УДК 62—50

В. И. БУЛАТОВ

# СПЕКТРАЛЬНАЯ ПРИВОДИМОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

1. Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{m}[A_i x(t-h_i)+B_i u(t-h_i)]. \tag{1}$$

Здесь $x$ — n-вектор; $u$ — $r$-вектор; $A_i$, $B_i$ — матрицы соответствующих размеров; $0\leqslant h_0<h_1<\ldots<h_m$ — постоянные числа.

Замкнем систему (1) динамическим регулятором вида

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{k}H_{ij}u^{(i)}(t-\tau_j)=\sum_{j=0}^{k}Q_j x(t-\tau_j), \tag{2}$$

где $p$, $k$, $\tau_j$ — некоторые числа $(0\leqslant\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_k)$; $H_{ij}$ и $Q_j$ — постоянные $r\times r$- и $r\times n$-матрицы.

*Определение.* Систему (1) назовем спектрально приводимой, если замыкание ее некоторым регулятором (2) приводит к системе (1)—(2), спектр которой конечен, т. е. конечно множество корней функции

$$\delta(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda E_n-\sum_{i=0}^{m}A_i e^{-\lambda h_i}; & \sum_{i=0}^{m}B_i e^{-\lambda h_i}\\ \sum_{i=0}^{k}Q_j e^{-\lambda\tau_j}; & \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{k}H_{ij}\lambda^i e^{-\lambda\tau_j}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Целью данной работы является получение условий спектральной приводимости системы (1). Через $\sigma[G(\lambda)]$ будем в дальнейшем обозначать множество общих корней миноров максимального порядка прямоугольной матрицы $G(\lambda)$, элементами которой являются целые функции от $\lambda$. Имеет место

**Теорема 1.** Если система (1) спектрально приводима, то множество

$$\sigma\left[\lambda E_n - \sum_{i=0}^{m} A_i e^{-\lambda h_i}; \quad \sum_{i=0}^{m} B_i e^{-\lambda h_i}\right] \tag{4}$$

конечно.
Для доказательства достаточно, воспользовавшись теоремой Лапласа, вычислить определитель (3) разложением по последним $r$ строкам.

2. Покажем, что для системы

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} [A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih)] \tag{5}$$

справедлива следующая

**Теорема 2.** В случае конечности множества

$$\sigma\left[\lambda E_n - \sum_{i=0}^{m} A_i e^{-i\lambda h}; \quad \sum_{i=0}^{m} B_i e^{-i\lambda h}\right] \tag{5}$$

система (4) спектрально приводима.

Доказательство. Будем рассматривать миноры $n$-го порядка $\Delta_j(\mu, \lambda)$ матрицы

$$[\lambda E_n - A(\mu);\ B(\mu)], \tag{6}$$

где $(A\mu) = \sum_{i=0}^{m} A_i \mu^i$; $B(\mu) = \sum_{i=0}^{m} B_i \mu^i$; $\mu$ — комплексная переменная, как элементы кольца $R[\mu; \lambda]$ многочленов от $\mu$, коэффициентами которых являются рациональные функции от $\lambda$. Предположим, что многочлены $\Delta_j(\mu, \lambda)$ имеют в $R[\mu; \lambda]$ нетривиальный общий делитель $\varphi(\mu, \lambda)$. Без ограничения общности можно считать, что у $\varphi(\mu, \lambda)$ все коэффициенты при степенях $\mu$ являются полиномами от $\lambda$. Тогда найдутся такие многочлены $\psi_j(\mu, \lambda) \in R[\mu; \lambda]$, для которых $\Delta_j(\mu, \lambda) = \varphi(\mu, \lambda)\psi_j(\mu, \lambda)$. Умножением на подходящие ненулевые полиномы $p_j(\lambda)$ можно добиться, чтобы у $\tilde{\psi}_j(\mu, \lambda) = p_j(\lambda)\psi_j(\mu, \lambda)$ все коэффициенты при степенях $\mu$ также являлись полиномами от $\lambda$. Следовательно, приходим к тождествам

$$p_j(\lambda)\Delta_j(\mu, \lambda) = \varphi(\mu, \lambda)\tilde{\psi}_j(\mu, \lambda). \tag{7}$$

