УДК 517.926.2

О ВЗАИМНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ДВУХ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ*)

Ю. С. БОГДАНОВ, А. Ф. НАУМОВИЧ

Постановка задачи. Рассмотрим две дифференциальные системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \qquad (1\text{a}) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, y) \qquad (1\text{б}) \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где x, y, f и g — n-мерные векторы.

Обозначим $x(t, \xi)$ решение системы (1а), удовлетворяющее условию $x(0, \xi) = \xi$, $y(t, \eta)$ — решение системы (1б), для которого $y(0, \eta) = \eta$. Предположим, что при любых ξ и η решения систем (1а) и (1б) существуют, единственны и продолжимы на интервал $[0, T]$ (см., например, [1]).

Для каждого ξ вычислим величину

$$\delta(\xi) = \inf_{\eta} \sup_{t \in [0, T]} \|x(t, \xi) - y(t, \eta)\|.$$

Определим множество $\Delta(\xi)$ по правилу

$$\Delta(\xi) = \{\eta \mid \sup_{t \in [0, T]} \|x(t, \xi) - y(t, \eta)\| = \delta(\xi)\}.$$

Из непрерывности $x(t, \xi)$ и $y(t, \xi)$ по всем аргументам следует, что для каждого ξ найдется по крайней мере одно $\eta \in \Delta(\xi)$. Таким образом, пространство начальных данных ξ для системы (1а) отображается в множество непустых подмножеств пространства η. Поставим своей задачей изучение отображения $\Delta(\xi)$ для систем (1а) — (1б) специального вида.

В качестве нормы вектора x выбрана величина

$$\|x\| = \max(|x_i|), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

§ 1. СТАЦИОНАРНЫЕ ДИАГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть системы (1) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax \qquad (2\text{a}) \\ \frac{dy}{dt} &= By \qquad (2\text{б}) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \alpha_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\quad \lambda_i < \lambda_i + \alpha_i < 0 \ (i = 1, 2)$.

*) Статья полностью депонирована в ВИНИТИ — 1287—69 Деп.

Пусть T_i есть решение уравнения $\dfrac{1+\exp(\lambda_i T_i)}{1+\exp[(\lambda_i+\alpha_i)T_i]}=\theta_i$, где θ_i есть, в свою очередь, единственный корень уравнения

$$1-u=A_i u^{l_i},\ l_i=-\frac{\lambda_i}{\alpha_i},\ A_i=\frac{(l_i-1)^{l_i-1}}{l_i^{l_i}}.$$

Значения $\delta(\xi)$ и $\Delta(\xi)$ зависят от взаимного расположения T и T_i. Например, при $T \geqslant \max\{T_1, T_2\}$

$$\delta(\xi)=\max\{(1-\theta_1)\ |\xi_1|,\ (1-\theta_2)\ |\xi_2|\},$$

а $\Delta(\xi)$ есть вертикальный отрезок, если $(1-\theta_2)\,|\xi_2| > (1-\theta_1)\,|\xi_1|$, и горизонтальный отрезок, если $(1-\theta_2)\,|\xi_2| < (1-\theta_1)\,|\xi_1|$, и точка $(\theta_1\xi_1,\ \theta_2\xi_2)$, если $(1-\theta_2)\,|\xi_2|=(1-\theta_1)\,|\xi_1|$. Размеры упомянутых отрезков зависят от расположения точки ξ.

§ 2. ОБРАТНЫЙ ПЕРЕХОД

В случае системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=Bx \qquad (3\text{а})\\ \frac{dy}{dt}&=Ay \qquad (3\text{б}) \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где A и B те же, что и в § 1, результат аналогичен. Например, при $T \geqslant \max\{T_1, T_2\}$

$$\delta(\xi)=\max\left\{\left(\frac{1}{\theta_1}-1\right)|\xi_1|,\ \left(\frac{1}{\theta_2}-1\right)|\xi_2|\right\},$$

а $\Delta(\xi)$ снова есть отрезок либо точка в зависимости от соотношения между $\left(\dfrac{1}{\theta_1}-1\right)|\xi_1|$ и $\left(\dfrac{1}{\theta_2}-1\right)|\xi_2|$.

§ 3. ЧЕРЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДОВ

Действуя на заданную точку ξ системами (2), получим множество $\Delta(\xi)$, действуя на которое системами (3), получим множество $\Omega_1(\xi)$, затем снова с помощью системы (2) образуем множество $\Delta_1(\xi)$ и т. д.

Получим две последовательности множеств:

$$\xi,\ \Omega_1(\xi),\ \Omega_2(\xi),\ \ldots \text{ в плоскости } \xi,$$

$$\Delta(\xi),\ \Delta_1(\xi),\ \Delta_2(\xi),\ \ldots \text{ в плоскости } \eta.$$

Выясняется, что, например, при $T \geqslant \max\{T_1, T_2\}$, $(1-\theta_2)\,|\xi_2| > (1-\theta_1)\,|\xi_1|$ и $\xi_1>0$, $\xi_2>0$, все построенные множества есть отрезки

$$\xi \in \Omega_1(\xi) \subset \Omega_2(\xi) \subset \cdots,$$

$$\Delta(\xi) \subset \Delta_1(\xi) \subset \Delta_2(\xi) \subset \cdots,$$

причем $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\Omega_n(\xi)$ есть горизонтальный отрезок

$$\bar{\xi}_2=\xi_2,\ |\bar{\xi}_1| < \frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}\,\xi_1,$$

а $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\Delta_n(\xi)$ — отрезок

$$\bar{\eta}_2=\theta_2\xi_2,\ \ |\bar{\eta}_1| < \frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}\,\theta_2\xi_2.$$

§ 4. ВОЗМУЩЕНИЕ МАТРИЦЕЙ С НЕПРОСТЫМ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ДЕЛИТЕЛЕМ

Рассмотрим решение основной задачи для систем

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \ \frac{dy}{dt} = By,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пусть φ_0 — корень уравнения $-\varphi = \exp(\varphi - 1)$. Результат зависит от сравнения величин $1 - \varphi_0$ и T. Например, при $T \geqslant 1 - \varphi_0$ имеем

$$\delta(\xi) = \frac{\exp(\varphi_0 - 1)}{1 + \exp(\varphi_0 - 1)} |\xi_1|,$$

а $\Delta(\xi)$ есть точка $\left(\frac{\xi_1}{1 - \varphi_0}, \ \xi_2 + \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0} \xi_1\right)$.

Литература

1. Ющенко А. А. Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1022—1034, 1968.

Поступила в редакцию 29 октября 1969 г.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина