УДК 517.911.5

А. А. ЛЕВАКОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В статье продолжаются исследования, проведенные в [1]. Для дифференциальных включений с помощью знакопостоянных функций Ляпунова исследуется устойчивость нулевого решения. Полученные результаты являются обобщением, а в некоторых случаях и усилением аналогичных утверждений по устойчивости дифференциальных систем с непрерывной правой частью.

Начиная с работ [2, 3], в которых впервые для исследования устойчивости дифференциальных систем использованы знакоопределенные функции Ляпунова со знакопостоянной производной, в силу системы проблема ослабления требований к функциям Ляпунова для облегчения их построения является актуальной для прямого метода Ляпунова. Обзор результатов, полученных в этом направлении, дан в [4]. В статье результаты из [1] распространяются на дифференциальные включения, к которым сводятся, например, дифференциальные системы с разрывной правой частью и дифференциальные системы с управлением [5]. Поэтому полученные результаты могут быть применены к этим классам дифференциальных систем.

В дальнейшем используются обозначения: N, Z, R — соответственно множества натуральных, целых, действительных чисел; R^n — n-мерное евклидово пространство, состоящее из элементов $x=(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in R$, $i=1, \dots, n$; $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, $\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$, $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ — соответственно скалярное произведение, расстояние, норма в R^n; $S_a=\{x\in R^n \mid \|x\|<a\}$, $\bar{S}_a=\{x\in R^n \mid \|x\|\leqslant a\}$; $\operatorname{comp}(R^n)$ $(\operatorname{conv}(R^n))$ — множество всех непустых компактных (непустых компактных выпуклых) подмножеств из R^n; $[G]_\varepsilon=\{x\in R^n \mid \rho(G, x)\leqslant\varepsilon\}$ — ε-окрестность множества $G\in\operatorname{comp}(R^n)$; если $V: R\times R^n\to R$ — непрерывно дифференцируемая функция, то $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x_n}\right)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F(t, x), \quad F(t, 0)\ni 0, \tag{1}$$

где $F: R\times R^n\to\operatorname{comp}(R^n)$. Под решением дифференциального включения (д. вкл.) (1) на промежутке $|\alpha, \beta|$ понимаем абсолютно непрерывную функцию $x: |\alpha, \beta|\to R^n$, производная которой $\dot{x}$ почти при всех $t\in|\alpha, \beta|$

удовлетворяет включению $\dot{x}(t)\in F(t, x(t))$. Решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x_0$, обозначаем символом $x(\cdot; t_0, x_0)$. В дальнейшем предполагаем, что

i) для любой пары $(t_0, x_0)\in R\times R^n$ существует хотя бы одно решение x д. вкл. (1), определенное на некотором интервале $]t_0-\delta, t_0+\delta[$, $\delta>0$, и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x_0$;

ii) $\forall a>0$, $\forall T>0$ существует суммируемая по Лебегу на $[-T, T]$ неотрицательная функция $n(\cdot)$ такая, что $F(t, x)\subset S_{n(t)}$ для всех $x\in\bar{S}_a$ и для почти всех $t\in[-T, T]$;

iii) $\forall\varepsilon>0$, $\forall t_0\in R$, $\forall\bar{t}>t_0$, $\exists\delta(\varepsilon, t_0, \bar{t})>0$, $\forall x_0\in S_\delta$ каждое решение $x(\cdot; t_0, x_0)$ продолжимо на $[t_0, \bar{t}]$ и $x(t; t_0, x_0)\in S_\varepsilon$ при всех $t\in[t_0, \bar{t}]$.

Определения. 1. Нулевое решение д. вкл. (1) называется устойчивым, если $\forall\varepsilon>0$, $\forall t_0\in R$, $\exists\delta(\varepsilon, t_0)>0$, $\forall x_0\in S_\delta$ каждое решение $x(\cdot; t_0, x_0)$ продолжимо на $[t_0, +\infty[$ и $x(t; t_0, x_0)\in S_\varepsilon$ при всех $t\in[t_0, +\infty[$.

2. Нулевое решение называется притягивающим, если $\forall t_0\in R$, $\exists\eta(t_0)>0$, $\forall x_0\in\bar{S}_\eta$, для любого решения $x(\cdot; t_0, x_0)$ имеем $x(t; t_0, x_0)\to 0$ при $t\to+\infty$.

3. Нулевое решение асимптотически устойчивое, если оно устойчивое и притягивающее.

Многозначная функция $G: R\times R^n\to\text{comp}(R^n)$ β-непрерывна в точке (t', x'), если $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon, t', x')>0$, $\forall t\in]t_0-\delta, t_0+\delta[$, $\forall x\in\{x\in R^n \mid \|x-x'\|<\delta\}$ $G(t, x)\subset[G(t', x')]_\varepsilon$ [5, с. 52—53]. Функция G β-непрерывна, если она β-непрерывна в каждой точке $(t', x')\in R\times R^n$. Отображение $G: R\times R^n\to\text{comp}(R^n)$ L-периодическое по t $(0<L<+\infty)$, если $\forall t\in R$, $\forall x\in R^n$ $G(t+L, x)=G(t, x)$.

Введем следующее

Условие а). Существует β-непрерывное, L-периодическое по t отображение $G: R\times R^n\to\text{conv}(R^n)$ такое, что $\forall b>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists T(b, \varepsilon)>0$, $\forall t\in R\setminus]-T, T[$, $\forall x\in\bar{S}_b$ $F(t, x)\subset[G(t, x)]_\varepsilon$.

Наряду с д. вкл. (1) будем рассматривать д. вкл.

$$\dot{y}\in G(t, y),\ G(t, 0)\ni 0, \tag{2}$$

где $G: R\times R^n\to\text{conv}(R^n)$ — β-непрерывное, L-периодическое по t отображение. Из теоремы 1 [5, с. 60—61] следует, что д. вкл. (2) удовлетворяет условию *i)*. Согласно лемме 15 [5, с. 53] и периодичности по t отображения G, имеем $\forall a>0$, $\exists m>0$, $\forall x\in\bar{S}_a$, $\forall t\in R$ $G(t, x)\in\bar{S}_m$. Предположим, кроме того, что $\forall t_0\in R$ начальная задача $\dot{y}\in G(t, x)$, $y(t_0)=0$, имеет при $t\geqslant t_0$ единственное решение $y(t)\equiv 0$. Тогда, согласно следствию 1 [5, с. 69], д. вкл. (2) удовлетворяет условию *iii)*. Таким образом, при сделанных предположениях д. вкл. (2) удовлетворяет условиям *i)*, *ii)*, *iii)*.

В дальнейшем через $x^+(\cdot; t_0, x_0)$ $(x^-(\cdot; t_0, x_0), x^\infty(\cdot; t_0, x_0))$ обозначаем решения, бесконечно продолжимые вправо, т. е. на промежуток $[t_0, +\infty[$ (влево — на $]-\infty, t_0]$, вправо и влево — на $]-\infty, +\infty[$).

Определения. 4. Положительной полутраекторией (отрицательной полутраекторией, траекторией), соответствующей решению $x^+(\cdot; t_0, x_0)$ $(x^-(\cdot; t_0, x_0), x^\infty(\cdot; t_0, x_0))$ будем называть множество $x^+([t_0, +\infty[; t_0, x_0)=\{x\in R^n \mid x=x(t; t_0, x_0), t\geqslant t_0\}$ $(x^-(]-\infty, t_0]; t_0, x_0), x^\infty(R; t_0, x_0))$.

5. Пусть $s\in[0, +\infty[$. Точка q называется ω_s^*-предельной (α_s^*-предельной) для решения $x^+(\cdot; t_0, x_0)$ $(x^-(\cdot; t_0, x_0))$, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $N(n)$, $n=1, 2, \ldots$, такая, что $x(t_0+s+N(n)L; t_0, x_0)\to q$ $(x^-(t_0-s-N(n)L; t_0, x_0)\to q)$ при $n\to+\infty$.

6. Точка q называется ω-предельной (α-предельной) для решения $x^+(\cdot; t_0, x_0)$ $(x^-(\cdot; t_0, x_0))$, если существует последовательность $t_n\to+\infty$ $(t_n\to-\infty)$ при $n\to+\infty$ такая, что $x^+(t_n; t_0, x_0)\to q$ $(x^-(t_n; t_0, x_0)\to q)$, $n\to+\infty$.

Обозначим через $\Omega_s^*(x^+(\cdot; t_0, x_0))$ $(\Omega(x^+(\cdot; t_0, x_0)))$ множество всех

ω_s^*-предельных (ω-предельных) точек для $x^+(\cdot; t_0, x_0)$, а через $A_s^*(x^-(\cdot; t_0, x_0))$ ($A(x^-(\cdot; t_0, x_0))$) — множество всех α_s^*-предельных (α-предельных) точек для $x^-(\cdot; t_0, x_0)$.

Если полутраектория $x^+([t_0, +\infty[; t_0, x_0)$ ($x^-(]-\infty, t_0]; t_0, x_0)$), траектория $x^\infty(R; t_0, x_0)$) ограничена, то ее обозначаем символом $\hat{x}^+([t_0, +\infty[; t_0, x_0)$ ($\hat{x}^-(]-\infty, t_0]; t_0, x_0)$, $\hat{x}^\infty(R; t_0, x_0)$). Аналогичные символы используем и для ограниченных решений дифференциальных включений.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие а). Тогда для любого решения $\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0)$ д. вкл. (1) и для любой точки $q\in\Omega_s^*(\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0))$ существует траектория $\hat{y}^\infty(R; t_0+s, q)$ д. вкл. (2) такая, что $\hat{y}^\infty(t_0+s_1+mL; t_0+s, q)\in\Omega_{s_1}^*(\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0))$ при всех $s_1\in[0, L]$ и всех $m\in Z$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $q\in\Omega_s^*(\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0))$. Существует последовательность $t_{N(n)}=t_0+s+N(n)L\to+\infty$, $n\to+\infty$, для которой $\hat{x}^+(t_{N(n)}; t_0, x_0)\to q$. Рассмотрим последовательность функций $y_{N(n)}: [-N(n)L+t_0, +\infty[\to R^n$, $y_{N(n)}(t)=\hat{x}^+(t+N(n)L; t_0, x_0)$. Так как $y_{N(n)}(t_0+s)=\hat{x}^+(t_0+s+N(n)L; t_0, x_0)$, то $y_{N(n)}(t_0+s)\to q$, $n\to+\infty$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что точка t_0+s принадлежит промежутку $I_1=[-N(1)L+t_0, t_0+N(1)L]$. В противном случае нужно взять какую-либо подпоследовательность последовательности $N(n)$, обладающую указанным свойством. Из соотношений

$$\dot{y}_{N(n)}(t)\in F(t+N(n)L, \hat{x}^+(t+N(n)L; t_0, x_0)), \quad n=1, 2, \ldots, \tag{3}$$

верных почти при всех $t\in I_1$, из условия а) и свойств функции G следует, что последовательность $y_{N(n)}$ ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке I_1. Из $y_{N(n)}$ выберем подпоследовательность $y_{N_1(n)}$, равномерно сходящуюся на I_1, и пусть y^1 — ее предел. Из (3) и условия а) вытекает, что для любого $\delta>0$ при достаточно больших n имеем $\rho(\dot{y}_{N_1(n)}(t), G(t; y_{N_1(n)}(t)))<\delta$. Тогда по теореме 1 [6] y^1 — решение включения (2) на I_1. Аналогично из $y_{N_1(n)}$ можно выбрать подпоследовательность $y_{N_2(n)}$, равномерно сходящуюся на $I_2=[-N(2)L+t_0, t_0+N(2)L]$ к решению y^2 д. вкл. (2), причем $y^2=y^1$ на I_1. Продолжая этот процесс, получим решение y д. вкл. (2), определенное на R. Так как $y_{N_1(n)}(t_0+s)\to q$, $n\to+\infty$, то $y(t_0+s)=q$.

Покажем, что $\forall s_1\in[0, L]$, $\forall m\in Z$ $y(t_0+s_1+mL)\in\Omega_{s_1}^*(\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0))$. Возьмем произвольные $s_1\in[0, L]$ и $m\in Z$. Пусть точка $t_1=t_0+s_1+mL$ принадлежит, например, промежутку $[-N(e)L+t_0, t_0-N(e-1)L]$. Ограничение решения y на $I_e=[-N(e)L+t_0, t_0+N(e)L]$ есть функция y^e, которая является равномерным пределом на I_e последовательности $y_{N_e(n)}, y_{N_e(n)}(t)=\hat{x}^+(t+N_e(n)L; t_0, x_0)$. Так как $y_{N_e(n)}(t_1)=\hat{x}^+(t_1+N_e(n)L; t_0, x_0)$, $t_1+N_e(n)L\to+\infty$, $y_{N_e(n)}(t_1)\to y^e(t_1)$, $\hat{x}^+(t_1+N_e(n)L; t_0, x_0)\to q\in\Omega_{s_1}^*(\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0))$, $n\to+\infty$, то $y^e(t_1)\in\Omega_{s_1}^*(\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0))$. Траектория $y(R; t_0+s, q)$ является искомой.

Введем следующее

Условие б). Существует непрерывное отображение $V: R\times R^n\to[0, +\infty[$, $V(t, 0)\equiv 0$, для которого

б$_1$) $\exists\sigma_1>0$ такое, что для любого решения x д. вкл. (1) функция $t\to V(t, x(t))$ не возрастает до тех пор, пока $x(t)\in\bar{S}_{\sigma_1}$;

б$_2$) существует непрерывное, L-периодическое по t отображение $W: R\times R^n\to[0, +\infty[$, $\exists\sigma_2>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists T(\varepsilon)>0$, $\forall t\in R\setminus]-T, T[$, $\forall x\in\bar{S}_{\sigma_2}$ $|V(t, x)-W(t, x)|\leqslant\varepsilon$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия а) и б). Тогда для любой полутраектории $\hat{x}^+([t_0+\infty[; t_0, x_0)\subset\bar{S}_\sigma$, $0<\sigma\leqslant\min\{\sigma_1, \sigma_2\}$, д. вкл. (1), для любой точки $q\in\Omega_s^*(\hat{x}^+(\cdot; t_0, x_0))$ существует траектория $\hat{y}^\infty(R; t_0+$*

$+s, q)$ *д. вкл.* (2) *такая, что* $\forall s_1\in[0, L]$, $\forall m\in Z$ $\hat{y}^\infty(t_0+s_1+mL;\ t_0+s, q)\in\Omega^*_{s_1}(\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0))$ *и*

$$W(t, \hat{y}^\infty(t;\ t_0+s, q))=W(t_0+s, q) \tag{4}$$

при всех $t\in R$.

Доказательство. Покажем, что траектория $\hat{y}^\infty(R;\ t_0+s, q)$, построенная в лемме 1, удовлетворяет условию (4). Функция $t\to V(t;\ \hat{x}^+(t;\ t_0, x_0))$ ограничена снизу и не возрастает, следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty} V(t, \hat{x}^+(t;\ t_0, x_0))=C. \tag{5}$$

Возьмем произвольную точку $\bar{t}\in R$, и пусть $\gamma=\hat{y}^\infty(\bar{t};\ t_0+s, q)$. Существуют $s_1\in[0, L]$ и $m\in Z$ такие, что $\bar{t}=s_1+mL+t_0$. Согласно лемме 1, $\gamma\in\Omega^*_{s_1}(\hat{x}^+)$, поэтому существует последовательность $t_{N(n)}=t_0+s_1+N(n)L$ такая, что $\hat{x}^+(t_{N(n)};\ t_0, x_0)\to\gamma$, $n\to+\infty$. Из условия б) и соотношения (5) имеем

$$V(t_0+s_1+N(n)L, \hat{x}^+(t_0+s_1+N(n)L;\ t_0, x_0))\xrightarrow[n\to+\infty]{} W(t_0+s_1, \gamma)=$$

$$=W(t_0+mL+s_1, \gamma)=W(\bar{t}, \hat{y}^\infty(\bar{t};\ t_0+s, q))=C.$$

В частности, при $\bar{t}=t_0+s$ имеем $W(t_0+s, q)=C$. Таким образом, $W(t, \hat{y}^\infty(t;\ t_0+s, q))=W(t_0+s, q)$ при всех $t\in R$.