Так как среди многочленов $\Delta_j(\mu, \lambda)$ есть $\det[\lambda E_n - A(\mu)]$, то сравнением коэффициентов в соответствующем тождестве (7) при степенях $\lambda$ получаем, что в разложении функции $\varphi(\mu, \lambda)$ по степеням $\lambda$ коэффициент при наибольшей степени является ненулевым числом. Отсюда, учитывая, что по предположению $\varphi(\mu, \lambda)$ существенно зависит от $\mu$, следует [2], что квазиполином $\varphi(e^{-\lambda h}, \lambda)$ будет иметь бесконечное число корней. Тогда из (6)—(7) при $\mu = e^{-\lambda h}$ получим, что миноры $n$-го порядка матрицы

$$[\lambda E_n - A(e^{-\lambda h});\ B(e^{-\lambda h})]$$

имеют бесконечное число общих корней, т. е. множество (5) бесконечно.

Итак, если множество (5) конечно, то миноры $n$-го порядка матрицы (6) являются взаимно простыми многочленами кольца $R[\mu; \lambda]$. Поэтому [1] найдутся $n \times n$- и $(n+r) \times (n+r)$-матрицы, $S(\mu, \lambda)$ и $T(\mu, \lambda)$

элементы которых принадлежат $R[\mu;\lambda]$, а определители являются ненулевыми рациональными функциями от $\lambda$, что

$$[\lambda E_n - A(\mu);\ B(\mu)] = S(\mu, \lambda)[E_n;\ 0]T(\mu, \lambda). \tag{8}$$

Подберем полином $g(\lambda) \not\equiv 0$ так, чтобы элементы матрицы $g(\lambda)T(\mu, \lambda)$ были многочленами кольца $R[\mu;\lambda]$ с коэффициентами при степенях $\mu$, являющимися полиномами от $\lambda$. Пусть

$$[0;\ g(\lambda)E_r]T(\mu, \lambda) = [\tilde{Q}(\mu, \lambda);\ \tilde{H}(\mu, \lambda)], \tag{9}$$

где $\tilde{Q}(\mu, \lambda)$, $\tilde{H}(\mu, \lambda)$ — некоторые $r\times n$- и $r\times r$-матрицы. Из (8)—(9) легко получить, что определитель

$$\delta(\mu, \lambda) = \det\begin{bmatrix}\lambda E_n - A(\mu); & B(\mu)\\ \tilde{Q}(\mu, \lambda) & \tilde{H}(\mu, \lambda)\end{bmatrix} \tag{10}$$

будет ненулевым полиномом от $\lambda$. С помощью элементарных преобразований над определителем (10) нетрудно показать, что

$$\delta(\mu, \lambda) = \det\begin{bmatrix}\lambda E_n - A(\mu); & B(\mu)\\ \sum_{j=0}^{k} Q_j \mu^j; & \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{k} H_{ij}\lambda^i\mu^j\end{bmatrix}, \tag{11}$$

где постоянные матрицы $Q_j$ и $H_{ij}$ находятся из разложений

$$\sum_{i=0}^{l}\tilde{Q}_i(\mu)A^i(\mu) = \sum_{j=0}^{k} Q_j\mu^j,$$

$$\tilde{H}(\mu, \lambda) - P(\mu, \lambda)B(\mu) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{k} H_{ij}\lambda^i\mu^j,$$

а матрицы $Q_i(\mu)$ и $P(\mu, \lambda)$ определяются соотношениями

$$\tilde{Q}(\mu, \lambda) = \sum_{i=0}^{l}\lambda^i\tilde{Q}_i(\mu),$$

$$P(\mu, \lambda) = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i-1}\lambda^i\tilde{Q}_{i+j+1}(\mu).$$

Полагая теперь в (11) $\mu = e^{-\lambda h}$, убеждаемся, что регулятор

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{k} H_{ij}u^{(i)}(t - jh) = \sum_{j=0}^{k} Q_j x(t - jh)$$

приведет систему (4) к системе с конечным спектром.

*Следствие.* Полностью управляемая [3] система с одним входом

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - ih) + b\,u(t)$$

спектрально приводима регулятором

$$u^{(p)}(t) + \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{k} h_{ij}u^{(i)}(t - jh) = \sum_{j=0}^{k} q_i' x(t - jh).$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., 1975.
3. Марченко В. М.— «ДАН СССР», 1977, 236, № 5.



Поступила в редакцию
26/XII 1977 г.



*Кафедра высшей математики*