Якасная тэорыя дыферэнцыяльных ураўненняў

УДК 517.925/926+517.938

Л.В. Детченя, А.П. Садовский, Т.В. Щеглова

ОБРАТИМЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. I

В работе рассмотрены системы, представленные в статье Г. Жолондека «The classification of reversible cubic systems with center» 1994 г. Список Г. Жолондека содержит 17 обратимых систем с центром в точке (x_0, y_0). Цель работы – указать преобразования, приводящие системы Г. Жолондека к каноническому виду, т.е. к эквивалентной системе с центром в $O(0,0)$, а также в терминах полиномиальных идеалов и многообразий представить соответствующие условия центра. В первой части статьи рассмотрены обратимые системы Г. Жолондека $CR_5^{(8)}$, $CR_7^{(9)}$, $CR_8^{(10)}$, $CR_9^{(10)}$, $CR_{10}^{(10)}$, $CR_{11}^{(7)}$, $CR_{13}^{(7)}$, $CR_{15}^{(10)}$, $CR_{16}^{(5)}$. Эти системы приведены к системе с инвариантной прямой вида $\dot{x} = (1+Gx)(y + Hx^2 + Dxy + Ry^2)$, $\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$ с центром в начале координат. В каждом случае приведение системы Г. Жолондека к кубической системе с инвариантной прямой осуществляется при помощи линейной замены переменных. Введенные параметры и коэффициенты линейных преобразований однозначно находятся из систем алгебраических уравнений, представленных в настоящей работе. Оставшиеся восемь классов обратимых систем из списка Г. Жолондека будут рассмотрены в следующем номере в работе «Обратимые кубические системы. II». Полученные результаты могут быть использованы при качественном исследовании двумерных автономных систем, имеющих особую точку типа центра или фокуса.

Ключевые слова: кубическая система, многообразие центра, проблема центра и фокуса, рационально-обратимая система, центр.

Введение. Рассмотрим систему

$$\frac{du}{dt} = r(u,v), \quad \frac{dv}{dt} = w(u,v), \tag{1}$$

где $r(u,v)$, $w(u,v)$ – полиномы.

Отображение

$$\Phi: \quad u = f(x,y)/d(x,y), \quad v = g(x,y)/h(x,y), \tag{2}$$

необратимо в точках кривой $\Delta(x,y) = 0$, где

$$\Delta(x,y) = (dh)^2(u'_x v'_y - u'_y v'_x) = fh(g'_x d'_y - d'_x g'_y) + dh(f'_x g'_y - g'_x f'_y) +$$
$$+ fg(d'_x h'_y - h'_x d'_y) + dg(h'_x f'_y - f'_x h'_y).$$

Отображение Ф приводит (1) к системе

$$\frac{dx}{dt} = p_1(x,y)/\Delta(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = q_1(x,y)/\Delta(x,y), \tag{3}$$

где

$$p_1(x,y) = h^2 w(u,v)(fd'_y - df'_y) + d^2 r(u,v)(hg'_y - gh'_y),$$
$$q_1(x,y) = -h^2 w(u,v)(fd'_x - df'_x) - d^2 r(u,v)(hg'_x - gh'_x).$$

При этом

$$p_1(x,y) = \tilde{p}(x,y)/(d^{k_1}h^{l_1}), \quad q_1(x,y) = \tilde{q}(x,y)/(d^{k_2}h^{l_2}),$$

Детченя Людмила Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа и дифференциальных уравнений ГрГУ им. Янки Купалы (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь; e-mail: detchenya_lv@mail.ru

Садовский Антон Павлович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь; e-mail: sadovskii@bsu.by

Щеглова Татьяна Витальевна, ст. преподаватель каф. аналитической экономики и эконометрики БГУ (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: ул. К. Маркса, 31, 220030, г. Минск, Беларусь; e-mail: shcheglovskaya@tut.by

где $\tilde{p}(x,y)$, $\tilde{q}(x,y)$ – полиномы.

Пусть $k=\max\{k_1,k_2\}$, $l=\max\{l_1,l_2\}$. Тогда возникают полиномы

$$P(x,y)=\tilde{p}(x,y)d^k h^l,\quad Q(x,y)=\tilde{q}(x,y)d^k h^l.$$

Пусть точка $M(a,b)$ принадлежит кривой $\Delta(x,y)=0$, т.е. $\Delta(a,b)=0$, и является особой точкой системы

$$\frac{dx}{d\tau}=P(x,y),\quad \frac{dy}{d\tau}=Q(x,y). \tag{4}$$

Тогда $P(a,b)=Q(a,b)=0$. В этом случае

$$P'_x(a,b)+Q'_y(a,b)=0.$$

Если при этом $|r(u_0,v_0)|+|w(u_0,v_0)|\neq 0$, где $(u_0,v_0)=\Phi(a,b)$, то $M(a,b)$ – центр системы (4).

Определение 1. Центр $M(a,b)$ системы (4) называется рационально-обратимым, если существуют полиномы $r(u,v)$, $w(u,v)$ с $|r(u_0,v_0)|+|w(u_0,v_0)|\neq 0$ и замена (2), которая преобразует уравнение

$$w(u,v)du-r(u,v)dv=0$$

к уравнению

$$Q(x,y)dx-P(x,y)dy=0.$$

Пусть

$$\dot{x}=a_1x+a_2y+p_1(x,y),\quad \dot{y}=b_1x-a_1y+p_2(x,y). \tag{5}$$

Замена

$$u=c_0x,\quad v=a_1x+a_2y,$$

где $c_0{}^2+a_2b_1+a_1{}^2=0$, приводит систему (5) к системе

$$\dot{u}=c_0v+\ldots,\quad \dot{v}=-c_0u+\ldots. \tag{6}$$

Таким образом, систему (4) заменой

$$dt=\beta d\tau,\quad \beta\neq 0,\quad x=a_0+a_1u,\ y=b_0+b_1u+b_2v$$

можно привести к виду

$$\dot{u}=v+\ldots,\quad \dot{v}=-u+\ldots.$$

Лемма 1. *Заменой*

$$x=c_1u+d_1v,\quad y=c_2u+d_2v$$

система

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y+a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x^3+a_5x^2y+a_6xy^2+a_7y^3,\\ \dot{y}&=-x+b_1x^2+b_2xy+b_3y^2+b_4x^3+b_5x^2y+b_6xy^2+b_7y^3\end{aligned} \tag{7}$$

приводится к системе

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v+\tilde{a}_1u^2+\tilde{a}_2uv+\tilde{a}_3v^2+\tilde{a}_4u^3+\tilde{a}_5u^2v+\tilde{a}_6uv^2,\\ \dot{v}&=-u+\tilde{b}_1u^2+\tilde{b}_2uv+\tilde{b}_3v^2+\tilde{b}_4u^3+\tilde{b}_5u^2v+\tilde{b}_6uv^2+\tilde{b}_7v^3.\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство очевидно.

Различные частные случаи обратимых систем рассматривались в работах [1–4]. В работах [5; 6] Г. Жолондека представлены 17 классов обратимых кубических систем с центром в (x_0,y_0). Цель данной работы – указать преобразования, приводящие системы Г. Жолондека к каноническому виду, т.е. к эквивалентной системе с центром в $O(0,0)$, а также в терминах полиномиальных идеалов и многообразий [7; 8] представить соответствующие условия центра.

В первой части статьи будут рассмотрены обратимые системы Жолондека $CR_5^{(8)}$, $CR_7^{(9)}$, $CR_8^{(10)}$, $CR_9^{(10)}$, $CR_{10}^{(10)}$, $CR_{11}^{(7)}$, $CR_{13}^{(7)}$, $CR_{15}^{(10)}$, $CR_{16}^{(5)}$ из [5; 6].

Будет показано, что эти системы можно привести к каноническому виду

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(1+Gx)(y+Hx^2+Dxy+Ry^2),\\ \dot{y}&=-x+Ax^2+3Bxy+Cy^2+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2+Ny^3,\end{aligned} \tag{9}$$

где $A,B,C,D,H,G,K,L,M,N,R\in\mathbb{C}$.

Система (9) является системой вида (8) с инвариантной прямой $1+Gx=0$. Отметим также, что в случаях систем $CR_5^{(8)}$, $CR_7^{(9)}$, $CR_8^{(10)}$ в приведенной системе (9) будет выполняться условие $N=R=0$. Отметим, что системы $CR_5^{(8)}$, $CR_7^{(9)}$, $CR_8^{(10)}$ ранее рассматривались в [9].