Лемма 3 [5, с. 98]. *Для любого решения* $\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0)$ *д. вкл.* (1) *имеем* $\rho(\hat{x}^+(t;\ t_0, x_0), \Omega(\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0)))\to 0$ *при* $t\to+\infty$.

Лемма 4. *Для любого решения* $\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0)$ *д. вкл.* (1), *для любого* $s\in[0, +\infty[$ *множество* $\Omega^*_s(\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0))$ *является компактным.*

Лемма 5. *При выполнении условия* а) *для любого решения* $\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0)$ *д. вкл.* (1) *выполняется соотношение* $\Omega(\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0))=\bigcup_{0\leqslant s\leqslant L}\Omega^*_s(\hat{x}^+(\cdot;\ t_0, x_0))$.

Доказательство. Пусть $q\in\Omega(\hat{x}^+)$. Тогда существует последовательность $t_n\uparrow+\infty$, $t_1>L$, $n\to+\infty$, что $\hat{x}^+(t_n)\to q$. Каждую точку t_n представим в виде $t_n=t_0+s_n+N(n)L$, где $s_n\in[0, L]$, $N(n)$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, $N(n)\to+\infty$, $n\to+\infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $s_n\to s\in[0, L]$. Из предположений об отображении G и условия а) вытекает равномерная непрерывность функции $\hat{x}^+(\cdot)$ на $[t_0, +\infty[$. Поэтому для каждого $\varepsilon>0$ при достаточно больших n имеем $\rho(q, \hat{x}^+(t_0+s+N(n)L))\leqslant\rho(q, \hat{x}^+(t_n))+\rho(\hat{x}^+(t_n), \hat{x}^+(t_0+s+N(n)L))\leqslant\varepsilon$. Это и доказывает, что $q\in\Omega^*_s(\hat{x}^+)$. Итак, $\Omega(\hat{x}^+)\subset\bigcup_{0\leqslant s\leqslant L}\Omega^*_s(\hat{x}^+)$. Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

Замечание 1. Аналогичные леммам 1—5 утверждения справедливы и для $\hat{x}^-(\cdot;\ t_0, x_0)$, $A^*_s(\hat{x}^-(\cdot;\ t_0, x_0))$ вместо $\hat{x}^+$ и $\Omega^*_s(\hat{x}^+)$.

Пусть $P: R\times R^n\to[0, +\infty[$ — непрерывная, L-периодическая по t функция, $P(t, 0)\equiv 0$. Обозначим через $m^r_P(t)$, $\bar{m}^r_P(t)$ следующие множества: $m^r_P(t)=\{x\in S_r \mid P(t, x)=0\}$, $\bar{m}^r_P(t)=\{x\in\bar{S}_r \mid P(t, x)=0\}$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* а) *и* б). *Тогда, если нулевое решение д. вкл.* (1) *неустойчиво, то* $\exists\varepsilon_0$, $0<\varepsilon_0<\sigma=\min\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\forall\varepsilon$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, *существует пара* $(t_0, p_0)\in R\times R^n$ *такая, что* $W(t_0, p_0)=0$, $\rho(0, p_0)=\varepsilon$, *и существует решение* $\hat{y}^-(\cdot;\ t_0, p_0)$ *д. вкл.* (2), *удовлетворяющее условию* $\forall t\in]-\infty, t_0]$ $\hat{y}^-(t;\ t_0, p_0)\in\bar{m}^\varepsilon_W(t)$.

Доказательство. Если нулевое решение д. вкл. (1) неустойчиво, то $\exists\varepsilon_0$, $0<\varepsilon_0<\sigma$, $\exists t_0\in R$, $\forall\varepsilon$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, существует последовательность решений $x_n(\cdot;\ t_0, x_{0n})$ д. вкл. (1) и существует последовательность $t_n\uparrow+\infty$, $t_1>L$, такие, что $\rho(x_{0n}, 0)\to 0$, $\rho(x_n(t_n+t_0;\ t_0, x_{0n}), 0)=$

$=\varepsilon$, $\rho(x_n(t;\ t_0,\ x_{0n}),\ 0)<\varepsilon$ для всех $t\in[t_0,\ t_0+t_n[$. Числа t_n представим в виде $t_n=s_n+N(n)L$, где $s_n\in[0,\ L]$; $N(n)$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, $N(n)\to+\infty$, $n\to+\infty$. Последовательности s_n, $x_n(t_n+t_0;\ t_0,\ x_{0n})$ принадлежат соответственно компактам $[0,\ L]$, $\{x\in R^n|\rho(x,\ 0)=\varepsilon\}$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $x_n(t_0+t_n;\ t_0,\ x_{0n})\to p_0$, $\rho(p_0,\ 0)=\varepsilon$, $s_n\to s\in[0,\ L]$, $n\to+\infty$.

