УДК 517.925

А. Ф. НАУМОВИЧ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

(Представлено академиком АН БССР Н. П. Еругиным)

В последнее время разработан ряд методов приближенного аналитического решения линейной дифференциальной системы, основанных на представлении правой части системы в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует главной части решения и имеет специальный вид, а второе является поправкой. Для построения главной части решения используются диагональные системы ([1, 2]), треугольные системы ([3]), системы Лаппо — Данилевского ([4]) и т. д. В связи с этим возникают задачи о наилучшей аппроксимации данной функциональной матрицы специальными матрицами — матрицей, коммутирующей со своим интегралом, и матрицей, стационарно подобной треугольной. В настоящей заметке указаны оценки сверху отклонения матрицы общего вида от ближайшей специальной матрицы.

Все рассматриваемые ниже матрицы имеют размер 2×2. Они заданы на отрезке $[0, T]$, вещественны и непрерывны. Норму матрицы $p=(p_{ij})$ определяем по формуле

$$\|p\| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T p_{ij}^2(t)\,dt \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим P_M — совокупность всех матриц, элементы которых не превосходят по модулю M; Q — совокупность матриц, коммутирующих со своим интегралом; S — совокупность матриц вида $Ar(t)A^{-1}$, где $r(t)$ — треугольная матрица, а A — постоянная матрица, причем $\det A = 1$.

Положим

$$\Delta_1 = \sup_{p\in P_M} \inf_{q\in Q} \|p-q\|,$$

$$\Delta_2 = \sup_{p\in P_M} \inf_{s\in S} \|p-q\|.$$

Т е о р е м а 1. $\Delta_1 = M\sqrt{2T}$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Если $q\in Q$, то

$$q = \begin{pmatrix} \varphi + a\psi, & c\psi \\ b\psi, & \varphi \end{pmatrix},$$

где a, b, c — постоянные ([5]). При фиксированных p, a, b, c определим функционал

$$\Phi = \int_0^T F(t,\ \varphi,\ \psi)\,\alpha t, \tag{1}$$

где $F(t, \varphi, \psi) = \sum\limits_{i,j} [p_{ij}(t) - q_{ij}(t)]^2$.

Известное необходимое условие минимума функционала Φ [6]

$$\Phi_\varphi = \Phi_\psi = 0$$

приводит к линейной системе относительно φ и ψ, из которой после преобразований получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \left[(a^2 + b^2 + c^2)\, p_{22} + (b^2 + c^2)\, p_{11} - abp_{21} - acp_{12}\right] D^{-1}, \\ \psi &= \left[a\,(p_{11} - p_{22}) + 2bp_{21} + 2cp_{12}\right] D^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $D = a^2 + 2b^2 + 2c^2$. (Если $D = 0$, то $\varphi = \frac{1}{2}(p_{22} + p_{11})$, а ψ — произвольно). Как легко убедиться, в данном случае необходимые условия экстремума совпадают с достаточными, поэтому, подставляя (2) в (1), получаем минимум $I(a, b, c)$ функционала Φ $I(a, b, c) = \left[(b^2 + c^2)\,\lambda_1 + (a^2 + 2c^2)\lambda_2 + (a^2 + 2b^2)\,\lambda_3 + 2ab\,\lambda_4 + 2ac\,\lambda_5 - 4bc\,\lambda_6\right] D^{-1}$, где $\lambda_1 - \lambda_6$ — интегралы по $[0, T]$ соответственно от функций $(p_{22} - p_{11})^2$, p_{21}^2, p_{12}^2, $(p_{22} - p_{11})\,p_{21}$, $(p_{22} - p_{11})\,p_{12}$, p_{21}, p_{12}. Если же $D=0$, то $I(0, 0, 0) = \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Из соотношения $I(a, 0, 0) = \lambda_2 + \lambda_3$ легко следует $I(a, 0, 0) \leqslant 2M^2T$.

