psi\to1)$. Из (6) следует

$$\frac{l-1}{l}-\theta\frac{l-1}{l}=\left(\theta\frac{l-1}{l}\right)^l\cdot\frac{1}{l}.$$

Таким образом, ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{l-1}{l}-\psi=\psi^l\cdot\frac{1}{l},$$

упрощая которое, получим

$$l(1-\psi)-1=\psi^l. \tag{7}$$

Дифференцируем последнее тождество по l:

$$1-\psi-l\psi_l'=l\psi^{l-1}\cdot\psi_l',$$

откуда, используя уравнение (7), получаем

$$\psi_l'=\frac{1-\psi}{l(1+\psi^{l-1})}=\frac{\psi}{l(l-1)}. \tag{8}$$

Обращаясь к отысканию предела $\lim\limits_{\alpha\to+0} T$, из (5) имеем

$$\lim_{\alpha\to+0} T = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\ln\psi}{-\alpha}.$$

Для раскрытия получившейся неопределенности применим правило Лопиталя и далее используем результат (8). Тогда

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{\ln\psi}{-\alpha} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\psi'_l \cdot l'_\alpha}{-\psi} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\psi\cdot\lambda}{-l(l-1)\cdot\alpha^2\psi} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{l^2}{l(l-1)(-\lambda)} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha_i\to+0} T_i = -\frac{1}{\lambda_i},$$

поэтому

$$\lim_{\substack{\alpha_1\to+0\\ \alpha_2\to+0}} T_0 = \max\left\{-\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\lambda_2}\right\}.$$

В рассмотренных случаях (3) и (4) обращает на себя внимание тот факт, что, когда матрица B стремится к A (например, при $\varepsilon\to 0$ в (3) или при $\alpha_i\to+0$ в (4)), время стабилизации сравнительных характеристик стремится, однако, не к нулю, а к некоторому положительному числу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С., Наумович А. Ф. «Дифференц. уравнения», 6, № 3, 552—554, 1970.
2. Богданов Ю. С., Наумович А. Ф. О взаимном расположении решений двух стационарных линейных дифференциальных систем. ВИНИТИ. Деп. № 1287—69.
3. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию
11/V 1972 г.

БГУ им. В. И. Ленина, кафедра высшей математики