Рассмотрим последовательность функций y_n: $[-t_n+s+t_0,\ t_0+s]\to\to R^n$, $y_n(t)=x_n(t+t_n-s;\ t_0,\ x_{0n})$. Рассуждая так же, как и в лемме 1, покажем, что из последовательности $y_n: J_1\to R^n$, $J_1=[-t_1+s+t_0,\ t_0+s]$, можно выбрать равномерно сходящуюся на J_1 подпоследовательность $y_{N_1(n)}$, и ее предел y^1 является на J_1 решением д. вкл. (2), причем $y^1(t_0+s)=p_0$. Из $y_{N_1(n)}$ точно так же выбираем подпоследовательность $y_{N_2(n)}$, равномерно сходящуюся на $J_2=[-t_2+s+t_0,\ t_0+s]$ к решению y^2 д. вкл. (2), причем $y^2=y^1$ на J_1. Продолжая этот процесс, построим решение y д. вкл. (2) на $]-\infty,\ t_0+s]$. Ясно, что $y(t)\in\bar S_\varepsilon$, $t\in]-\infty,\ t_0+s]$. Покажем, что $\forall t\in]-\infty,\ t_0+s]$ $y(t)\in\overline{m}^\varepsilon(t)$. Возьмем произвольную точку $\bar t\in]-\infty,\ t_0+s]$. Пусть $\bar t\in[-t_i+t_0+s,\ -t_{i-1}+t_0+s]$. Решение y на J_i является равномерным пределом последовательности $y_{N_i(n)}$. Так как для каждого $\varepsilon>0$ при достаточно больших n $t_{N_i(n)}+\bar t-s>t_0$, $V(t_0,\ x_{0N_i(n)})\geqslant V(\bar t+t_{N_i(n)}-s,\ y_{N_i(n)}(\bar t))\geqslant 0$, $|V(\bar t+t_{N_i(n)}-s,\ y_{N_i(n)}(\bar t))-W(\bar t,\ y_{N_i(n)}(\bar t))|<\varepsilon$, $V(t_0,\ x_{0N_i(n)})<\varepsilon$, то $W(\bar t,\ y(\bar t))=0$. В силу произвольности точки $\bar t$ $W(t,\ y(t))=0$ при всех $t\in]-\infty,\ t_0+s]$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если выполнены условия а), б) и существует $\sigma>0$ такое, что д. вкл. (2) не имеет решений $\hat y^-(\cdot;\ t_0,\ x_0)$, отличных от тривиального, удовлетворяющих условию $\hat y^-(t;\ t_0,\ x_0)\in m_W^\sigma(t)$ при всех $t\in]-\infty,\ t_0]$, то нулевое решение д. вкл. (1) устойчиво.*

Доказательство следует из леммы 6.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, д. вкл. (2) не имеет решений $\hat y^\infty(\cdot;\ t_0,\ x_0)$, отличных от тривиального, таких, что $W(t,\ \hat y^\infty(t;\ t_0,\ x_0))=W(t_0,\ x_0)$, $\hat y^\infty(t;\ t_0,\ x_0)\in S_\sigma$ при всех $t\in R$, то нулевое решение д. вкл. (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что нулевое решение д. вкл. (1) устойчиво, т. е. $\forall\varepsilon$, $0<\varepsilon<\sigma$, $\forall t_0\in R$, $\exists\delta(\varepsilon,\ t_0)>0$, $\forall x_0\in S_\delta$, для любого решения $x(\cdot;\ t_0,\ x_0)$ д. вкл. (1) имеем $x(t;\ t_0,\ x_0)\in S_\varepsilon$ при всех $t\in[t_0,\ +\infty[$. Покажем, что $\forall(t_0,\ x_0)\in R\times S_\delta$, для любого решения $x(\cdot;\ t_0,\ x_0)$ д. вкл. (1) $x(t;\ t_0,\ x_0)\to 0$, $t\to+\infty$. В силу лемм 3, 5 достаточно показать, что $\forall s\in[0,\ L]$ $\Omega_s^*(x(\cdot;\ t_0,\ x_0))=\{0\}$. Предположим противное: $\exists(t_0,\ x_0)\in R\times S_\delta$, существует решение $x(\cdot;\ t_0,\ x_0)$ д. вкл. (1), $\exists s\in[0,\ L]$, $\exists p\in\Omega_s^*(x(\cdot;\ t_0,\ x_0))$, $p\neq 0$. Тогда, согласно лемме 2, существует траектория $\hat y^\infty(R;\ t_0+s,\ p)$ д. вкл. (2), для которой $W(t_0+s,\ p)=\\=W(t;\ \hat y^\infty(t;\ t_0+s,\ p))$, $\hat y^\infty(t;\ t_0+s,\ p)\in\bar S_\varepsilon$ при всех $t\in R$, что противоречит условиям теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть P и $m_P^r(t)$ — отображение и множество, указанные после замечания 1. Введем связанные с отображением P

Определения. 7. Нулевое решение д. вкл. (2) называется P-устойчивым, если $\forall\varepsilon>0$, $\forall t_0\in R$, $\exists\delta(\varepsilon,\ t_0)>0$, $\forall x_0\in m_P^\delta(t_0)$, для любого решения $y(\cdot;\ t_0,\ x_0)$ д. вкл. (2), $\forall t\geqslant t_0$ $y(t;\ t_0,\ x_0)\in S_\varepsilon$.

