УДК 517.925

А. Т. САЗОНОВА

РАЗРЕШИМЫЕ СЛУЧАИ ДЛЯ УПРОЩЕННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ В ПЛОСКОСТИ

Рассмотрена система, описывающая движение четырех частиц в плоскости. С помощью элементарных алгебраических преобразований установлены упрощенные системы, состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок.

Найдены наборы констант межчастичного взаимодействия в двух случаях исследуемой задачи в плоскости, при которых общее решение можно записать в замкнутом (довольно простом) виде.

Получено 26 нелинейных автономных дифференциальных уравнений первого порядка относительно одной из компонент системы, общее решение которых является целым (т. е. эти обыкновенные дифференциальные уравнения обладают свойством Пенлеве), а также 46 нелинейных автономных дифференциальных уравнений первого порядка, общее решение которых содержит логарифм, а значит, данные уравнения не являются уравнениями типа Пенлеве.

Установлены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у исследуемой системы, выделяющие 26 случаев в задаче четырех частиц в плоскости, при которых возможно описание траекторий движения данных частиц.

Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории дифференциальных уравнений, а также в исследованиях проблемы многих тел.

Ключевые слова: движение четырех тел; константа взаимодействия; свойство Пенлеве; упрощенная система.

In the main part consider a system describing the motion of the four bodies in the plane. By elementary algebraic manipulations installed simplified systems, consisting of non-linear differential equations, each of which has a second order.

Get a set of constants of the interparticle interaction in the two cases the problem under investigation in the plane, in which the general solution can be written in a closed (rather simple) form.

Obtained 26 nonlinear autonomous differential equations of first order with respect to one of the components of the system, the general solution of which is an integer, i. e. these ordinary differential equations possess the Painlevé property, as well as 46 autonomous nonlinear first order differential equations, the general solution which contains a logarithm, and therefore, these equations are not the equations of Painlevé type.

Establish necessary and sufficient conditions for the existence of the Painlevé property in studied system, releasing 26 cases in the four-particle in the plane in which the description of the possible trajectories of the particles.

The results can be applied in the analytical theory differential equations, as well as in studies of many-body problem.

Key words: four-body's motion; interaction constant; Painlevé property; the simplified system.

Математическая модель движения N тел в плоскости есть система, состоящая из N обыкновенных дифференциальных уравнений [1]

$$\varsigma_n'' = 2\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{m=N} a_{nm}\frac{\varsigma_n'\varsigma_m'}{\varsigma_n-\varsigma_m},\ n=1,\dots,N. \tag{1}$$

Зависимые переменные $\varsigma_n = \varsigma_n(\tau)$ являются комплексными. Константы взаимодействия a_{nm} априори произвольны, за исключением требования симметрии $a_{nm} = a_{mn}$.

Интерес к исследованию системы (1) вызвал следующий факт: при отождествлении комплексной ς-плоскости с физической плоскостью и при рассмотрении вещественной переменной τ (интерпретируемой как «физическое время») движение N точек ς_n определяется решением плоской задачи многих тел, описываемой ньютоновскими уравнениями движения с интересным свойством периодичности (а именно, среди таких решений задачи многих тел имеется много решений с полностью периодическими траекториями [2]).

Несмотря на кажущуюся простоту формул, аналитического решения данной задачи в общем виде для $N > 3$ пока не найдено.

В настоящей статье рассматривается плоская классическая ньютоновская задача о движении четырех тел.

Из (1) видно, что центр масс [2]

$$Z \equiv Z(\tau),$$

$$Z = \frac{\varsigma_1+\varsigma_2+\varsigma_3+\varsigma_4}{4}$$

движется равномерно:

$$Z'' = 0,\ \ Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau.$$

Положим

$$a_{12} = a_{21} = a,\ a_{13} = a_{31} = c,\ a_{14} = a_{41} = d,$$
$$a_{23} = a_{32} = b,\ a_{24} = a_{42} = e,\ a_{34} = a_{43} = f.$$

Существует также интеграл движения [3]:

$$K = \varsigma_1'\varsigma_2'\varsigma_3'\varsigma_4'(\varsigma_1 - \varsigma_2)^{2a}(\varsigma_2 - \varsigma_3)^{2b}(\varsigma_3 - \varsigma_1)^{2c}(\varsigma_4 - \varsigma_1)^{2d}(\varsigma_2 - \varsigma_4)^{2e}(\varsigma_3 - \varsigma_4)^{2f}.$$

Введем замену переменных:

$$u_n = \varsigma_n - Z,\ n = 1, 2, 3, 4,$$

тогда выполняется условие $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x,\ u_2 = y,\ u_3 = z,\ u_4 = -x - y - z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения (1) при $N = 4$ и интеграл движения K в новых переменных x, y, z:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2d\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2e\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+y+2z}; \end{cases} \tag{2}$$

$$K = (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)(x-y)^{2a}(y-z)^{2b} \times$$
$$\times (z-x)^{2c}(2x+y+z)^{2d}(x+2y+z)^{2e}(x+y+2z)^{2f},$$

где $x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t);\ t = \tau - \tau_0;\ V = Z'(0);\ K = \text{const}.$

Рассмотрим дифференциальную систему шестого порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2d\dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{z})}{2x+z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z} - 2e\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{z})}{x+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2f\dfrac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{z})}{x+2z}, \end{cases} \tag{3}$$

которая является инвариантной при замене переменных $(t, x, y, z) \to (\varepsilon t, x, \varepsilon y, z)$, $\varepsilon \to 0$, ε – параметр, а значит, упрощенной для (2).

