УДК 517.956

В. И. БУЛАТОВ

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЗАДАННЫХ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

1. Постановка задачи. Пусть движение описывается стационарной системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i) + Bu(t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x_0(\cdot) = \{x(\tau) = \varphi(\tau), \ -h_m \leqslant \tau < 0; \ x(0) = x_0\}, \tag{2}$$

где x — n-вектор; u — r-вектор; A, A_i, B — матрицы соответствующих размеров; $0 < h_1 < \ldots < h_m$ — постоянные запаздывания; $\varphi(\tau)$ — кусочно-непрерывная n-вектор-функция; x_0 — постоянный n-вектор.

Определения.

а) Состояние (2) системы (1) называется управляемым, если существуют момент времени $t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$ такие, что

$$x(t) \equiv 0 \text{ при } t \geqslant t_1, \tag{3}$$

где $x(t)$ — решение системы (1), (2).

б) Будем говорить, что система (1) имеет конечный спектр, если конечно множество корней квазиполинома $\det[\lambda E_n - A - \sum_{i=1}^{m} A_i \exp\{-\lambda h_i\}]$.

в) Через $\sigma[R(\lambda)]$ будем обозначать множество общих (с учетом кратностей) корней миноров p-го порядка $p \times l$-матричной функции $R(\lambda)$, $l \geqslant p$, элементами которой являются целые функции комплексной переменной λ.

Цель данной работы — получение условий управляемости состояния (2) системы (1). Пусть $D(\lambda)$ — целая $n \times (n+r)$-матричная функция; $d(\lambda)$ — целая n-вектор-функция. В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Множества $\sigma[D(\lambda)]$ и $\sigma[D(\lambda); d(\lambda)]$ совпадают тогда и только тогда, когда для любых постоянных матриц P и C размера $k \times k$ и $k \times n$ соответственно ($k = 1, 2, 3, \ldots$) справедливо равенство:*

$$\sigma[\lambda E_k - P; \ CD(\lambda)] = \sigma[\lambda E_k - P; \ CD(\lambda); \ Cd(\lambda)].$$

Доказательство этой леммы можно получить из работы [1], основные результаты которой для полиномиальных λ-матриц справедливы и для матриц, элементами которых являются целые функции переменной λ.

2. Необходимое условие управляемости.

Теорема 1. *Для управляемости состояния (2) системы (1) необходимо, чтобы*

$$\sigma[\lambda E_n - A - \sum_{i=1}^{m} A_i \exp\{-\lambda h_i\}; \ B] =$$

$$= \sigma[\lambda E_n - A - \sum_{i=1}^{m} A_i \exp\{-\lambda h_i\}; \ B; \ x_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{h_i} A_i \varphi(\tau - h_i) \exp\{-\lambda\tau\}\, d\tau]. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим при $t \geqslant 0$ вектор-функцию

$$y(t) = Cx(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{h_i} \exp\{-P\tau\} CA_i x(t+\tau-h_i)\, d\tau, \tag{5}$$

где $x(t)$ — решение системы (1), (2); C и P — произвольные $k \times n$ и $k \times k$-матрицы.

Интегрируя по частям, получим

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{h_i} \exp\{-P\tau\} CA_i dx(t+\tau-h_i) =$$

$$= CAx(t) + \sum_{i=1}^{m} CA_i x(t-h_i) + CBu(t) + \sum_{i=1}^{m} [\exp\{-Ph_i\} CA_i x(t) -$$

$$- CA_i x(t-h_i) + \int_{0}^{h_i} P\exp\{-P\tau\} CA_i x(t+\tau-h_i)\, d\tau].$$

Следовательно,

$$\dot{y}(t) = Py(t) + \tilde{B}v(t), \tag{6}$$

$$y(0) = Cx_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{h_i} \exp\{-P\tau\} CA_i \varphi(\tau-h_i)\, d\tau, \tag{7}$$

где $\tilde{B} = [CA - PC + \sum_{i=1}^{m} \exp\{-Ph_i\} CA_i;\ CB]$, $v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$ — новое управление.

Пусть состояние (2) системы (1) управляемо. Из (3), (5) — (7) следует, что состояние (7) системы (6) тоже управляемо [2]. Тогда [3]

$$\sigma[\lambda E_k - P;\ \tilde{B}] = \sigma[\lambda E_k - P;\ \tilde{B};\ y(0)]. \tag{8}$$

Положим

$$D(\lambda) = [\lambda E_n - A - \sum_{i=1}^{m} A_i \exp\{-\lambda h_i\};\ B], \tag{9}$$

$$d(\lambda) = x_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{h_i} A_i \varphi(\tau-h_i) \exp\{-\lambda\tau\}\, d\tau. \tag{10}$$