8. Нулевое решение д. вкл. (2) называется P-притягивающим, если $\forall t_0\in R$, $\exists\eta(t_0)>0$, $\forall x_0\in m_P^\eta(t_0)$, для любого решения $y(\cdot;\ t_0,\ x_0)$ д. вкл. (2) $y(t;\ t_0,\ x_0)\to 0$, $t\to+\infty$.

9. Нулевое решение д. вкл. (2) P-асимптотически устойчивое, если оно P-устойчивое и P-притягивающее.

10. Нулевое решение д. вкл. (2) называется равномерно по t_0 P-устойчивым (равномерно по t_0 P-притягивающим), если в определении 7 (8) δ (η) можно выбрать не зависящим от t_0.

11. Нулевое решение равномерно по t_0 P-асимптотически устойчивое, если оно равномерно по t_0 P-устойчивое и равномерно t_0 P-притягивающее.

Условие в). Существует непрерывная, L-периодическая по t функция $W\colon R\times R^n\to[0, +\infty[$, $W(t, 0)\equiv 0$, $\exists\sigma>0$ такие, что для любого решения y д. вкл. (2) функция $t\to W(t, y(t))$ не возрастает до тех пор, пока $y(t)\in\bar{S}_\sigma$.

Лемма 7. *Пусть выполнено условие в). Тогда из W-устойчивости нулевого решения д. вкл. (2) следует равномерная по t_0 W-устойчивость и из W-притяжения нулевого решения д. вкл. (2) — равномерное по t_0 W-притяжение.*

Теорема 3. *Пусть выполнено условие в). Тогда для равномерной по t_0 W-асимптотической устойчивости нулевого решения д. вкл. (2) необходимо и достаточно, чтобы существовало $\sigma_1>0$ такое, что д. вкл. (2) не имело бы решений $\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0)$, отличных от тривиального, таких, что $\hat{y}^-(t;\, t_0, x_0)\in m_W^{\sigma_1}(t)$ при всех $t\in]-\infty, t_0]$.*

Необходимость. Предположим, что $\forall\sigma_2$, $0<\sigma_2<\min\{\sigma, \eta\}$, η — число из определения равномерного по t_0 W-притяжения нулевого решения, $\exists t_0\in R$, $\exists x_0\in m_W^{\sigma_2}(t_0)\setminus 0$, существует решение $\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0)$ д. вкл. (2) такое, что $\forall t\in]-\infty, t_0]$ $\hat{y}^-(t;\, t_0, x_0)\in m_W^{\sigma_2}(t)$. Пусть $\rho(x_0, 0)=d>0$. Покажем, что

$$A_0^*(\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0))\not\ni\{0\}. \tag{6}$$

Действительно, если $A_0^*(\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0))\ni\{0\}$, то существует последовательность $t_n=t_0-N(n)L$, где $N(n)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой $\hat{y}^-(t_n;\, t_0, x_0)\to 0$, $n\to+\infty$. Рассмотрим следующую последовательность решений д. вкл. (2) $y_n\colon[t_0, t_0+N(n)L]\to R^n$, $y_n(t)=\hat{y}^-(t-N(n)L;\, t_0, x_0)$. Так как $W(t_0, y_n(t_0))=$ $=W(t_0-N(n)L,\ \hat{y}^-(t_0-N(n)L;\, t_0, x_0))=0$, $\rho(y_n(t_0), 0)\to 0$, $n\to+\infty$, $\rho(y_n(t_0+N(n)L), 0)=d>0$, то нулевое решение д. вкл. (2) не является W-асимптотически устойчивым. Таким образом, $A_0^*(\hat{y}^-)\not\ni\{0\}$.

Из ограниченности $\hat{y}^-$ следует, что $\exists x_1\neq 0$, $x_1\in A_0^*(\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0))$. Пусть $\hat{y}^-(t_0-N_1(n)L;\, t_0, x_0)\to x_1$. Согласно лемме 1 и замечанию 1, существует траектория $\hat{y}_1^\infty(R;\, t_0, x_1)$ д. вкл. (2) такая, что $\hat{y}_1^\infty(t_0+mL;\, t_0, x_1)\in A_0^*(\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0))$, $\forall m\in Z$. Так как $W(t, \hat{y}^-(t;\, t_0, x_0))=0$ при всех $t\in]-\infty, t_0]$ и $W(t_0, x_0)=W(t_0-N_1(n)L,\ \hat{y}^-(t_0-N_1(n)L;\, t_0, x_0))=W(t_0,\ \hat{y}^-(t_0-N_1(n)L;\, t_0, x_0))\to W(t_0, x_1)$, $n\to+\infty$, то $x_1\in\bar{m}_W^{\sigma_2}(t)$. Из равномерной по t_0 W-асимптотической устойчивости следует $\hat{y}_1^\infty(t_0+mL;\, t_0, x_1)\to$ $\to 0$, $m\to+\infty$. Множество $A_0^*(\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0))$ замкнуто (лемма 4). Поэтому $A_0^*(\hat{y}^-(\cdot;\, t_0, x_0))\ni\{0\}$, что противоречит (6). Полученное противоречие доказывает необходимость теоремы 3.

