УДК 517.926.2/4

НАУМОВИЧ А. Ф.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВОЗМУЩЕНИЙ, НЕ ИЗМЕНЯЮЩИХ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются пары дифференциальных систем порядка n, записанных в векторной форме:

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \dfrac{dx}{dt} = X(t,\ x) \\ \text{б) } \dfrac{dy}{dt} = Y(t,\ y) \end{array}\right\}, \tag{1}$$

для которых выполнены условия существования, единственности и продолжимости решений.

Обозначения:

$x(t,\ \xi)$ — решение системы 1а), $x(0,\ \xi) = \xi$;
$y(t,\ \eta)$ — решение системы 1б), $y(0,\ \eta) = \eta$;

U — компактное множество в пространстве ξ начальных данных системы 1а);

$$\delta(\xi) = \inf_{\eta} \sup_{t \in [0,\ +\infty)} \| x(t,\ \xi) - y(t,\ \eta) \|;$$

$$\Delta(\xi) = \left\{ \eta \,\middle|\, \sup_{t \in [0,\ +\infty)} \| x(t,\ \xi) - y(t,\ \eta) \| = \delta(\xi) \right\};$$

$$\Delta(U) = \bigcup_{\xi \in U} \Delta(\xi).$$

Все рассматриваемые векторы суть векторы-столбцы, которые будем записывать в строчку.

В качестве нормы вектора $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ выберем

$$\| x \| = \max_i | x_i |,$$

при этом под нормой матрицы $P = (p_{ik})$ будем понимать норму

$$\| P \| = \max_i \sum_k | p_{ik} |,$$

индуцированную вышеуказанной нормой вектора [1].

Теорема. Пусть имеется пара систем

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } \dfrac{dx}{dt} = Ax \\ \text{б) } \dfrac{dy}{dt} = By \end{array}\right\}, \tag{2}$$

где A и B — постоянные $n \times n$ матрицы, у которых действительные части характеристических чисел отрицательны, и $\delta(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in U$.

Тогда существуют такие положительные числа T, M и N, что для любых вектор-функций $f(t, x)$ и $g(t, y)$, которые удовлетворяют условиям:

1. $f(t, x) \equiv g(t, y) \equiv 0,\ t \in [0, T]$;

2. $\| f(t, x) \| \leqslant \frac{M}{\| e^{-At} \|},\ t \in (T, +\infty),\ x \in R^n$,

$$\| g(t, y) \| \leqslant \frac{N}{\| e^{-Bt} \|},\ t \in (T, +\infty),\ y \in R^n,$$

пара систем

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ \frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + f(t, \overline{x}) \\ &\text{б)}\ \frac{d\overline{y}}{dt} = B\overline{y} + g(t, \overline{y}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

при любом $\xi \in U$ имеет те же $\delta(\xi)$ и $\Delta(\xi)$, что и пара систем (2).

Доказательство. Нетрудно убедиться, что в нашем случае $\delta(\xi)$ непрерывна на U, поэтому $\inf\limits_{\xi \in U} \delta(\xi)$, который обозначим через δ, достигается, и, следовательно, $\delta > 0$.

Из асимптотической устойчивости в целом тривиальных решений систем 2а) и 2б) и ограниченности множеств U и $\Delta(U)$ заключаем [2], что существует такое число $T > 0$, что при $t \geqslant T$

$$\| x(t, \xi) \| < \frac{\delta}{4} \quad \text{для } \xi \in U,$$

$$\| y(t, \eta) \| < \frac{\delta}{4} \quad \text{для } \eta \in \Delta(U),$$

следовательно, при $t \geqslant T$ сразу для всех $\xi \in U$ и $\eta \in \Delta(U)$

$$\| x(t, \xi) - y(t, \eta) \| < \frac{\delta}{2}.$$

Положим теперь

$$M = \frac{\delta}{4 \sup\limits_{t \in [T, +\infty)} (t - T) \| e^{At} \|},$$

$$N = \frac{\delta}{4 \sup\limits_{t \in [T, +\infty)} (t - T) \| e^{Bt} \|}$$

(в силу устойчивости матриц A и B числа M и N положительны).

Тогда получим, что

$$\sup_{t \in [T, +\infty)} (M(t - T) \| e^{At} \| + N(t - T) \| e^{Bt} \|) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

Совмещая пространства начальных данных систем 2а) и 3а), а также 2б) и 3б), убедимся в неизменности $\delta(\xi)$ и $\Delta(\xi)$ при $\xi \in U$.

Действительно, если $\overline{x}(t, \xi)$ — решение системы 3а), для которого $\overline{x}(0, \xi) = \xi$, а $\overline{y}(t, \eta)$ — решение системы 3б), для которого $\overline{y}(0, \eta) = \eta$, то при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\overline{x}(t, \xi) \equiv x(t, \xi),\ \overline{y}(t, \eta) \equiv y(t, \eta),$$

поэтому для каждого $\xi \in U$ и $\eta \in \Delta(\xi)$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\bar{x}(t,\xi)-\bar{y}(t,\eta)\| = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t,\xi)-y(t,\eta)\| = \delta(\xi)$$

в силу выбора числа T.