Следовательно,

$$\inf_{q \in Q} \|p - q\| \leqslant M\sqrt{2T}. \tag{3}$$

Оценка (3) не зависит от индивидуальных свойств матрицы p, поэтому

$$\sup_{p \in P_M} \inf_{q \in Q} \|p - q\| \leqslant M\sqrt{2T}. \tag{4}$$

Для исключения знака неравенства в (4) заметим сначала, что для матриц p, обладающих свойством

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \quad \lambda_1 = 2\lambda_2 = 2\lambda_3, \tag{5}$$

функция $I(a, b, c)$ постоянна и равна $2\lambda_2$. Последнее обстоятельство позволяет оценить левую часть (4) снизу. Построим матрицу $\bar{p}$, удовлетворяющую (5). Положим для $0 < \mu < \frac{1}{2}$ $(M = 1,\ T = 1)$

$$p_{21}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant \mu, \\ \dfrac{2(t - \mu)}{1 - 2\mu} - 1, & \mu < t < 1 - \mu, \\ 1, & 1 - \mu \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

$$p_{12}(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\mu}{2},\ \ 1 - \dfrac{\mu}{2} \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{2(2t - \mu)}{1 - 2\mu} - 1, & \dfrac{\mu}{2} < t < \dfrac{1 - \mu}{2}, \\ 1, & \dfrac{1 - \mu}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1 + \mu}{2}, \\ \dfrac{2(2 - \mu - 2t)}{1 - 2\mu} - 1, & \dfrac{1 + \mu}{2} < t < 1 - \dfrac{\mu}{2}; \end{cases}$$

$$p_{22}(t) = -p_{11}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}(4\mu + 1)}.$$

Здесь $|p_{ij}(t)| \leqslant 1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{4}{3}\mu + \frac{1}{3}$, $\lambda_1 = \frac{2}{3}(4\mu + 1) = 2\lambda_2$. Значит, $I(a, b, c) = \frac{2}{3}(4\mu + 1)$. Из того, что μ можно взять как угодно близко к $\frac{1}{2}$, следует

$$\sup_{p \in P_1} \inf_{q \in Q} \|p - q\| = \sqrt{2},$$

а в общем случае

$$\sup_{p \in P_M} \inf_{q \in Q} \|p - q\| = M\sqrt{2T},$$

т. е.

$$\Delta_1 = M\sqrt{2T}.$$

Замечание. На множестве треугольных матриц ($p_{12} = 0$)

$$\Delta_1 = M\sqrt{T}. \tag{6}$$

Действительно, в этом случае $\lambda_3 = 0$, поэтому $I(a, 0, 0) = \lambda_2 \leqslant M^2 T$, а равенство (6) вытекает из следующего примера: ($M = 1$, $T = 1$).

Пусть

$$f(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{8}, \\ \frac{16}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{8} < t < \frac{7}{8}, \\ 2, & \frac{7}{8} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Положим $p_{22}(t) = -p_{11}(t) = \frac{1}{2} f(t)$, $p_{21}(t) \equiv 1$. Здесь $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, $\lambda_1 = 2\lambda_2 = 2$. Так как для треугольных матриц можно положить $c = 0$, то при $\lambda_1 = 2\lambda_2$ следует

$$I(a, b, 0) \equiv \lambda_2 = 1,$$

значит,

$$\Delta_1 = 1.$$

Отметим еще, что в приведенном примере для матрицы

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} f(t), & 0 \\ 1, & \frac{1}{2} f(t) \end{pmatrix}$$

любая матрица q при $c = 0$, $a^2 + 2b^2 \neq 0$ дает наилучшую аппроксимацию.

Например, при $b = 0$ получим из (2)

$$q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} f(t), & 0 \\ 0, & \frac{1}{2} f(t) \end{pmatrix},$$

а при $a = 0$

$$q = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. $\Delta_2 = M\sqrt{T}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило 1.II 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Bajcsay, Period. politechn. Electr., Engng., **3**, № 3, 217, 1959; **4**, № 1, 63, 1960. [2] А. Н. Еругин, ИФЖ, **4**, № 5, 111, 1961. [3] В. Н. Лаптинский, ДАН БССР, **9**, № 4, 219, 1965; **10**, № 10, 732, 1966; **10**, № 11, 827, 1967. [4] Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 522, 1967. [5] Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 45, 1963. [6] М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, ГИТТЛ, М.—Л., 85, 1950.