Нетрудно проверить справедливость равенств

$$[\lambda E_k - P;\ CD(\lambda)] = [\lambda E_k - P;\ \tilde{B}]\, G(\lambda),$$

$$[\lambda E_k - P;\ CD(\lambda);\ Cd(\lambda)] = [\lambda E_k - P;\ \tilde{B};\ y(0)]\, H(\lambda),$$

где

$$G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c|c} E_k & C + \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{h_i} \exp\{[P-\lambda E_k]\tau - Ph_i\} CA_i d\tau & 0 \\ 0 & \begin{matrix} -E_n \\ 0 \end{matrix} & E_r \end{array}\right],$$

$$H(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} G(\lambda) & -\sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{h_i} \left[\int_{0}^{\tau} \exp\{[P-\lambda E_k]\theta - P\tau\}\, d\theta\right] CA_i \varphi(\tau-h_i)\, d\tau \\ 0 & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right].$$

Так как $\det G(\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, $\det H(\lambda) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, то [1]

$$\sigma[\lambda E_k - P;\ CD(\lambda)] = \sigma[\lambda E_k - P;\ \tilde{B}]$$

и

$$\sigma[\lambda E_k - P;\ CD(\lambda);\ Cd(\lambda)] = \sigma[\lambda E_k - P;\ \tilde{B};\ y(0)],$$

т. е.

$$\sigma[\lambda E_k - P;\ CD(\lambda)] = \sigma[\lambda E_k - P;\ CD(\lambda);\ Cd(\lambda)].$$

На основании леммы 1 заключаем, что справедливо равенство (4). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Можно показать, что если x_0 и $\varphi(\tau)$ берутся произвольными, то пересечение получаемых таким образом всевозможных множеств

$$\sigma\left[\lambda E_n - A - \sum_{i=1}^{m} A_i \exp\{-\lambda h_i\};\ B;\ x_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{h_i} A_i \varphi(\tau - h_i) \exp\{-\lambda\tau\}\, d\tau\right]$$

является пустым множеством.

Поэтому из теоремы 1 следует, что если система (1) полностью управляема, т. е. если любое ее начальное состояние (2) управляемо, то

$$\sigma\left[\lambda E_n - A - \sum_{i=1}^{m} A_i \exp\{-\lambda h_i\};\ B\right] = \varnothing.$$

Легко видеть, что это равносильно следующему условию:

$$\operatorname*{rank}_{\forall\lambda}\left[\lambda E_n - A - \sum_{i=1}^{m} A_i \exp\{-\lambda h_i\};\ B\right] = n. \tag{11}$$

Следовательно, равенство (11) является необходимым условием полной управляемости системы (1). Это равенство является также достаточным условием полной управляемости [4].

3. Управляемость состояния системы с конечным спектром.

Теорема 2. *При выполнении условия (4) состояние (2) системы с конечным спектром (1) управляемо.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме, которая представляет интерес также в связи с исследованиями [5].

Лемма 2. *Если спектр системы (1) конечен, то $n \times n$-матричная функция $F(t)$, являющаяся решением системы*

$$\dot{F}(t) = AF(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i F(t - h_i),$$

$$F_0(\cdot) = \{F(\tau) = 0,\ \tau < 0;\ F(0) = E_n\}, \tag{12}$$

представима при $t \geqslant (n-1)h_m$ в виде

$$F(t) = K \exp\{S(t - nh_m)\}\, T, \tag{13}$$

где K, S, T — некоторые $n \times n^2$, $n^2 \times n^2$, $n^2 \times n$-матрицы, причем

$$ST = TA + \sum_{i=1}^{m} \exp\{-Sh_i\}\, TA_i. \tag{14}$$

Доказательство леммы 2. Если система (1) имеет конечный спектр, то [6, 7]

$$\det[\lambda E_n - A(\mu)] \equiv \lambda^n - \alpha_n \lambda^{n-1} - \ldots - \alpha_1,$$

где $A(\mu) = A + \sum_{i=1}^{m} A_i \mu^{h_i}$; α_i — постоянные числа.

Из теоремы Гамильтона — Кэли [1] следует, что

$$A^n(\mu) - \alpha_n A^{n-1}(\mu) - \ldots - \alpha_1 E_n \equiv 0. \tag{15}$$

Последовательно дифференцируя равенство (12) и учитывая (15), нетрудно показать, что при $t \geqslant (n-1)h_m$ функция $F(t)$ удовлетворяет уравнению

$$F^{(n)}(t) - \alpha_n F^{(n-1)}(t) - \ldots - \alpha_1 F(t) = 0.$$

Из этого уравнения получаем представление (13), где

$$K = [E_n\, 0 \ldots 0],\quad S = \begin{bmatrix} 0 & E_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & E_n \\ \alpha_1 E_n & \alpha_2 E_n & \ldots & \alpha_n E_n \end{bmatrix},\quad T = \begin{bmatrix} F(nh_m) \\ \ldots \\ F^{(n-1)}(nh_m) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что

$$\begin{bmatrix} K \\ KS \\ \ldots \\ KS^{n-1} \end{bmatrix} = E_{n^2}. \tag{16}$$