Достаточность. Согласно теореме 1 и лемме 7, нулевое решение д. вкл. (2) равномерно по t_0 W-устойчиво: $\forall\varepsilon$, $0<\varepsilon<\min\{\sigma, \sigma_1\}$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$, $\forall t_0\in R$, $\forall x_0\in m_W^\delta(t_0)$, для любого решения $y(\cdot;\, t_0, x_0)$ д. вкл. (2), $\forall t\geqslant t_0$ $y(t;\, t_0, x_0)\in S_\varepsilon$. Из условия в) вытекает, что $\forall t\geqslant t_0$ $y(t;\, t_0, x_0)\in m_W^\varepsilon(t)$. Покажем, что $y(t;\, t_0, x_0)\to 0$, $t\to+\infty$. Если $x_0=0$, то это очевидно. Если $x_0\neq 0$, то рассмотрим $\Omega_s^*(y(\cdot;\, t_0, x_0))$, $s\in[0, L]$. Когда $\Omega_s^*(y(\cdot;\, t_0, x_0))=\{0\}$ для всех $s\in[0, L]$, то по лемме 5 $\Omega(y(\cdot;\, t_0, x_0))=\{0\}$, а в силу леммы 3 $y(t;\, t_0, x_0)\to 0$, $t\to+\infty$. Если $\exists s\in[0, L]$, $\exists x^*\neq 0$, $x^*\in\Omega_s^*(y(\cdot;\, t_0, x_0))$, то, согласно лемме 2, существует траектория $\hat{y}^\infty(R;\, t_0+s, x^*)$, для которой $W(t, \hat{y}^\infty(t;\, t_0, x^*))=W(t_0+s, x^*)$ и $\hat{y}^\infty(t;\, t_0+s, x^*)\in\bar{S}_\varepsilon$ при всех $t\in R$. Так как $x^*\in\Omega_s^*(y(\cdot;\, t_0, x_0))$, то существует последовательность $t_n=t_0+s+N(n)L$, удовлетворяющая условию $y(t_n;\, t_0, x_0)\to x^*$, $n\to+\infty$. Поэтому $W(t_n, y(t_n, t_0, x_0))=$ $=W(t_0+s,\ y(t_n;\, t_0, x_0))\to W(t_0+s, x^*)$, $n\to+\infty$. Отсюда следует $W(t_0+s, x^*)=0$, поэтому $\hat{y}^\infty(t;\, t_0+s, x^*)\in\bar{m}^\varepsilon(t)\subset m^{\sigma_1}(t)$ при всех $t\in R$, что не совместимо с условием теоремы 3. Значит, этот случай невозможен. Теорема доказана.

Полагая в теоремах 2 и 3 $V(t, x)\equiv 0$, $W(t, x)\equiv 0$, приходим к следующим утверждениям.

Следствие 1. *При выполнении условия а) из асимптотической устойчивости нулевого решения д. вкл. (2) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения д. вкл. (1).*

Следствие 2. *Для равномерной по t_0 асимптотической устойчивости нулевого решения д. вкл. (2) необходимо и достаточно, чтобы существовало $\sigma>0$ такое, что д. вкл. (2) не имело бы решений $y^-(\cdot; t_0, x_0)$, отличных от тривиального, удовлетворяющих условию $y^-(]-\infty, t_0]; t_0, x_0)\subset S_\sigma$.*

Определения. 12. Нулевое решение д. вкл. (1) называется глобально асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для любого решения $x(\cdot; t_0, x_0)$ д. вкл. (1) имеем $x(t; t_0, x_0)\to 0$, $t\to+\infty$.

Аналогично следствию 2 доказывается

Теорема 4. *Для глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения д. вкл. (2) необходимо и достаточно, чтобы все положительные полутраектории д. вкл. (2) были бы ограничены и не существовало бы ограниченных траекторий этого включения, отличных от точки $x=0$.*

Условие г). Существует $\sigma>0$, существует непрерывно дифференцируемая, L-периодическая по t функция $W: R\times R^n\to[0, +\infty[$, $W(t, 0)\equiv 0$, такая, что $\forall(t, x)\in R\times\bar{S}_\sigma$

$$\dot W(t, x)=\sup_{a\in G(t,x)}\left(\frac{\partial W(t, x)}{\partial t}+\left\langle\frac{\partial W(t, x)}{\partial x}, a\right\rangle\right)\leqslant 0.$$

Определим множество $M^\sigma_W(t)=\{x\in\bar{S}_\sigma \mid \dot W(t, x)=0\}$.

Теорема 5. *Если выполнены условия а), г) и существует $\sigma_1>0$ такое, что д. вкл. (2) не имеет решений $\hat y^-(\cdot; t_0, x_0)$, отличных от тривиального, удовлетворяющих условию $\hat y^-(t; t_0, x_0)\in M^{\sigma_1}_W(t)$ при всех $t\in]-\infty, t_0]$, то нулевое решение д. вкл. (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Предположим, что $\forall\sigma_2$, $0<\sigma_2<\min\{\sigma, \sigma_1\}$, существует решение $\hat y^-(\cdot; t_0, x_0)$ д. вкл. (2), отличное от тривиального, такое, что $W(t, \hat y^-(t; t_0, x_0))=W(t_0, x_0)$ и $\hat y^-(t; t_0, x_0)\in S_{\sigma_2}$ при всех $t\in]-\infty, t_0]$.