При $t \geqslant T$ имеем

$$\bar{x}(t,\xi) = e^{At}\left(\xi + \int_T^t e^{-A\tau} f(\tau, \bar{x}(\tau,\xi))\, d\tau\right),$$

$$\bar{y}(t,\eta) = e^{Bt}\left(\eta + \int_T^t e^{-B\tau} g(\tau, \bar{y}(\tau,\eta))\, d\tau\right),$$

поэтому для любых $\xi \in U$ и $\eta \in \Delta(U)$

$$\sup_{t\in[T,+\infty)} \|\bar{x}(t,\xi)-\bar{y}(t,\eta)\| = \sup_{t\in[T,+\infty)} \|e^{At}(\xi + \int_T^t e^{-At} f(\tau,\bar{x}(\tau,\xi))\,d\tau) -$$

$$- e^{Bt}(\eta + \int_T^t e^{-B\tau} g(\tau,\bar{y}(\tau,\eta))\,d\tau)\| \leqslant \sup_{t\in[T,+\infty)} \|e^{At}\xi - e^{Bt}\eta\| +$$

$$+ \sup_{t\in[T,+\infty)} (\|e^{At}\| \int_T^t \|e^{-A\tau}\| \, \|f(\tau,\bar{x}(\tau,\xi))\|\, d\tau +$$

$$+ \|e^{Bt}\| \int_T^t \|e^{-B\tau}\| \, \|g(\tau,\bar{y}(\tau,\eta))\|\, d\tau) < \frac{\delta}{2} + \sup_{t\in[T,+\infty)} (\|e^{At}\| M(t-T) +$$

$$+ \|e^{Bt}\| N(t-T)) \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Следовательно, при любом $\xi \in U$, а $\eta \in \Delta(\xi)$

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|\bar{x}(t,\xi)-\bar{y}(t,\eta)\| = \sup_{t\in[0,+\infty)} \|x(t,\xi)-y(t,\eta)\|,$$

откуда и заключаем, что $\delta(\xi)$ и $\Delta(\xi)$ не изменились.

Теорема доказана.

Очевидно, что аналогичные рассуждения проходят и в том случае, когда A и B переменные устойчивые матрицы Лаппо-Данилевского.

В качестве примера проследим построение систем (3) для некоторых систем вида (2) с уже вычисленными [3] $\delta(\xi)$ и $\Delta(\xi)$.

Так, если в (2) положим

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \alpha_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \alpha_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\lambda_i < \lambda_i + \alpha_i < 0 \quad (i = 1, 2),$$

и обозначим

$$\lambda = \min(-\lambda_1, -\lambda_2), \; \bar{\lambda} = \max(-\lambda_1, -\lambda_2),$$

$$\mu = \min(-\lambda_1 - \alpha_1, -\lambda_2 - \alpha_2),$$

$$\bar{\mu} = \max(-\lambda_1 - \alpha_1, -\lambda_2 - \alpha_2),$$

$$\max_{\xi\in U} \|\xi\| = q,$$

$$\max_{\eta\in\Delta(U)} \|\eta\| = r,$$

то получим

$$T = \max\left(\frac{1}{\mu}\ln\frac{4r}{\delta},\ \frac{1}{\lambda}\ln\frac{4q}{\delta}\right),$$

$$M = \frac{1}{4}\delta\lambda\exp(1+\lambda T),$$

$$N = \frac{1}{4}\delta\mu\exp(1+\mu T),$$

$$\|f(t,\ x)\| \leqslant Me^{-\overline{\lambda}t},$$

$$\|g(t,\ y)\| \leqslant Ne^{-\overline{\mu}t}.$$

Если положить в (2)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

то можно взять

$$T = \max\left(\ln\frac{4q}{\delta},\ t_1\right),$$

где

t_1 — единственный корень уравнения

$$(t+1)e^{-t} = \frac{\delta}{4},$$

$$M = \frac{\delta}{4}\exp(1+T),$$

$$N = \frac{\delta}{4}\,\frac{\exp\frac{1}{2}(1+T+\sqrt{T^2+2T+5})}{2+\sqrt{T^2+2T+5}},$$

$$\|f(t,\ x)\| \leqslant Me^{-t},\ \|g(t,\ y)\| \leqslant N\frac{e^{-t}}{t+1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.

2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.

3. Богданов Ю. С., Наумович А. Ф. «Дифференц. уравнения», 6, № 3, 552—554, 1970.

Поступила в редакцию
3/XI 1970 г.

БГУ им. В. И. Ленина,
кафедра математического анализа