Основная часть

Обратимая система Жолондека $CR_5^{(8)}$ имеет вид [6]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x[l+p+mcx+(k+n)xy+mx^2+qTx],\\ \dot{y}&=-kxy^2-l+mx^2y-(nxy+p+qTx)(2x+y+c),\\ T&=x+y+c.\end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) получается из системы

$$\dot{u}=u(k_1u+l_1v+m_1uv),\quad \dot{v}=v(k_1u+l_1v+n_1uv+p_1v^2+q_1uv^2)$$

при помощи замены

$$u=x(x+y+c_1),\quad v=(x+y+c_1)/y.$$

Заменяя далее

$$x\to a_0+a_1x,\quad y\to b_0+b_1x+b_2y,$$

получаем кубическую систему в каноническом виде с коэффициентами, зависящими от параметров k_1, l_1, m_1, n_1, p_1, q_1, c_1, a_0, a_1, b_0, b_1, b_2.

Из системы уравнений

$$\begin{gathered}2a_0+c_1=0,\quad 4(l_1+p_1)-c_1(c_1(m_1+q_1)+2b_0(k_1+n_1+q_1))=0,\\ 2a_1b_0-b_1c_1=0,\quad 2a_1b_1c_1^2(k_1+m_1)-a_1^2(8l_1-2c_1^2m_1)-\\ -b_2^2c_1^2(k_1+n_1+q_1)=0,\quad k_1-k_2+n_1+q_1=0\end{gathered}$$

находим a_0, p_1, b_0, l_1, k_1.

Далее из системы

$$\begin{gathered}A=0,\quad 2a_1-c_1C=0,\quad C+D=0,\quad C+G=0,\\ C^2+M=0,\quad c_1C^3(m_1-2n_1-3q_1)-6k_2(b_1C^2+b_2L)=0,\\ c_1C^3(m_1-2n_1-3q_1)-6k_2(b_1C^2+b_2L)=0,\quad C(3B-H)+3L=0,\\ c_1^2C^4n_1-3b_2k_2BC(4b_1+c_1C)+2k_2(C(2b_1C(2b_1+c_1C)+b_2(4b_1+c_1C)H)-2b_2^2K)=0\end{gathered}$$

определяем A, a_1, D, G, M, m_1, q_1, L, n_1.

Введем вектор $w=(A,B,C,D,G,H,K,L,M)$ и идеал

$$J_1=\langle A,C(3B-H)+3L,C^2+M,C+D,C+G\rangle.$$

Из приведенных рассуждений вытекает

Предложение 1. Система Жолондека $CR_5^{(8)}$ приводится к каноническому виду

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(1+Gx)(y+Hx^2+Dxy),\\ \dot{y}&=-x+Ax^2+3Bxy+Cy^2+Kx^3+3Lx^2y+Mxy^2,\end{aligned} \tag{11}$$

где $w\in V(J_1)$.

Обратимая система Жолондека $CR_7^{(9)}$ имеет вид [6]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x[-(n+k)+(l-m)xy-(l+p)xT],\\ \dot{y}&=nx+ky+nT+(m-l)x^2y+px^2T+mxyT+pxT^2,\\ T&=x+y+c.\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогичная предыдущему случаю, замена переменных приводит систему

$$\dot{u}=u(k_1+l_1u),\quad \dot{v}=v(k_1+m_1u+n_1v+p_1uv)$$

к системе (12).

После замены переменных

$$x \to a_0 + a_1 x, \quad y \to b_0 + b_1 x + b_2 y$$

приведенная система принимает канонический вид (11).

Значения параметров a_0, k_1, b_1, l_1, m_1 находим из системы уравнений

$$2a_0 + c_1 = 0, 4k_1 + 4n_1 - c_1(c_1(l_1 + p_1) + 2b_0(m_1 + p_1)) = 0, 2a_1 b_0 - b_1 c_1 = 0,$$
$$b_2^2 c_1^2 (m_1 + p_1) - a_1^2 (8n_1 - 2c_1(c_1 p_1 - 2b_0(l_1 - m_1 - p_1))) = 0, m_1 + p_1 - m_2 = 0,$$

а значения A, a_1, D, G, M, p_1, n_1, L из системы

$$A = 0, 2a_1 - c_1 C = 0, C + D = 0, C + G = 0, C^2 + M = 0, C^2((2b_0 + c_1)^2 m_2 + 4n_1) +$$
$$+C^2(c_1^2 p_1 - 4(b_0^2 m_2 + n_1)) + 6b_0 b_2 m_2 B - 3b_2(2b_0 + c_1)m_2 B + 2b_2 c_1 m_2 H = 0,$$
$$(3B - H) + 3L = 0, (2b_0 + c_1)C^2(3b_2 B - (2b_0 + c_1)C^2 - 2b_2 H) + 2b_2^2 K = 0.$$

Предложение 2. Система Жолондека $CR_7^{(9)}$ приводится к каноническому виду (11), где $w \in V(J_1)$.

Обратимая система Жолондека $CR_8^{(10)}$ имеет вид [6]

$$\begin{gathered} \dot{x} = x[-k - 2nT + 2(l - m)xy - lxT], \\ \dot{y} = 2ky + nxT + nT^2 + (m - l)x^2 y + mxyT, \\ T = x + y + c. \end{gathered} \tag{13}$$

Система (13) получается из системы

$$\dot{u} = u(k_1 + l_1 u), \quad \dot{v} = 2v(k_1 + m_1 u + n_1 v)$$

после замены

$$u = x(x + y + c_1), \quad v = (x + y + c_1)^2 / y.$$

Далее преобразование переменных $x \to a_0 + a_1 x$, $y \to b_0 + b_1 x + b_2 y$ приводит систему к каноническому виду (11). При этом значения b_0, k_1, l_1, c_1, n_1 определяются из системы уравнений

$$2a_0 - b_0 + c_1 = 0, k_1 - a_0^2 l_1 + 2a_0(2a_0 + c_1)m_1 + 2(3a_0 + 2c_1)n_1 = 0,$$
$$a_0 b_1 l_1 - 2(a_0(2a_1 + b_1) + a_1 c_1)m_1 - 2(a_1 + b_1)n_1 = 0, a_0((2a_1 - b_1)(4a_1 + b_1) - b_2^2) +$$
$$+2a_1(2a_1 - b_1)c_1 = 0, a_0^2(2a_1 - b_1)b_2^2(a_0(b_1^2 + b_2^2 - 2a_1 b_1)m_1 - 2a_1(2a_1 - b_1)n_1) - n_2 = 0,$$

а значения a_1, n_2, M, a_0, K, b_2 из системы

$$a_1 - a_0 G = 0, 2a_0^3 b_1 b_2^2 G^2 m_1 (b_1 - 2a_0 G)^2 + n_2 M = 0, G^2 + CG - DG - M = 0,$$
$$a_0 G(C + G) - b_1(C - D + G) - A(b_1 - 2a_0 G) = 0, G(2A + C + G)(C - D + G) \times$$
$$\times(3A + 2C - D + 2G) - (5G^2 + (C - 2D)(2A + C - D) + (8A + 6C - 5D)G)K = 0,$$
$$b_2(A + C + G)(2A + C + G)(C - D + G) + b_1(5G^2 + (C - 2D)(2A + C - D) +$$
$$+(8A + 6C - 5D)G)H = 0.$$

Полагая

$$J_2 = \langle 3B(A + C + G) + (2A - D)H, (2A + C + G)((A + C + G)^2 \times$$
$$\times(C - D + G) - H^2(2A + C - D + G)) - 2(A + C + G)^2 K, G(4A + 2C -$$
$$-D + 2G)H + 3(A + C + G)L, G(C - D + G) - M, (C + G)^2(A + C + G)^2 -$$
$$-H^2(2A(C + 4G) + (C + G)(C + 5G)) - D((A + C + G)^2(3C - 2D +$$
$$+3G) - H^2(4A + 3C - 2D + 5G)), 1 - (A + C + G)t\rangle \bigcap \mathbb{C}[w],$$

имеем

Предложение 3. Система Жолондека $CR_8^{(10)}$ приводится к каноническому виду (11), где $w \in V(J_2)$.

Обратимая система Жолондека $CR_{10}^{(10)}$ имеет вид [6]

$$\begin{gathered} \dot{x} = x[-k + 3(l - m)xy - lxT - 3nT^2], \\ \dot{y} = 3[ky + nxT^2 + (m - l)x^2 y + mxyT + nT^3], \\ T = x + y + c. \end{gathered} \tag{14}$$

Замена переменных

$$u = (x + y + c_1)/x, \quad v = (x + y + c_1)^3 / y$$

приводит систему

$$\dot{u} = u(k_1 + l_1 u), \quad \dot{v} = 3v(k_1 + m_1 u + n_1 v)$$

к виду (14).

Используя далее подстановку

$$x \to a_0 + a_1 x, \quad y \to b_0 + b_1 x + b_2 y,$$

получаем систему (14), записанную в каноническом виде (9).