Пусть K — множество точек t, в которых не существует $\dot{\hat y}^-(\cdot; t_0, x_0)$. Тогда $\forall t\in]-\infty, t_0]\setminus K$ $\frac{d}{dt}W(t, \hat y^-(t; t_0, x_0))=0$, т. е. $\forall t\in]-\infty, t_0]\setminus K$ $\hat y^-(t; t_0, x_0)\in M^{\sigma_2}_W(t)$. Пусть теперь $t'\in K$. Покажем, что $x'=\hat y^-(t'; t_0, x_0)\in M^{\sigma_2}_W(t')$. Возьмем последовательность $(t_n, x_n)\to(t', x')$, $n\to+\infty$, такую, что $x_n=\hat y^-(t_n; t_0, x_0)$ и производная $\dot{\hat y}^-$ существует в каждой точке t_n. Выше доказано, что $\dot W(t_n, x_n)=0$. Так как функция W непрерывно дифференцируема, а отображение G β-непрерывно, то $\dot W(t', x')=0$, т. е. $x'\in M^{\sigma_2}_W(t')$.

Таким образом, $\forall t\in]-\infty, t_0]$ $\hat y^-(t; t_0, x_0)\in M^{\sigma_2}_W(t)$, что противоречит условиям теоремы 5. Полученное противоречие показывает, что выполнены условия, сформулированные в теоремах 1, 2. Кроме того, из условия г) следует, что для любого решения y д. вкл. (2) функция $t\to W(t, y(t))$ не возрастает до тех пор, пока $y(t)\in\bar{S}_\sigma$. Согласно теореме 2, нулевое решение д. вкл. (2) асимптотически устойчиво. Теперь требуемое утверждение следует из следствия 1.

Замечания. 2. Лемма 1 является обобщением леммы 4 [5, с. 99] на более широкий класс дифференциальных включений, а также обобщает аналогичное утверждение для периодических дифференциальных систем из [7, с. 361—362].

3. Лемма 2 является аналогом леммы 1 [1, с. 40—41].

4. Теоремы 1—5 и следствия из них не только обобщают аналогичные утверждения из [1, с. 37—52], но примененные к дифференциальным системам являются некоторым их усилением.

5. Условия, при которых решения дифференциальных включений устойчивы или обладают другими устойчиво-подобными свойствами, установлены в [5, 6, 8, 9]. Основное же отличие результатов статьи состоит в том, что для исследования устойчивости используются знакопостоянные функции Ляпунова.

6. Эффективность применения знакопостоянных функций Ляпунова для исследования устойчивости дифференциальных систем на примерах показана в [1].

П р и м е р. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1^4 + G(t), \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 x_2 - x_2^3 + \frac{x_1}{|t|+1}, \end{aligned} \tag{7}$$

где измеримое управление $G(t)$ удовлетворяет условию $|G(t)| \leqslant \leqslant |x_2(t)|$. Перейдем к дифференциальному включению, соответствующему системе (7) [5, с. 45], $\dot{x} \in F(t, x)$, $x = (x_1, x_2)$, где

$$F(t, x) = \left\{(c, b) \in R \times R \,\middle|\, \begin{matrix} c \in [-x_1^3 + x_1^4 - |x_2|, \ -x_1^3 + x_1^4 + |x_2|] \\ b = -x_1^2 x_2 - x_2^3 + x_1/(|t| + 1) \end{matrix} \right\}.$$

Возьмем функцию $W = x_2^2$ и многозначное отображение $G: R^2 \to \to \operatorname{conv}(R^2)$, $G(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} F(t, x)$. Отображение G удовлетворяет условиям а) и г), так как $\dot{W}(x) = -2x_1^2 x_2^2 - 2x_2^4 \leqslant 0$. Пусть $0 < \sigma < 1$, тогда $M_W^\sigma = \{(x_1, x_2)\} \mid |x_1| \leqslant \sigma, \ x_2 = 0\}$. На множестве M_W^σ д. вкл. $\dot{x} \in G(x)$ имеет вид $\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1^4$. Легко проверить, что условия теоремы 5 выполняются. Согласно теореме 5, нулевое решение д. вкл. $\dot{x} \in F(t, x)$, а следовательно, и системы (7) асимптотически устойчиво.

Литература

1. Б у л г а к о в Н. Г. *Знакопостоянные функции в теории устойчивости.* Минск, 1984.

2. Б а р б а ш и н Е. А., К р а с о в с к и й Н. Н. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 3. С. 453—456.

3. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

4. Ш е с т а к о в А. А. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2069—2097.

5. Ф и л и п п о в А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М., 1985.

6. Ф и л и п п о в А. Ф. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 6. С. 1018—1027.

7. Л а С а л л ь Ж. Критерий асимптотической устойчивости // Гидродинамическая неустойчивость. М., 1964. С. 352—362.

8. С и б и р с к и й К. С., Ш у б е А. С. Полудинамические системы. Кишинев, 1987.

9. Г е л и г А. Х., Л е о н о в Г. А., Я к у б о в и ч В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 4 февраля 1987 г.