УДК 517.977

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В. И. Булатов

It is proved a criterion of the existence for solutions of linear regular control systems. The criterion obtained is given in terms of an auxiliary function satisfying a special nonhomogeneons system.

Рассмотрим стационарную систему, не разрешенную относительно производной

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{1}$$

Здесь $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^r$, $t\in T = [0; +\infty[$; A_0, A и B – вещественные $n\times n$, $n\times n$ и $n\times r$-матрицы. Под решением системы (1), соответствующим начальному условию

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где x_0 – заданный n-вектор, будем подразумевать пару $(x(t), u(t))$ из r-вектор-функции $u(t)$, $t\in T$ (управления) и дифференцируемой n-вектор-функции $x(t)$, $t\in T$ (траектории), удовлетворяющих (1), (2). Систему (1) считаем регулярной, если найдется такое число λ_0, что

$$\det(\lambda_0 A_0 - A) \neq 0. \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма. *В случае выполнения условия (3) существует $n\times n$-матричная функция $\Phi(t)$, элементами которой являются квазиполиномы от t, удовлетворяющая системе*

$$\begin{cases} A_0\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + \dfrac{t^n}{n!}E_n, \\ \dot{\Phi}(t)A_0 = \Phi(t)A + \dfrac{t^n}{n!}E_n, \\ \Phi(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где E_n – единичная матрица порядка n.

Отметим основные моменты при доказательстве этой леммы. Из теории приведения регулярных пучков матриц к каноническому блочно-диагональному виду следует [1, с. 320–322], что при выполнении (3) найдутся такие невырожденные $n\times n$-матрицы P и Q, что

$$\begin{aligned} PA_0Q &= \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix}, \\ PAQ &= \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

Keywords: *linear regular control system, solvability*
2000 Mathematics Subject Classification: 34A30, 93C15

где H – некоторая нильпотентная $m \times m$-матрица, G – соответствующая $(n-m) \times (n-m)$-матрица, E_{n-m} и E_m означают единичные матрицы порядков $(n-m)$ и m. Положим

$$\Phi(t) = Q \begin{bmatrix} -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{H^{n-k}t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \int\limits_0^t Ge^{G(t-\tau)}\dfrac{\tau^n}{n!}d\tau \end{bmatrix} P. \tag{6}$$

На основании (5) и (6), во-первых, получаем

$$A\Phi(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{H^{n-k}t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \int\limits_0^t Ge^{G(t-\tau)}\dfrac{\tau^n}{n!}d\tau \end{bmatrix} P$$

и, во-вторых, в силу нильпотентности матрицы H имеем

$$A_0\dot{\Phi}(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{H^{n-k}t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^n}{n!}E_{n-m} + \int\limits_0^t e^{G(t-\tau)}\dfrac{\tau^n}{n!}d\tau \end{bmatrix} P.$$

Отсюда следует, что

$$A_0\dot{\Phi}(t) - A\Phi(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{t^n}{n!}E_m & 0 \\ 0 & \dfrac{t^n}{n!}E_{n-m} \end{bmatrix} P = \frac{t^n}{n!}E_n.$$

Аналогично проверяется равенство

$$\dot{\Phi}(t)A_0 - \Phi(t)A = \frac{t^n}{n!}E_n.$$

Кроме того, из (6) непосредственно получаем, что $\Phi(0) = 0$.

Имеет место

Теорема. *Для того чтобы регулярная система (1) имела решение $(x(t); u(t))$, соответствующее начальному условию (2), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}[S; \Phi^{(n)}(0)Ax_0] = \operatorname{rank} S, \tag{7}$$

где

$$S = [\dot{\Phi}(0)B; \ddot{\Phi}(0)B; \ldots; \Phi^{(n)}(0)B], \tag{8}$$

а $n \times n$-матричная функция $\Phi(t)$ определяется системой (4).

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольный n-вектор c такой, что

$$c^{\mathrm{T}}S = 0, \tag{9}$$

где символ т означает транспонирование. Тогда в силу (8) для векторов

$$c_k^{\mathrm{T}} = c^{\mathrm{T}}\Phi^{(k)}(0), \ k = \overline{1, n}, \tag{10}$$

следует

$$c_k^{\mathrm{T}}B = 0, \ k = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Кроме того, последовательным дифференцированием при $t=0$ из (4) имеем

$$\begin{aligned} &c_1^{\mathrm{T}} A_0 = 0, \\ &c_{k+1}^{\mathrm{T}} A_0 = c_k^{\mathrm{T}} A, \ k = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

На основании (11), (12) по индукции получаем, что произвольное решение $(x(t);\ u(t))$ регулярной системы (1), (2) удовлетворяет соотношениям

$$c_k^{\mathrm{T}} A x(t) = 0, \ k = \overline{1, n}.$$

Отсюда, в частности, при $k=n$ и $t=0$ в силу (2), (9), (10) имеем

$$c^{\mathrm{T}}[S; \Phi^{(n)}(0) A x_0] = [c^{\mathrm{T}} S; c_n^{\mathrm{T}} A x(0)] = 0. \tag{13}$$

Соотношения (9), (13) показывают, что каждая линейная зависимость вектор-строк матрицы (8) дает аналогичную линейную зависимость вектор-строк расширенной матрицы $[S; \Phi^{(n)}(0) A x_0]$, что равносильно условию (7).

Достаточность. При выполнении условия (7) найдутся такие r-векторы $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, что

$$\Phi^{(n)}(0) A x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^{(n-k)}(0) B u_k. \tag{14}$$

В соответствии с (14) положим

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k t^k}{k!} \tag{15}$$

и рассмотрим

$$x(t) = \Phi^{(n+1)}(t) A_0 x_0 + \int_0^t \Phi^{(n+1)}(t-\tau) B u(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^{(n-k)}(0) B u^{(k)}(t). \tag{16}$$

Из (15) следует, что $u^{(k)}(0) = -u_k,\ k = \overline{0, n-1}$. Отсюда для (16) в силу (4), (14) получаем

$$x(0) = \Phi^{(n+1)}(0) A_0 x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^{(n-k)}(0) B u_k = \Phi^{(n+1)}(0) A_0 x_0 - \Phi^{(n)}(0) A x_0 =$$

$$= (\Phi^{(n+1)}(0) A_0 - \Phi^{(n)}(0) A) x_0 = x_0,$$

т.е. вектор-функции (15), (16) дают пару $(x(t);\ u(t))$, соответствующую начальному условию (2). Кроме того, для этой пары функций (15), (16) на основании (4) имеем

$$A_0 \dot{x}(t) - A x(t) = (A_0 \Phi^{(n+2)}(t) - A \Phi^{(n+1)}(t)) A_0 x_0 + \int_0^t (A_0 \Phi^{(n+2)}(t-\tau) - A \Phi^{(n+1)}(t-\tau)) B u(\tau) d\tau +$$

$$+ A_0 \Phi^{(n+1)}(0) B u(t) + \sum_{k=1}^{n-1} A_0 \Phi^{(n-k+1)}(0) B u^{(k)}(t) + A_0 \dot{\Phi}(0) B u^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} A \Phi^{(n-k)}(0) B u^{(k)}(t) =$$

$$= (A_0 \Phi^{(n+1)}(0) - A \Phi^{(n)}(0)) B u(t) + \sum_{k=1}^{n-1} (A_0 \Phi^{(n-k+1)}(0) - A \Phi^{(n-k)}(0)) B u^{(k)}(t) = B u(t).$$

Значит, пара функций (15), (16) дает требуемое решение регулярной системы (1), (2).

Литература

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М., 1988.

Белорусский государственный университет, г. Минск