Далее из равенства (12) следует, что

$$\dot F(t) = F(t)A + \sum_{i=1}^{m} F(t-h_i)A_i. \tag{17}$$

Поэтому, используя (13) и (17), при $t \geqslant (n-1)h_m$ получаем

$$K \exp\{S(t - nh_m)\}\, [ST - TA - \sum_{i=1}^{m} \exp\{-Sh_i\}\, TA_i] \equiv 0.$$

Последовательно дифференцируя это тождество и полагая $t = nh_m$, имеем

$$KS^i\, [ST - TA - \sum_{i=1}^{m} \exp\{-Sh_i\}\, TA_i] = 0,\quad i = \overline{0, n-1}. \tag{18}$$

Учитывая (16), от равенства (18) приходим к равенству (14). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x(t)$ — решение системы с конечным спектром (1) с начальным условием (2). При $t \geqslant 0$ имеем

$$x(t) = F(t)x_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{h_i} F(t-\tau) A_i \varphi(\tau - h_i)\, d\tau + \int_0^t F(t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau. \tag{19}$$

Положим $u(t) = 0$ для $t < nh_m$. Тогда из (13), (19) следует, что при $t \geqslant nh_m$

$$x(t) = Kz(t), \tag{20}$$

где вектор-функция $z(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot z(t) = Sz(t) + TBu(t), \tag{21}$$

$$z(nh_m) = Tx_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{h_i} \exp\{-S\tau\}\, TA_i \varphi(\tau - h_i)\, d\tau. \tag{22}$$

Так как выполняется условие (4), то из леммы 1 следует, что

$$\sigma[\lambda E_{n^2} - S;\ TD(\lambda)] = \sigma[\lambda E_{n^2} - S;\ TD(\lambda);\ Td(\lambda)],$$

где $D(\lambda)$ и $d(\lambda)$ определены формулами (9) и (10).

Так же, как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что

$$\sigma[\lambda E_{n^2} - S;\ TA - ST + \sum_{i=1}^{m} \exp\{-Sh_i\}\, TA_i;\ TB] =$$

$$= \sigma[\lambda E_{n^2} - S;\ TA - ST + \sum_{i=1}^{m} \exp\{-Sh_i\}\, TA_i;\ TB;\ Tx_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_0^{h_i} \exp\{-S\tau\}\, TA_i \varphi(\tau - h_i)\, d\tau].$$

Учитывая равенства (14), (22) приходим к выводу, что

$$\sigma[\lambda E_{n^2} - S;\ TB] = \sigma[\lambda E_{n^2} - S;\ TB;\ z(nh_m)].$$

Следовательно [3], состояние (22) системы (21) управляемо на интервале $[nh_m; +\infty[$, т. е. [2] существуют момент времени $t_1 > nh_m$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [nh_m; +\infty[$, такие, что $z(t) \equiv 0$ при $t \geqslant t_1$. Тогда из формулы (20) следует, что решение $x(t)$ удовлетворяет равенству (3). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Результаты теоремы 2 легко обобщаются на системы, которые приводятся к системе вида (1) с конечным спектром.

Например, для системы второго порядка

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + A_2 x(t-2h) + Bu(t) \tag{23}$$

можно показать, что если множество

$$\sigma[\lambda E_2 - A - A_1 \exp\{-\lambda h\} - A_2 \exp\{-2\lambda h\};\ B] \tag{24}$$

конечно, то существует линейная обратная связь

$$u(t) = \sum_{i=0}^{6} Q_i x(t - ih) + u_0(t),$$

где Q_i — некоторые постоянные $r \times 2$-матрицы, $u_0(t)$ — новое управление, приводящая систему (23) к системе с конечным спектром. Поэтому из теоремы 1 и 2 следует, что в случае конечности множества (24) состояние

$$x_0(\cdot) = \{x(\tau) = \varphi(\tau),\ -2h \leqslant \tau < 0;\ x(0) = x_0\}$$

системы (23) управляемо тогда и только тогда, когда множество (24) совпадает с множеством

$$\sigma[\lambda E_2 - A - A_1 \exp\{-\lambda h\} - A_2 \exp\{-2\lambda h\};\ B;\ x_0 + \sum_{i=1}^{2} \int_0^{ih} A_i \varphi(\tau - ih) \exp\{-\lambda\tau\} d\tau].$$

Литература

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.

3. Булатов В. И. Вестник Бел. гос. ун-та, серия I, математика, физика, механика, № 3, 1977.

4. Марченко В. М. ДАН СССР, 236, № 5, 1977.

5. Зверкин А. М. Дифференц. уравнения, 9, № 3, 1973.

6. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М., 1975.

7. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.

Поступила в редакцию 13 января 1978 г.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина