Труды 4-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (AMADE–2006). Том 3. С. 19–21

УДК 517.977

ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В. И. Булатов

Белорусский государственный университет, г.Минск, Беларусь
e-mail: bulatov@bsu.by

Рассмотрим стационарную систему вида

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $t \in [0;+\infty[$; A_0 , A и B — вещественные матрицы размеров $n \times n$, $n \times n$, и $n \times r$ соответственно.

Начальное условие

$$x(0) = x_0\,, \tag{2}$$

где x_0 — заданный n-вектор, системы (1) считаем управляемым, если для некоторого момента времени $t_0 > 0$ найдется кусочно-непрерывная r-вектор функция $u(t)$, $t \in [0;t_0]$, (управление), и дифференцируемая n-вектор функция $x(t)$, $t \in [0;t_0]$, (траектория), удовлетворяющие (1), (2) и соотношению $x(t_0) = 0$.

Система (1) называется полностью управляемой, если ее любое начальное условие (2) управляемо.

В дальнейшем будем рассматривать регулярные системы (1),т. е. для которых является ненулевым многочлен

$$d(\lambda) = \det(\lambda A_0 - A)\,, \tag{3}$$

где λ — комплексная переменная. Как следует из [1], при выполнении условия (3), найдется вещественная $n \times n$-матричная функция $\Phi(t)$, элементами которой являются квазиполиномы от t , удовлетворяющая регулярной неоднородной системе

$$\begin{cases} A_0\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + \frac{t^n}{n!}E, \\ \dot{\Phi}(t)A_0 = \Phi(t)A + \frac{t^n}{n!}E, \\ \Phi(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где E — единичная матрица порядка n .

Целью данной работы является получение критерия полной управляемости регулярных систем (1), выраженного через решение $\Phi(t)$ соответствующей системы (4).

Пусть

$$G = [\dot{\Phi}(0)B;\ \ddot{\Phi}(0)B;\ \ldots;\Phi^{(2n)}(0)B\,]. \tag{5}$$

Лемма 1. *Для произвольного n-*вектора *c, удовлетворяющего условию $c^TG = 0$, имеем $c^T\Phi(t)B \equiv 0$, где «Т» – означает символ транспонирования.*

Доказательство. Если m – степень ненулевого многочлена (3), то

$$d(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} d_k\lambda^k\,,$$

где d_k – соответствующие действительные числа, $k = \overline{1,m}$, причем $d_m \neq 0$, $m \leq n$. Покажем, что в силу (4) следует

$$\sum_{k=0}^{m} d_k \Phi^{(n+k+1)}(t) = 0 . \tag{6}$$

Действительно, последовательное дифференцирование, например, первого из уравнений регулярной системы (4) дает

$$A_0 \Phi^{(n+2)}(t) = A \Phi^{(n+1)}(t) ,$$

т. е.

$$(A_0 p - A)\Phi^{(n+1)}(t) = 0 ,$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования. Отсюда используя присоединенную (союзную) матрицу $S(\lambda)$ к λ-матрице $\lambda A_0 - A$ и учитывая, что [2]

$$S(\lambda)(\lambda A_0 - A) = E \cdot d(\lambda) ,$$

имеем $S(p)(A_0 p - A)\Phi^{(n+1)}(t) = 0$, т. е. $d(p)\Phi^{(n+1)}(t) = 0$, что соответствует (6).

Из (6) получаем, что для произвольного n-вектора c вектор-функция $y(t) = c^T \Phi(t) B$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\sum_{k=0}^{m} d_k y^{(n+k+1)}(t) = 0 \tag{7}$$

порядка $(n+m+1)$. Если для матрицы (5) имеем $c^T G = 0$, то тогда $c^T \Phi^{(j)}(0) B = 0$, $j = \overline{1,2n}$. Поэтому в силу того, что $\Phi(0) = 0$ и $m \leq n$, получаем $y^{(j)}(0) = c^T \Phi^{(j)}(0) B = 0$, $j = \overline{0, m+n}$. А так, как обыкновенное уравнение (7) с нулевыми начальными условиями имеет только тривиальное решение $y(t) \equiv 0$, то, значит, $c^T \Phi(t) B \equiv 0$.