Из системы

$$2b_0 - 2a_0 - c_1 = 0, 4k_1 - 4a_0^2 l_1 + (12a_0^2 + 6a_0 c_1)m_1 + (48a_0^2 +$$
$$+72a_0 c_1 + 27c_1^2)n_1 = 0, 4a_0 b_1 l_1 - 3(2a_0(a_1 + b_1) + a_1 c_1)m_1 - 6(a_1 + b_1) \times$$
$$\times(4a_0 + 3c_1)n_1 = 0, a_0(2(a_1 - b_1)(3a_1 + b_1) - 2b_2^2) + 3a_1(a_1 - b_1)c_1 = 0,$$
$$a_1 - a_2 - b_1 = 0, (a_2 b_1 - b_2^2)m_1 - m_2 + 6(a_2^2 + 2a_2 b_1 - b_2^2)n_1 = 0$$

находим значения b_0, k_1, l_1, c_1, a_1, m_1, а из системы

$$a_2 + b_1 - a_0 G = 0, 3a_2 b_2 n_1 G(a_2 - a_0 G) - a_0 m_2 N = 0, N + GR = 0,$$
$$2(2a_2^2 + b_2^2)R - a_2(b_2 G - b_2 D + 8a_0 GR) = 0, a_2(D + G - 2A) + b_2(3B - 2R) = 0$$

значения b_1, n_1, N, a_0, b_2.

Введем вектор $\tilde{w} = (A, B, C, D, H, G, K, L, M, N, R)$ и идеал

$$J_3 = \langle N + GR, G(2C - 3D + 3G) - 2M, BG - GH - L, 2(5C + 9G)KR +$$
$$+G(4R^2 H + 3(D - G)(2BG - 2BD + CH + 3GH) - (D^2 + 2DG + 5G(2C +$$
$$+3G) + 2A(5C + D + 8G) - 36BH)R), 128R^6(20A^2 - 2A(D - 16G) +$$
$$+25D(D - 3G)) + 9B^2(2A - D - G)(D - G)^4 G - 192R^5 B(50A^2 + 73D^2 +$$
$$+32G^2 + 3AD + 37AG - 195DG) - 24R^3 B(D - G)(9D^3 + 8G^3 - 23G^2 D +$$
$$+9B^2(41D - 59G) + 26D^2 G - A^2(24D - 44G) + 2A(153B^2 - 9D^2 - 13G^2 +$$
$$+2DG)) - 4R^2(D - G)^2(8A^3(D - G) - 2D^2(D - G)(D + G) + 4A^2(27B^2 -$$
$$-4D^2 + G^2 + 3DG) - 27B^2(D^2 - 2G^2 + 7DG) + 2A(27B^2(2D - G) + D(D -$$
$$-G)(5D + 3G))) + 16R^4(40A^3(D - G) - 2D(D - G)G(D + 9G) + 9B^2(137D^2 +$$
$$+123G^2 - 340DG) + 4A^2(135B^2 - (D - G)(18D + 7G)) + A(36B^2(11D - 6G) +$$
$$+2(D - G)(11D^2 + 4G^2 + 25DG))) - 6B(D - G)^3(4A^2(D - 2G) + A(4G^2 -$$
$$-18B^2 - 4D^2 + 8DG) - (D - 3G)(9B^2 - D(D + G)))R - 16R^2 H(D - G - 10R) \times$$
$$\times(3B - 2R)^3(D - G + 10R), 9B^2(2A - D - G)(G - D)^3 G + 480R^5 B(4(A + D) +$$
$$+19G) + 2R^2(D - G)((2A - D)(4D^3 + 12(9B^2 - D^2)A + 8A^2 D + 189B^2 D) + G^2 \times$$
$$\times(8A^2 + 81B^2 + 4D^2 - 12AD) - 2A(8A^2 + 189B^2 + 4D^2 - 12AD)G) + 160R^6(2A -$$
$$-5(D + 3G)) - 8R^4(24A^2(D - G) + 45B^2(D + 31G) + (D - G)(29D^2 + 3G^2 +$$
$$+28DG) + 2A(495B^2 - 7(D - G)(5D + G))) + 72R^3 B(15B^2(4G - D) + (D - G) \times$$
$$\times(8D^2 - G^2 + 5DG) + 2A(45B^2 - 2(4D^2 + G^2 - 5DG))) + 6B(D - G)^2(4A^2(D -$$

$$-2G)+A(4G^2-18B^2-4D^2+8DG)+D(9B^2+(D-3G)(D+G)))R-2C(D-$$
$$-G-10R)(3B-2R)^3R(D-G+10R),\ 256R^6A+9B^2(D-G)^2G(2A-D-G)^2-$$
$$-384R^5B(2A+D+G)+48R^3B(20A^3-4A^2D+A(36B^2-5D^2+3G^2-50DG)+$$
$$+(D+G)(D^2-54B^2-4G^2+21DG))-32R^4(8A^3+4A^2G-4A(D^2+G^2+$$
$$+6DG)-(D+G)(54B^2-D(D+9G)))-4R^2(16A^4(D-G)+8A^3(27B^2-5D^2+$$
$$+2G^2+3DG)-4A^2(G^3-9D^3+7G^2D+D^2G+9B^2(D+3G))-(D+G)(324B^4-$$
$$-2D^2(D-G)(D+G)+9B^2(D^2+15G^2-32DG))+2A(162B^4-D(D-G)(D+$$
$$+G)(7D+3G)-9B^2(D^2-15G^2+34DG)))-6B(2A-D-G)(D-G)(9B^2\times$$
$$\times(7G-D)+4A^2(D-2G)+D(D-3G)(D+G)+A(4G^2-18B^2-4D^2+8DG))R,$$
$$1-t(D-G-10R)R(3B-2R)(D-G+10R)(45B^2(D+G-2A)(D-G)^3G+$$
$$+(54B^3(5D+9G-10A)(D-G)^2+30B(2A-D-G)(D-G)^2(2AD-D^2-$$
$$-4AG+3DG))R+(40(A-D)(2A-D)(2A-D-G)(D-G)^2+54B^2(D-G)\times$$
$$\times(40A^2+50AD-35D^2-70AD-18DG+33G^2))R^2+(5400B^3(6A-D-5G)+$$
$$+144B(D-G)(20D^2-40AD+10AG+17DG-7G^2))R^3+(1800B^2(23G-22A-$$
$$-D)-8(D-G)(120A^2-350AD+145D^2-70AG-3G^2+158DG))R^4+$$
$$+9600B(A+D-2G)R^5+800(2A-5D+3G)R^6\rangle\bigcap\mathbb{C}[\tilde{w}].$$

Предложение 4. Система Жолондека $CR_{10}^{(10)}$ приводится к каноническому виду (9), где $\tilde{w}\in V(J_3)$.

Обратимая система Жолондека $CR_{11}^{(7)}$ имеет вид [6]

$$\begin{gathered}\dot{x}=2x[-(p+k)x+(l-n)y^2+(m-l-q)yT-(m+r)T^2],\\ \dot{y}=2px^2-kxy-pxT+2(n-l)xy^2+2(q-m)xyT-ny^2T+2rxT^2-qyT^2-rT^3,\\ T=x+y+c.\end{gathered}\tag{15}$$

Последовательные замены

$$u=(x+y+c_1)^2/x,\quad v=(x+y+c_1)/y,$$
$$x\to a_0+a_1x,\quad y\to b_0+b_1x+b_2y$$

приводят систему

$$\dot{u}=2u(l_1u+k_1v+m_1uv),\quad \dot{v}=v(n_1u+k_1v+q_1uv+p_1v^2+r_1uv^2)$$

сначала к виду (15), далее к каноническому виду (9), где значения a_0, k_1, b_0, p_1, l_1 определяются из системы уравнений

$$a_0-c_1=0,\ c_1k_1+2b_0c_1l_1+2c_1(b_0+2c_1)m_1+b_0^2n_1+c_1p_1+b_0(b_0+2c_1)q_1+$$
$$+(b_0+2c_1)^2r_1=0,\ a_1b_0-2b_1c_1=0,\ 4a_1^2b_1c_1(m_1-q_1-2r_1)+8b_1b_2^2c_1(n_1+q_1+r_1)-$$
$$-a_1^3(p_1+4c_1r_1)+4a_1c_1(b_1^2(l_1+m_1-n_1-q_1-r_1)+b_2^2(l_1+m_1+q_1+2r_1))=0,$$
$$l_2-2b_1(n_1+q_1+r_1)-a_1(l_1+m_1+q_1+2r_1)=0,$$

а значения a_1, A, D, G, r_1, N, n_1, m_1, q_1, L из системы

$$a_1+Ac_1=0,\ A+2C=0,\ C-D=0,\ 2C-G=0,\ b_2C^2(n_1+q_1+r_1)-12N=0,$$
$$N-CR=0,\ b_2(2C^2l_2+2c_1C^3(2n_1+q_1)-l_2M)-3l_2C(b_1+2c_1C)R=0,\ b_2(2c_1C^3l_2-$$
$$-2c_1^2C^4(4m_1-q_1)+3b_2l_2L+2b_1b_2(C^2-M)-c_1l_2CM)-l_2C(b_1+c_1C)(b_1+2c_1C)R=0,$$
$$C(3B+H)-3L=0,\ b_2(2b_2c_1C^2H+b_1b_2CH-2b_1^2C^2-8b_1c_1C^3-8c_1^2C^4-$$

$$J_4=\langle A+2C,C-D,2C-G,C(3B+H)-3L,N-CR\rangle.$$

Предложение 5. Система Жолондека $CR_{11}^{(7)}$ приводится к каноническому виду (9), где $\tilde{w}\in V(J_4)$.

Обратимая система Жолондека $CR_{13}^{(10)}$ имеет вид [6]

$$\begin{gathered}\dot{x}=3x[-kx+2(l-m)y^2-lyT-2nxT],\\ \dot{y}=2[-kxy-my^2T+3(m-l)xy^2+3nx^2T-nxT^2],\\ T=x+y+c.\end{gathered}\tag{16}$$

Система

$$\dot{u}=3u(l_1u+k_1v),\quad \dot{v}=2v(m_1u+k_1v+n_1v^2)$$

при помощи замены

$$u=(x+y+c_1)^3/x,\quad v=(x+y+c_1)^2/y$$

приводится к виду (16), а подстановка

$$x\to a_0+a_1x,\quad y\to b_0+b_1x+b_2y$$

приводит полученную систему к виду (9).

Значения b_0, k_1, n_1, c_1, l_1 находим из системы уравнений

$$2a_0+b_0-c_1=0,\ 2c_1^2m_1-2a_0^2(3l_1-4m_1+n_1)+a_0(k_1+c_1(3l_1-8m_1+4n_1))=0,$$
$$a_0(2a_1+b_1)c_1(l_1-4m_1)+2a_1c_1^2m_1-a_0^2(4a_1l_1+5b_1l_1-8a_1m_1-8b_1m_1+2(a_1+b_1)n_1)=0,$$
$$a_0((2a_1+b_1)(4a_1+3b_1)+3b_2^2)-2a_1(2a_1+b_1)c_1=0,\ a_1(2a_1+b_1)((2a_1+b_1)^2+b_2^2)l_1-$$
$$-l_2+(2a_1b_1+b_1^2+b_2^2)((2a_1+b_1)(4a_1+3b_1)+3b_2^2)m_1=0,$$

а значения a_1, l_2, b_1, a_0 из системы

$$a_1-a_0G=0,\ 4b_2G^2m_1(b_1+a_0G)(b_1+2a_0G)^2-9l_2N=0,\ b_2(DG-3M)+$$
$$+(b_1+a_0G)(9N-5GR)=0,\ a_0G(5GR-9N)(3N^2(99CG+32DG-195M)+$$
$$+120G^2R^2(CG-M)-G(381CG+68DG-585M)NR)+b_2(5G^2R^2(4194N^2+$$
$$+(15CG+28DG-99M)(CG-M))+9N^2(234M^2+2106N^2+G^2(27C^2+$$
$$+21CD+16D(D+G))-3G(39(C+D)+16G)M)-4200G^3R^3N-$$
$$-G(2097M^2+34668N^2+G^2(270C^2+84D^2+357CD+$$
$$+80DG)-3G(537C+287D+80G)M)NR)=0.$$

Введем идеал

$$J_5=\langle(3CG+2G^2-9M)^2(6C(16G^3+9GM)-117C^2G^2-(8G^2-9M)^2)N^5-$$
$$-4374(3CG+2G^2-9M)(CG-3M)N^7-531441N^9-2G^2N^3R^2(1359C^4G^4+$$
$$+102C^3G^5+610C^2G^6+12366C^2G^2M^2+2106G^4M^2-5346G^2M^3+5103M^4+$$
$$+885735N^4+224G^7C+7866G^3M^2C-12474M^3CG+18N^2(5G^2+21CG-$$
$$-36M)(16G^2+69CG-207M)-6354C^3G^3M-2622C^2G^4M-224G^6M-$$
$$-2761G^5CM)+18G^5R^5(1875N^4+100N^2(CG-M)^2+(CG-M)^4)+4G^3N^2R^3\times$$
$$\times(255150N^4+(CG-M)^2(891M^2+G^2(270C^2+122G^2+93CG)-9G(87C+$$
$$+65G)M)+N^2(29403M^2+G^2(8748C^2+200G^2+3135CG)-9G(3789C+$$
$$+565G)M))-3G^4R^4(97875N^4+10N^2(80G^2+411CG-801M)(CG-M)+$$
$$+(7G(9C+8G)-171M)(CG-M)^3)N+2N^4G(1431C^4G^4+64G^8+648G^4(9M^2+$$
$$+2N^2)+6561(M^2+9N^2)(M^2+13N^2)-1152G^6M+54C^2G^2(4G^4+252M^2+$$
$$+27N^2)-22G^2M)+54C^3(5G^5-141G^3M)-1458G^2(7M^3+27N^2M)+2CG\times$$

$$\times(272G^6+81G^2(53M^2+69N^2)-2016G^4M-2187(3M^3+25N^2M)))R,\ 243N^4+$$
$$+N^2(2G^2+3CG-9M)(3CG+4(D-G)G-3M)+3G^2R^2(25N^2-(CG-M)^2)-$$
$$-2G(135N^2+G(3C+6D-7G)(CG-M))NR,\ -3N^2(G(22G^2+9(C^2+2D^2+$$
$$+4CD)-6(7C+6D)G)-9(3D-2G)M+81HN)-R^2G((CG-M)(9M-(21C+$$
$$+6D-10G)G)+75GHN)+N(30D^2G^2-18C^2G^2+40G^4-27M^2-64G^3D+$$
$$+12G^2M-27DGM+6CG(9DG+9M-10G^2)+270GHN)R,\ G^2R^2(((9C+3D-$$
$$-5G)-3M)(CG-M)-225LN)+3N^2(27M^2-G^2(9C^2+3D^2+19G^2+27CD-$$
$$-33CG-30DG)-9G(3D+G)M-243LN)+2GN((5G^2-8DG+6M)(2G^2-$$
$$-3M)-9C^2G^2+9CG((D-G)G+2M)+405LN)R,\ R^2G(CG-M)(5AG-(3C+$$
$$+D-5G)G+6M)-3N^2(G(9C^2+3A(3C+4D-4G)-(3D-11G)(D-G)+$$
$$+3C(D+G))-3(3(A+C-D)+5G)M)+2(9M^2+G^2(9C^2+3CD+A(3C+10(D-$$
$$-G))-2(D-5G)(D-G))-3G(A+6C-D+2G)M)NR,\ 3N^2(G(16G^2+9C(4C+$$
$$+3D)-3(11C+8D)G)-9(6C-3D-G)M+243BN)+R^2G((G(12C-3D+5G)-$$
$$-18M)(CG-M)+225BGN)-2N(36C^2G^2+10G^4+27M^2-16G^3D+3CG(5(D-$$
$$-G)G-24M)+3G^2M+18DGM+405BGN)R,\ -2187N^4K+G^2R^2(-2025N^2K+$$
$$+((12C+3D-5G)G-6M)(DG-3M)(CG-M))-3N^2(DG-3M)(9M^2+G^2(7D^2+$$
$$+3G^2+9C(D-G)-6DG)-3G(8D-3G)M)+375G^3R^3KN+G(3645N^2K+(DG-$$
$$-3M)(2G^2(10G^2+9D(2C+D)-(21C+16D)G)-9M^2+3G(6C-11D+6G)M))NR,$$
$$1-tNG(9N-5GR)(4(D-G)GN+(CG-M)(3N+GR))(2G^2N-$$
$$-3M(3N-GR)+3CG(N-GR))\rangle\bigcap\mathbb{C}[\tilde{w}].$$

Предложение 6. Система Жолондека $CR_{13}^{(10)}$ приводится к каноническому виду (9), где $\tilde{w}\in V(J_5)$.

Обратимая система Жолондека $CR_{15}^{(10)}$ имеет вид [6]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(2y-T)(ky^2+lx)-4x(my+nT^2),\\ \dot{y}&=(4x-T)(my+nT^2)-2y(ky^2+lx),\\ T&=x+y+c.\end{aligned}\qquad(17)$$

Система (17) получается из системы

$$\dot{u}=u(k_1+l_1v^2),\quad \dot{v}=v^3(m_1+n_1v)$$

при помощи замены

$$u=(x+y+c_1)^4/x,\quad v=(x+y+c_1)^2/y.$$

Заменяя далее

$$x\to a_0+a_1x+a_2y,\quad y\to b_0+b_1x+b_2y,$$

получаем кубическую систему в каноническом виде (9).

Из системы уравнений

$$(3a_0-c_1)^2k_1+a_0l_1-(3a_0-c_1)m_1+4(a_0-c_1)^2n_1=0,\ 3a_0+b_0-c_1=0,\ a_2+b_2=0,$$
$$(3a_0-c_1)(a_1c_1-3a_0a_1-2a_0b_1)k_1+(3a_0a_1+a_0b_1-a_1c_1)m_1-4(a_0-c_1)(2a_0a_1+a_0b_1-$$
$$-a_1c_1)n_1=0,\ a_0(9a_1^2+9a_1b_1+2(b_1^2+b_2^2))-(a_1(3a_1+b_1)+2b_2^2)c_1=0,\ (3a_1b_1+b_1^2-$$
$$-2b_2^2)^2k_1+k_2-2(a_1+b_1)(3a_1+b_1)(3a_1^2+a_1b_1+2b_2^2)n_1=0$$

находим l_1, b_0, a_2, m_1, c_1, k_1, а из системы

$$3a_1^2+a_1b_1+2b_2^2-4a_0(3a_1+b_1)G=0,\ 4b_1(a_1+b_1)(3a_1+b_1)^2(a_1^2b_1(3a_1+$$
$$+b_1)^2-4a_1^2(3a_1+b_1)b_2^2-4(2a_1+b_1)b_2^4)n_1G+k_2((a_1+b_1)(3a_1b_1+b_1^2-2b_2^2)^2D-$$
$$-2b_1(3a_1+b_1)(a_1b_1(3a_1+b_1)-2(2a_1+b_1)b_2^2)G)=0,\ 5DG-2M=0,\ b_2DG-b_1N=0,$$
$$N-2GR=0,\ 4GH-3L=0,\ b_2D^6(C-2(D+G))(4D^2+8G^2+17DG-2C(D+4G))+$$
$$2048a_1R^8H-256R^7(a_1(4C^2+3D^2+32G^2+48H^2+4C(D-6G)-10DG)+4b_2\times$$
$$\times(2C+3(D-4G))H)+128R^6(16b_2H^2(5D-12G)-b_2(4C^2D+2C(D-8G)(3D-$$
$$-2G)-(D-4G)(D^2-32G^2+34DG))+6a_1(15D^2+64G^2+2C(D-4G)-52DG)\times$$
$$\times H)-32R^5(48a_1H^2(13D^2+96G^2-92DG)+3a_1(256G^3(D-C)-D^3(4C-$$
$$-17D)+16G^2(4C^2-10D^2+11CD)-2D(24C^2+17D^2-6CD)G)+16b_2D(4D^2-$$
$$-48G^2-9CD+16CG+19DG)H)-2D^3R^2(16b_2H^2D(7D+24G)+b_2(256G^4-$$
$$-96G^3(4C-5D)+D^2(40C^2+103D^2-118CD)+16G^2(8C^2-6D^2-11CD)-2D\times$$
$$\times(56C^2+121D^2-174CD)G)-12a_1D(22D^2+64G^2-11CD-40CG+96DG)H)+$$
$$+32R^4D(32b_2H^2(23DG-4D^2-24G^2)+b_2(16G^3(8C-13D)+D^2(C-2D)(12C+$$
$$+D)-16G^2(C-D)(2C+3D)+2D(4C^2+37D^2-12CD)G)+3a_1(512G^3-64G^2\times$$
$$\times(5C-2D)-D^2(52C-89D)+8(39C-64D)DG)H)-4D^2R^3(48a_1H^2D(7D+24G)+$$
$$+3a_1(256G^4-96G^3(4C-5D)+D^2(32C^2+71D^2-86CD)+8G^2(16C^2-17D^2-$$
$$-22CD)-2D(56C^2+157D^2-192CD)G)+4b_2(3D^2(22C-39D)-512G^3+64G^2\times$$
$$\times(5C-2D)-24(13C-20D)DG)H)-2D^5(3a_1(C-2(D+G))(-4D^2-8G^2-17DG+$$
$$+2C(D+4G))+2b_2(11(C-2D)D-64G^2+8(5C-12D)G)H)R=0$$

находим a_0, n_1, M, b_1, N, L, a_1.

Введем идеал

$$J_6=\langle D^4(C-2G)G(4D+G-2C)(3D+2G-2C)+192R^5G(C+D-4G)H+$$
$$+48R^3DG(10D^2-3C^2-24G^2+5CD+18CG-30DG)H-2D^2R^2(-G(8C^3-$$
$$-29D^3+64G^2D+4C^2(4D-9G)+80D^2G-288H^2G-2C(3D^2-8(G^2+9H^2)+$$
$$+31DG))-4((C+D)^2-16G^2)K)-8R^4(144H^2G(C+D-4G)+DG(4C^2+$$
$$+7D^2+32G^2+10CD-24CG-34DG)-4(3C+2(D-6G))(C+D-4G)K)-$$
$$-4D^3G(31CD-17C^2+D^2-40G^2+48CG-58DG)HR,\ 8R^4(3C+2(D-6G))\times$$
$$\times(2C+D-6G)-D^3(2C+D-6G)(2C-4D-G)(2C-3D-2G)+2R^2D(2C+$$
$$+D-6G)(4D^2-12C^2-24(G^2+6H^2)-50DG+C(7D+54G))+8R^3(3B(3C+$$
$$+2(D-6G))(C+D-4G)-2(15C^2+D^2+168G^2+10CD-34(3C+D)G)H)+$$
$$+2D^2(3B((C+D)^2-16G^2)+2(30D^2-35C^2-88G^2-162DG+6C(7D+22G))H)R,$$
$$-8R^4(4C^2+13D^2+32G^2+336H^2-4A(3C+2(D-6G))-24CG+10DG)+D^3\times$$
$$\times(2C-3D-2G)(2C-4D-G)(C-2(D+G))+2R^2D(8C^3-48H^2(5D+2G)+$$
$$+4AD(D+4G)-4C^2(4D+9G)+2C(8G^2+96H^2+2D(A+16D)+49DG)-D\times$$
$$\times(77D^2+8G^2+100DG))+448R^5H-16R^3D(37C-81D-50G)H+4D^2(20C^2+$$
$$+54D^2+16G^2-67CD-42CG+64DG)HR,\ 5DG-2M,\ N-2GR,\ 4GH-3L,$$
$$-8R^4(4C^2+3D^2+32(G^2+3H^2)+4C(D-6G)-10DG)+2R^2D(8C^3-21D^3+$$

$$+8D^2C+16G^2C-8C^2D+16G^2D+16H^2(27C-47D-30G)-36C^2G-20D^2G+$$
$$+46CDG)+D^3(2C-3D-2G)(2C-4D-G)(C-2(D+G))+64R^5H+16R^3(6C^2+$$
$$+22D^2+144H^2-5CD-24CG+12DG)H+4D^2(26C^2+82D^2+28G^2-93CD-$$
$$-60CG+104DG)HR,1-tR(C+D-4G)(CD^2+D^3+4D^2G+$$
$$+12CR^2+8DR^2-48GR^2)\Big\rangle\bigcap\mathbb{C}[\tilde{w}].$$

Предложение 7. Система Жолондека $CR_{15}^{(10)}$ приводится к каноническому виду (9), где $\tilde{w}\in V(J_6)$.

Обратимая система Жолондека $CR_{16}^{(5)}$ имеет вид [6]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-x(ky+lx)-(my+nx)T_2+(bx+2cy+e)\times\\&\times[-qx^2+(n-p)xy+my^2],\\\dot{y}&=-y(ky+lx)-(py+qx)T_2-(2ax+by+d)\times\\&\times[-qx^2+(n-p)xy+my^2],\\T_2&=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+1.\end{aligned}\qquad(18)$$

Последовательные замены переменных

$$u=(a_3x^2+b_3xy+c_3y^2+d_3x+e_3y+1)/x,\quad v=(a_3x^2+b_3xy+c_3y^2+d_3x+e_3y+1)/y$$

и

$$x\to a_0+a_1x+a_2y,\quad y\to b_0+b_1x+b_2y$$

приводят систему

$$\dot{u}=u(k_1u+l_1v)+u^2(m_1u+n_1v),\quad \dot{v}=v(k_1u+l_1v)+v^2(p_1u+q_1v)$$

сначала к виду (18), а потом к каноническому виду (9), где значения c_3, k_1, m_1, l_1, b_3, q_1 определяются из системы уравнений

$$1-a_0^2a_3-a_0b_0b_3-b_0^2c_3=0,\quad b_0(b_0^2b_3m_1+a_0(l_1+d_3n_1+2a_0a_3(n_1-p_1))+2p_1+b_0(k_1+$$
$$+2a_0a_3m_1+d_3m_1+a_0b_3n_1-a_0b_3p_1+e_3p_1))-a_0(-2+2a_0^2a_3+a_0b_0b_3-b_0e_3)q_1=0,b_2^2m_1+$$
$$+a_2b_2(n_1-p_1)-a_2^2q_1=0,\ a_1b_0b_2(2a_2a_3b_0(p_1-n_1)+b_2(l_1+2a_0a_3n_1+d_3n_1+b_0b_3p_1))+a_1\times$$
$$\times(2a_2^2a_3b_0^2+a_2b_0b_2(2a_2a_3+b_0b_3)+b_2^2(2-2a_0^2a_3+b_0e_3))q_1+b_1((2b_2+a_2b_0^2b_3)(b_2(p_1-$$
$$-n_1)+a_2q_1)-a_0^2b_2(b_2b_3q_1+2a_3(b_2p_1+a_2q_1))-a_0b_2(a_2b_0b_3q_1+b_2(l_1-b_0b_3n_1+d_3n_1+$$
$$+2b_0b_3p_1+e_3q_1)))=0,\ 2b_0(a_1b_1+a_2b_2)+a_0^3a_3(b_1^2+b_2^2)+(a_1^2+a_2^2)b_0^3b_3-a_0^2b_0(4a_3(a_1b_1+$$
$$+a_2b_2)-(b_1^2+b_2^2)b_3)+2a_0(b_0^2((a_1^2+a_2^2)a_3-(a_1b_1+a_2b_2)b_3)-b_1^2-b_2^2)=0,$$
$$a_0b_2q_1-b_0(b_2(n_1-p_1)-a_2q_1)-q_2=0,$$

а значения a_1, a_3, q_2, a_0 находятся из системы

$$b_2(a_1-a_0G)-a_2(b_1-b_0G)=0,-a_0b_2^4(b_1^2+b_2^2-b_0^2G^2)p_1+a_0^3a_3b_2^4p_1(b_2^2+(b_1-$$
$$-b_0G)^2)+a_2^3a_3b_0^2(b_0b_2n_1+q_2)(b_2^2+(b_1-b_0G)^2)-a_0a_2^2a_3b_0b_2(b_0b_2(2n_1-p_1)+2q_2)\times$$
$$\times(b_2^2+(b_1-b_0G)^2)+a_2b_0b_2^3(n_1((-1+a_0^2a_3)(b_1^2+b_2^2)+(1+a_0^2a_3)b_0^2G^2-2a_0^2a_3b_0b_1G)-$$
$$-2a_0^2a_3p_1(b_2^2+(b_1-b_0G)^2))-2a_0b_0^2b_2^2GNq_2+a_2b_2(b_2((a_0^2a_3-1)(b_1^2+b_2^2)-$$
$$-2a_0^2a_3b_0b_1G+(1+a_0^2a_3)b_0^2G^2)-2b_0^3GN)q_2=0,\ 3a_2Nq_2-b_2N(a_0b_2(n_1-2p_1)+$$
$$+a_2b_0(p_1-2n_1))-G(a_0b_2^2p_1+a_2(b_0b_2n_1+q_2))R=0,\ 2a_0b_2(N(n_1-2p_1)+Gp_1R)\times$$
$$\times(3b_2^2L+(b_1-b_0G)^2(2GR-3N))+a_2(b_0^2b_2G^3(n_1+p_1)(3N-2GR)+b_2^3G(n_1+p_1)\times$$
$$\times(2GR-3N)+2b_0(n_1(GR-2N)+Np_1)(3b_2^2L+b_0^2G^2(2GR-3N))+b_1^2(3N-$$
$$-2GR)(b_2G(n_1+p_1)+2b_0(n_1(2N-GR)-Np_1))-2b_0b_1G(3N-2GR)\times$$
$$\times(b_2G(n_1+p_1)+2b_0(n_1(2N-GR)-Np_1)))=0.$$

Введем идеал

$$J_7=\Big\langle 54A^3G^3L^3+486K^2L^3AG-486L^5K-3A^4G^6L+36A^3G^5KL+324G^3AK\times$$
$$\times(K-L)L(K+L)-243G^2(K-L)^2L(K+L)^2+27L^2BG(AG-3K)(AG-3K-$$
$$-3L)(AG-3K+3L)+54A^2G^4(L^3-3K^2L)-2A^5G^5N+486K^3L^2N-36A^3G^3\times$$
$$\times(3K^2+L^2)N-162K^2(K^2+4L^2)AGN+24A^4G^4KN+54A^2G^2K(4K^2N-6L^3+$$
$$+5L^2N)+2G(9L^2+(AG-3K)^2)(AG-3K)^2(AG-K)R,3CG(AG-3K-3L)L\times$$
$$\times(AG-3K+3L)-54L^3K-A^3G^3N+3(18K^3+3(L^2+5K^2)AG+4A^2G^2K)N-$$
$$-2G(9L^2+(AG-3K)^2)KR,3DG(AG-3K-3L)L(AG-3K+3L)+4A^3G^3(GR-$$
$$-N)+6AG(9L^3+6G^2KL-3(4K^2+L^2)N+14K^2GR)-2A^2G^2(3G^2L-15KN+$$
$$+16GKR)-18(3L^3K+3G^2(K-L)L(K+L)-3K^3N+G(4K^3R-2L^2KR)),$$
$$18L^2GH(AG-3K)((AG-3K)^2-9L^2)+2A^5G^5(N-GR)-54AG(6G^2K(K-L)\times$$
$$\times L(K+L)-9L^5-3K^4N+3K^2L^2(3L+5N)+K^2(7K^2-13L^2)GR)+81(3L(G^2(K-$$
$$-L)^2(K+L)^2-4L^4K+4K^3LN)+2K^3(K^2-5L^2)GR)-6A^3G^3(9L^3+6G^2KL-$$
$$-3(6K^2-L^2)N+(22K^2-3L^2)GR)+A^4G^4(3G^2L-24KN+26GKR)+18A^2G^2\times$$
$$\times(G^2(9K^2L-3L^3)+6K(3L^3-2K^2N+2L^2N)+(18K^2-11L^2)GKR),3(AG-3K-$$
$$-3L)L(AG-3K+3L)M-2A^3G^3(N-GR)+6AG(9L^3+3G^2KL-6(K^2+L^2)N+$$
$$+(7K^2+3L^2)GR)+A^2G^2(-3G^2L+15KN-16GKR)+9(3G^2(L-K)L(K+L)+$$
$$+3K(K^2N-4L^3+3L^2N)-4(K^2+L^2)GKR),6A(AG-3K)^2N^2+N(-54L^3A-$$
$$-81L^3G+9A^2G^3L+81K^2GL-54G^2AKL-10A^3G^3R+54K^3R-126K^2AGR+$$
$$+66A^2G^2KR)+2R(27G^2L^3+27L^3AG-27L^3K-3A^2G^4L-27G^2K^2L+$$
$$+18G^3AKL+2A^3G^4R+30G^2K^2AR-18K^3GR-14A^2G^3KR),1-tGL\times$$
$$\times(AG-3K)(AG-3K-3L)(AG-3K+3L)\Big\rangle\bigcap\mathbb{C}[\tilde{w}].$$

Предложение 8. Система Жолондека $CR_{16}^{(5)}$ приводится к каноническому виду (9), где $\tilde{w}\in V(J_7)$.

Обратимая система Жолондека $CR_9^{(10)}$ имеет вид [6]

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x[-lT+2(l-m)y-kxy-2nT^2],\\\dot{y}&=2[(m-l)xy+myT+kxy^2+nxT^2+nT^3],\\T&=x+y+c.\end{aligned}\qquad(19)$$

Система (19) получается из системы

$$\dot{u}=3u(k_1u+l_1v),\quad \dot{v}=2v(k_1u+m_1v+n_1v^2)$$

при помощи замены

$$u=x(x+y+c_1),\quad v=(x+y+c_1)^2/y.$$

Заменяя далее

$$x\to a_0+a_1x,\quad y\to b_0+b_1x+b_2y,$$

преобразовываем систему к виду (9), где значения b_0, l_1, m_1, c_1, n_1 находятся из системы уравнений

$$2a_0-b_0+c_1=0,\quad 2a_0^2(k_1+9n_1)+2c_1(m_1+4c_1n_1)-a_0(l_1-4m_1-c_1(k_1+24n_1))=0,$$
$$2(a_1-b_1)c_1(m_1+4c_1n_1)+a_0(2a_1-b_1)(2m_1+c_1(k_1+16n_1))+a_0^2(a_1(4k_1+30n_1)-$$
$$-b_1(k_1+6n_1))=0,\quad a_0((2a_1-b_1)(4a_1+b_1)-b_2^2)+2a_1(2a_1-b_1)c_1=0,$$
$$(4a_1^2-b_1^2-b_2^2)(2a_1b_1-b_1^2-b_2^2)k_1+8(b_1^2+b_2^2-2a_1^2-a_1b_1)^2n_1-n_2=0,$$

значения $a_1, N, M, L, k_1, a_0, b_1, G$ из системы

$$a_1 - a_0G = 0,\ N + GR = 0,\ 2DG + M = 0,\ 5GH + 3L = 0,\ b_2(b_1^2 + b_2^2 - 4a_0^2G^2)\times$$
$$\times k_1(b_1 - 2a_0G)(b_1^2 + b_2^2 - 2a_0b_1G)(b_1^3 + b_1b_2^2 - 2a_0^2b_1G^2 - a_0b_1^2G - a_0b_2^2G) - b_2n_2\times$$
$$\times(b_1 - 2a_0G)(b_1(b_1^2 + b_2^2) - 2a_0^2b_1G^2 - a_0(b_1^2 + b_2^2)G) + a_0n_2(b_2^2 + (b_1 - 2a_0G)(b_1 +$$
$$+2a_0G))^2R = 0,\ b_1A + b_1C - 2a_0AG - 2a_0CG - b_2H - b_2R = 0,\ 2A^6b_2R^2 + b_2\times$$
$$\times(C^3(D - 13G)R(H + R)^3 + C^2(H - 4R)R(H + R)^4 - C(2D - 5G)R(H +$$
$$+R)^5 + 3R^2(H + R)^6 - 2C^6H(H + 2R) - C^4R(H + R)^2(11H + 7R) + C^5(H +$$
$$+R)(4DH - 10GH + 3DR)) - b_1C(H + R)(5C(7G - D)R(H + R)^3 + 9R^2(H +$$
$$+R)^4 + C^3(H + R)(14GH - 4DH - 5DR + GR) + C^4(2H^2 - R^2 + 5HR) + C^2\times$$
$$\times(H + R)^2(20G^2 + 8R^2 - 8DG + 13HR)) + A^5R(4b_1R(H + R) + b_2(12CR - (D -$$
$$-10G)(H + R))) + A^4(b_1R(H + R)(-C(H - 19R) + (D + 13G)(H + R)) + b_2\times$$
$$\times(4R^2(H + R)^2 + C(H + R)(4DH - 10GH - DR + 40GR) - 2C^2(H^2 - 14R^2 +$$
$$+2HR))) + A^3(b_2(C(5R - 11H)R(H + R)^2 + (D - 13G)R(H + R)^3 + 2C^2(H +$$
$$+R)(8DH - 20GH + 3DR + 30GR) - 8C^3(H^2 - 4R^2 + 2HR)) + b_1(H + R)\times$$
$$\times((5R^2 - 20G^2 + 8DG) + 2C(H + R)(2DH - 7GH + 4DR + 19GR) - 2C^2(H^2 -$$
$$-17R^2 + 4HR))) + A^2(b_2(3C(D - 13G)R(H + R)^3 - 5R^2(H + R)^4 - 3C^2R(H +$$
$$+R)^2(11H + 3R) + 2C^3(H + R)(12DH - 30GH + 7DR + 20GR) - 6C^4(2H^2 -$$
$$-3R^2 + 4HR)) + b_1(H + R)(5(D - 7G)R(H + R)^3 + 6C^2(H + R)(2DH - 7GH +$$
$$+3DR + 6GR) + C(H + R)^2(2R^2 - 60G^2 + 24DG - 13HR) - 2C^3(3H^2 - 14R^2 +$$
$$+9HR))) + A(b_2(3C^2(D - 13G)R(H + R)^3 + C(H - 9R)R(H + R)^4 - (2D -$$
$$-5G)R(H + R)^5 - C^3R(H + R)^2(33H + 17R) + C^4(H + R)(16DH - 40GH +$$
$$+11DR + 10GR) - 4C^5(2H^2 - R^2 + 4HR)) + b_1(H + R)(10C(D - 7G)R(H + R)^3 -$$
$$-9R^2(H + R)^4 + 2C^3(H + R)(6DH - 21GH + 8DR + 5GR) - 2C^4(3H^2 - 5R^2 +$$
$$+8HR) - C^2(H + R)^2(60G^2 + 11R^2 - 24DG + 26HR))) = 0,\ b_2^2R^5 + 4b_2R^4(b_2H -$$
$$-b_1(A + C)) + R^3(6b_2^2H^2 + (3b_1^2 - 2b_2^2)(A + C)^2 - 12b_1b_2(A + C)H) + 2R^2(2b_2^2H^3 -$$
$$-6b_1b_2(A + C)^2(2A + C - 2G) + (3b_1^2 - 2b_2^2)(A + C)^2H - 2b_2(A + C)^2H(b_2C(A +$$
$$+C) + b_1(C + 2G)H) + (b_2^2H^4 - 4b_1b_2H^3(A + C) + (3b_1^2 - 2b_2^2)H^2(A + C)^2 +$$
$$+2b_2^2A(A + C)^3 + 4b_1b_2(A + C)^2(A - 2G)H)R = 0.$$

Введем идеал

$$J_8 = \langle (A + C)(2C + D + 3G)K(2(D + G)(H + R) + C(4H + 7R) + A(5H + 8R)) -$$
$$-(2C + D + 3G)(3C^4H - 5A^4R + C^3(-4DH + 3GH - 3DR) + A^3(5(C - D)H -$$
$$-(13C + 4D + 3G)R) - (D + 3G)(H + R)^2(2G(R - H) + D(H + R)) + C^2(D^2(H +$$
$$+R) - 3(H - 2R)(H + R)^2 + 3DG(H + 2R)) + C(H + R)(D(H + R)(4H + R) -$$
$$-GH(3H - 13R)) + A^2(C^2(13H - 11R) + 3DGR + D^2(H + R) - 5(2H - R)(H + R)^2 -$$
$$-C(14DH - 3GH + 11DR + 6GR)) + A(C^3(11H - 3R) - C^2(13DH - 6GH + 10DR +$$
$$+3GR) + C(2D^2(H + R) - (11H - 13R)(H + R)^2 + 3DG(H + 3R)) + (H + R)(D(H +$$
$$+R)(7H + 4R) + G(-4H^2 + 7R^2 + 19HR)))),\ 3B(A + C) + (2A - D - 3G)H - (2C +$$
$$+D + 3G)R,\ 2A^7R^3 + C^6GH(4H - 3R)(H + R) + 2R^2G(H + R)^7 + C^7HR(3H + R) +$$
$$+4C^4G(H + R)^3(H^2 - 2R^2 + 5HR) + D(H + R)(R^8 + R^6(15H^2 - (A + C)(2A - C -$$
$$-8G)) + 4H^2(A + C)^2(C - 2G) + H^2(C + 2G)) - R^4(2H^2(A + C)(6A - 9C - 40G) -$$
$$-15H^4 + (A + C)^2(-8G^2 + (A + C)^2 + 2(7A + 5C)G)) + R^2(H^6 - H^4(A + C)(2A -$$
$$-13C - 40G) - H^2(A + C)^2((A + C)^2 - 48G^2 + 6(7A + 3C)G) + (A + C)^4(2A^2 - (C -$$
$$-4G)(C - 2G) + A(C + 2G))) + 6R^7H + R^5(20H^2 + (-A - C)(8A - 7C - 40G))H -$$
$$-2R^3(H^2(A + C)(4A - 11C - 40G) - 3H^4 + (A + C)^2(-16G^2 + (A + C)^2 + (21A +$$
$$+13C)G))H + (A + C)(H^4(3C + 8G) + 2H^2(A + C)G(-7A + C + 16G) - (A + C)^3\times$$
$$\times(16G^2 + 3C(A + C) - 2(A + 5C)G))HR) + CR(H + R)^6(14G^2 - R(H - 2R)) + C^5(H +$$
$$+R)^2(R^2 - 4G^2H)(7H + 2R)) + A^6R^2(7G(H + R) - C(5H - 9R)) + C^2G(H + R)^5\times$$
$$\times(8G^2 + R(-H + 18R)) + A^5R(-CG(11H - 31R)(H + R) + 3C^2(H^2 + 5R^2 - 8HR) +$$
$$+(H + R)^2(4G^2 - R^2 + 4HR)) + C^3(H + R)^4(2G^2(6H - R) - R(3H^2 - 4R^2 - 5HR)) +$$
$$+A^4(2G(5H - 7R)R(H + R)^3 + C^2G(H + R)(4H^2 + 54R^2 - 47HR) + 5C^3R(3H^2 +$$
$$+2R^2 - 9HR) - C(H + R)^2(4G^2(H - 4R) + R(6H^2 + 8R^2 - 11HR))) + 2A^3(5C^4H(3H -$$
$$-4R)R + 3CG(7H - 9R)R(H + R)^3 + C^3G(H + R)(8H^2 + 23R^2 - 39HR) - R(H + R)^4\times$$
$$\times(7G^2 + R(-H + R)) - C^2(H + R)^2(4G^2(2H - 3R) + R(9H^2 + 8R^2 - 8HR))) + A^2(C^4G\times$$
$$\times(H + R)(24H^2 + 19R^2 - 62HR) - 3C^5R(-10H^2 + R^2 + 5HR) + 2C^2G(H + R)^3(2H^2 -$$
$$-37R^2 + 37HR) + G(H + R)^5(8G^2 - R(14H - 5R)) - 2C^3(H + R)^2(4G^2(3H - 2R) +$$
$$+R(9H^2 + 5R^2 - 11HR)) - 3C(H + R)^4(G^2(-4H + 10R)) + R(2H^2 + R^2 - HR))) +$$
$$+A(C^6(15H^2R - R^3) + C^5G(H + R)(16H^2 + 3R^2 - 23HR) + 2C^3G(H + R)^3(4H^2 -$$
$$-21R^2 + 31HR) + R(H + R)^6(14G^2 + R(-2H + R)) + 3C^2(H + R)^4(G^2(8H - 6R) -$$
$$-(H - R)R(3H + R)) + CG(H + R)^5(16G^2 + R(-15H + 23R)) - C^4(H + R)^2(4G^2\times$$
$$\times(4H - R) - R(R^2 - 6H^2 + 20HR))),\ N + GR,\ 2DG + M,\ 5GH + 3L,\ -16G^3(A + C)^3\times$$
$$\times(H + R)^5(R^3 - 4H^3 - 2R^2H + 2(A + C)(2A + 3C)H - (7H^2 + 2A(A + C))R + 4G^2\times$$
$$\times(H + R)^2(R^{10} + 4H^2C(A + C)^3(4H^4 - 3H^2C(A + C) + C(A + C)^3) + 2R^8(14H^2 - (A +$$
$$+C)(6A + 5C)) + R^6(70H^4 + (A + C)^3(33A + C) + 6H^2(A + C)(2A + 9C)) - 2R^4(A(A +$$
$$+C)^4(11A + 5C) - 14H^6 + 3H^2(A + C)^3(7A + 47C) - 5H^4(A + C)(46A + 53C)) +$$
$$+R^2(H^8 - 207H^4(A + C)^4 + 4A^2(A + C)^6 + 2H^6(A + C)(90A + 97C) + 6H^2(A + C)^4\times$$
$$\times(3A^2 + 8C^2 + 23AC)) + 8R^9H + 2R^7(28H^2 + (-A - C)(20A + 13C))H + 2R^5(28H^4 +$$
$$+36(A - C)(A + C)^3 + 5H^2(A + C)(24A + 31C))H + 2R^3(4H^6 + 3H^4(A + C)(68A +$$
$$+75C) - 2H^2(A + C)^3(57A + 97C) - 3(A + C)^4(4A^2 - 5C^2 - 9AC))H - 2(6H^5(A +$$
$$+C)^3(5A + C) - H^7(A + C)(16A + 17C) - H^3(A + C)^4(10A^2 + 3C^2 + 37AC) + 4AC(A +$$
$$+C)^6H)R) + R((A + C)^2 + (H + R)^2)(3A^8R^3 - 2A^7R^2C(5H - 7R) + C^2(19H^2 - 4R^2)R\times$$
$$\times(H + R)^6 + 4R^2H(H + R)^8 - C^8H^2(4H + R) + C^6H^2(H + R)^2(8H + R) - C^4(H + R)^4\times$$
$$\times(4H^3 + 4R^3 + 20R^2H + 19H^2R) - 2A^3C(C^4(20H^3 + R^3 + 15R^2H - 50H^2R) + (H +$$
$$+R)^4(8H^3 - 5R^3 - 19R^2H - 8H^2R) - 2C^2(H + R)^2(17H^3 - 6R^3 + 10R^2H - 2H^3R)) +$$
$$+A^6R((4H - 3R)R(H + R)^2 + C^2(11H^2 + 25R^2 - 48HR)) + A^2(C^6(45H^2R - 40H^3 -$$
$$-R^3) - C^2(H + R)^4(36H^3 - 25R^3 - 32R^2H + 23H^2R) + C^4(H + R)^2(84H^3 + R^3 +$$