Лемма 2. *Если матрица (5) удовлетворяет условию* $\mathrm{rank} G = n$, *то тогда для* $\forall t_0 > 0$ *следует*

$$\det \left[\int_0^{t_0} \Phi(-\tau) B B^T \Phi^T(-\tau) d\tau \right] \neq 0 . \tag{8}$$

Доказательство. Допустим, что для некоторого $t_0 > 0$ условие (8) не выполняется. Тогда найдется ненулевой вещественный n-вектор c такой, что

$$c^T \cdot \int_0^{t_0} \Phi(-\tau) B B^T \Phi^T(-\tau) d\tau = 0 ,$$

т. е.

$$\int_0^{t_0} c^T \Phi(-\tau) B B^T \Phi^T(-\tau) c \, d\tau = 0 . \tag{9}$$

А так как для $\forall \tau \in [0; t_0]$ имеем $c^T \Phi(-\tau) B B^T \Phi^T(-\tau) c \geq 0$, то из (9) получим, что $c^T \Phi(-\tau) B \equiv 0$, $\forall \tau \in [0; t_0]$. Отсюда для $\forall j \geq 0$ следует $c^T \Phi^{(j)}(0) B = 0$ и, значит, $c^T G = 0$, что противоречит условию $\mathrm{rank} G = n$.

Теорема. *Для полной управляемости регулярной системы (1) необходимо и достаточно, чтобы матрица (5) удовлетворяла условию* $\mathrm{rank} G = n$.

Доказательство. Необходимость. Из [3–4] для траектории $x(t)$ регулярной системы (1)-(2) в силу (4) следует

$$x(t) = \left(\Phi(t - t_0) A_0 x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau) B u(\tau) d\tau \right)^{(n+1)} .$$

Если $x(t_0) = 0$, то тогда

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \right)^{(n+1)} . \tag{10}$$

Пусть $\mathrm{rank} G < n$. Тогда найдется ненулевой n-вектор c такой, что $c^T G = 0$, и, значит, по лемме 1 имеем $c^T\Phi(t)B \equiv 0$. Откуда в силу (10) получаем

$$c^T x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} c^T\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \right)^{(n+1)} \equiv 0.$$

Поэтому для произвольного начального условия (2) имеем $c^T x(0) = 0$, т. е. $c^T x_0 = 0$, что возможно, лишь если $c = 0$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия $\mathrm{rank} G = n$ для полной управляемости системы (1).

Достаточность. Пусть $\mathrm{rank} G = n$. Тогда по лемме 2 для произвольного $t_0 > 0$ будет невырожденной матрица

$$H = \int_0^{t_0} \Phi(-\tau)BB^T\Phi^T(-\tau)d\tau .$$

Полагая

$$v(\tau) = -B^T\Phi^T(-\tau)H^{-1}x_0$$

нетрудно проверить, что, во-первых, в силу (4) пара функций

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bv(\tau)d\tau, \\ u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^n}{n!} v(\tau)d\tau, \end{cases}$$

удовлетворяет регулярной системе (1) и начальному условию (2), и, во-вторых, $x(t_0) = 0$.

Литература

1. *Булатов В. И.* Об одном критерии существования решений линейных регулярных систем управления // Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. - 2001. Т. 10. С. 33–35.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1998
3. *Булатов В. И.* Условия совместности линейных неоднородных регулярных систем// Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. - 2001. Т. 9. С. 45–48.
4. *Булатов В. И.* Об одном соотношении для решений линейных регулярных систем управления.// IX Белорусская математическая конференция: Тез. докл. междунар. конф. Часть 3. Гродно, 2004. с. 100

V. I. Bulatov

Complete controllability of linear regular control systems

Summary

It is proved a criterion of the complete controllability of linear regular control systems.