$$+56R^2H+34H^2R)+R(H+R)^6(-4H^2+3R^2-16HR))-2A^5C(C^2(2H^3-10R^3+$$
$$+45R^2H-27H^2R)+R(H+R)^2(19H^2+10R^2-HR))+2A(C(H-2R)R(H+R)^6\times$$
$$\times(6H+R)+C^5(H+R)^2(22H^3+2R^3+11R^2H+10H^2R)-C^3(H+R)^4(12H^3-$$
$$-4R^3+9R^2H+23H^2R)+C^7H(R^2-10H^2+3HR))+A^4(C^2(H+R)^2(20H^3-$$
$$-38R^3+4R^2H-43H^2R)-5C^4(4H^3-R^3+16R^2H-21H^2R)+R(H+R)^4(12H^2-$$
$$-3R^2+8HR)))+4G(H+R)(4A^9R^3-12A^8R^2C(H-2R)+3A^7R(4C^2(H-5R)\times$$
$$\times(H-R)+(4H-3R)R(H+R)^2)+C(-4C^8H^3+14R^2H(H+R)^8+3C^2(H-2R)\times$$
$$\times R(H+R)^6(5H+2R)-3C^6HR(H+R)^2(9H+2R)+4C^4(H+R)^4(H^3+R^3-R^2H+$$
$$+H^2R))+A(12C^8H^2(-2H+R)+2R^2(6H-R)(H+R)^8+C^6(H+R)^2(4H^3-2R^3-$$
$$-6R^2H-147H^2R)+2C^4(H+R)^4(6H^3+16R^3+7R^2H+17H^2R)+C^2R(H+R)^6\times$$
$$\times(21H^2-16R^2-76HR))+A^3(3C^4(H+R)^2(8H^3-27R^3+64R^2H-146H^2R)+$$
$$+2C^2(H+R)^4(2H^3+29R^3+34R^2H+47H^2R)+R(H+R)^6(-8H^2+9R^2-26HR))-$$
$$-A^6C(4C^2(H^3-20R^3+45R^2H-18H^2R)+3R(H+R)^2(8H^2+17R^2-24HR))+$$
$$+A^5(C^2(H+R)^2(4H^3-116R^3+186R^2H-135H^2R)-12C^4(2H^3-5R^3+20R^2H-$$
$$-15H^2R)-2R(H+R)^4(-4H^2+R^2+HR))+A^4C(C^2(H+R)^2(16H^3-134R^3+$$
$$+258R^2H-327H^2R)-12C^4(5H^3-2R^3+15R^2H-20H^2R)+2R(H+R)^4(23H^2+$$
$$+7R^2+10HR))-A^2C(-C^4(H+R)^2(16H^3-23R^3+60R^2H-342H^2R)-2C^2(H+$$
$$+R)^4(6H^3+35R^3+32R^2H+43H^2R)+12C^6H(5H^2+R^2-6HR)+R(H+R)^6\times$$
$$\times(2H^2-5R^2+78HR))),1-t(A+C)(H+R)(2(D+G)(H+R)+$$
$$+C(4H+7R)+A(5H+8R)))\rangle\bigcap\mathbb{C}[\tilde{w}].$$

Предложение 9. Система Жолондека $CR_9^{(10)}$ приводится к каноническому виду (9), где $\tilde{w}\in V(J_8)$.

Из предложений 1–9 вытекает

Теорема 1. *Пусть V – многообразие центра системы (9). Тогда*

$$V(J_1+\langle N,R\rangle)\bigcup V(J_2+\langle N,R\rangle)\bigcup\left(\bigcup_{i=3}^{8}V(J_i)\right)\subset V.$$

Заключение. В настоящей работе получены канонические виды обратимых кубических систем Г. Жолондека $CR_5^{(8)}$, $CR_7^{(9)}$, $CR_8^{(10)}$, $CR_9^{(10)}$, $CR_{10}^{(10)}$, $CR_{11}^{(7)}$, $CR_{13}^{(7)}$, $CR_{15}^{(10)}$, $CR_{16}^{(5)}$ из [5; 6]. Наиболее сложный вид имеет система $CR_9^{(10)}$, а наиболее простой – системы $CR_5^{(8)}$, $CR_7^{(9)}$, $CR_8^{(10)}$, $CR_{11}^{(7)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сибирский, К.С.* Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц / К.С. Сибирский. – Кишинёв : Штиинца, 1976. – 268 с.
2. *Амелькин, В.В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
3. *Dumortier, F.* Qualitative theory of planar differential systems / F. Dumortier, J. Llibre, J. Art'es. – New York : Springer, 2006. – 302 p.
4. *Romanovski, V.G.* The center and cyclicity problems: a computational algebra approach / V.G. Romanovski, D.S. Shafer. – Basel : Birkhauser, 2010. – 330 p.
5. *Zoladek, H.* The classification of reversible cubic systems with center / H. Zoladek // Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. – 1994. – Vol. 4. – P. 79–136.
6. *Zoladek, H.* Remarks on the classification of reversible cubic systems with center / H. Zoladek // Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. – 1996. – Vol. 8. – P. 335–342.
7. *Кокс, Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. – М. : Мир, 2000. – 687 с.

8. *Садовский, А.П.* Полиномиальные идеалы и многообразия: пособие для студентов / А.П. Садовский. – Минск : Изд-во БГУ, 2008. – 199 с.
9. *Садовский, А.П.* Центры кубической системы с инвариантной прямой / А.П. Садовский, Т.В. Щеглова // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. Междунар. матем. конф., Минск, 10–14 сент. 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т ; редкол.: С.В. Рогозин. – Минск, 2012. – С. 63.

Поступила в редакцию 30.06.14.