Переписывая второе уравнение системы (3) в виде

$$\frac{\ddot{y}}{\dot{y}+V} = -2a\frac{\dot{x}}{x} + 2b\frac{\dot{z}}{z} - 2e\frac{\dot{x}+\dot{z}}{x+z}$$

и интегрируя, получаем

$$\dot{y} = Ax^{-2a}z^{2b}(x+z)^{-2e} - V, \tag{4}$$

где A – постоянная интегрирования.

Рассмотрим теперь первое и третье уравнения системы (3):

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2d\dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{z})}{2x+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2f\dfrac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{z})}{x+2z}. \end{cases} \tag{5}$$

Значения

a	–2	0	0	–2	–2	–1	0	0	–1	–3/2	–3/2	0	–3/2	–3/2	0	0	–1/2	–1/2	–1	0	0
b	0	–2	0	–1	0	–2	–2	–1	0	–3/2	0	–3/2	–1/2	0	–3/2	–1/2	–3/2	0	0	–1	0
e	0	0	–2	0	–1	0	–1	–2	–2	0	–3/2	–3/2	0	–1/2	–1/2	–3/2	0	–3/2	0	0	–1

Система (5) является упрощенной для системы двух дифференциальных уравнений, описывающих движение трех тел в плоскости. Исследованиям систем такого типа посвящены работы [2], [3], в которых получены необходимые условия для существования мероморфных решений у исследуемой системы. Приведем их в виде следующей леммы.

Лемма. *Для того чтобы все решения (1) являлись мероморфными функциями от t, необходимо, чтобы все показатели* $\Gamma, \gamma_n, \beta_n, n=\overline{1,6}$, *определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений*

$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},\ \gamma_n = \frac{1}{1+a_n},\ \beta_n = -2a_n,$$

где

$$a_n \in \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\};\ a_1 = a;\ a_2 = b;\ a_3 = c;\ a_4 = d;\ a_5 = e;\ a_6 = f,$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

В работе [2] в соответствии с вышеприведенной леммой выделено 11 наборов значений констант взаимодействия, при которых соответствующие им системы обладают свойством Пенлеве. Интересно рассмотреть значения констант взаимодействия $c = d = -\frac{1}{2},\ f = 0,$ которые не были исследованы в [2].

Пусть $c = d = -\frac{1}{2},\ f = 0,$ тогда система (5) имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} + \dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{z})}{2x+z}, \\ \ddot{z} = \dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} \end{cases} \tag{6}$$

с первым интегралом

$$K = \frac{\dot{x}\dot{z}(\dot{x}+\dot{z})}{(x-z)(2x+z)}.$$

Непосредственной подстановкой соотношений в (6) убеждаемся, что данная система имеет общее решение вида

$$\begin{aligned} x &= -\frac{K}{3}t^3 + M_1 t^2 + M_2 t + M_3, \\ z &= \frac{K}{6}t^3 + L_1 t^2 + L_3, \end{aligned} \tag{7}$$

где $t = \tau - \tau_0$, τ_0, K, L_1, L_3 – произвольные постоянные; величины M_1, M_2, M_3 определены соотношениями

$$M_1 = \frac{3L_3K^2}{8L_1^{\ 2}} - L_1,\ M_2 = \frac{3L_3K}{2L_1},\ M_3 = L_3. \tag{8}$$

Из леммы и равенств (7) следует, что для наличия у системы (3) при $c = d = -\frac{1}{2},\ f = 0$ свойства Пенлеве необходимо, чтобы a, b, e принимали одно из значений, приведенных в табл. 1.

Рассмотрим теперь второе уравнение системы (3), которое, как ранее было показано, может быть записано в виде (4).

В соответствии с табл. 1 непосредственной подстановкой значений констант взаимодействия a, b, e в уравнение (4) можно записать 41 простейшее дифференциальное уравнение. При этом функции x и z определены равенствами (7).

Таблица 1

константа *a*, *b*, *e*

–1	–1	0	–1/2	–1/2	0	–1/2	0	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	–1	–1	–1	0	–3/2	0	0
–1/2	0	–1	–1	0	–1/2	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	0	–1/2	–1	–1	0	–1	0	–3/2	0
0	–1/2	–1/2	0	–1	–1	0	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	–1/2	–1	0	–1	–1	0	0	–3/2

Заметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, составленные для наборов значений, соответствующих номерам столбцов 1, 3, 5, 9, 11, 14, 18, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 37, 39, 41 из табл. 1, будут обладать свойством Пенлеве. В остальных случаях при интегрировании у решений появляются подвижные трансцендентные особенности. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 1. Для набора значений констант взаимодействия $a = -1$, $b = 0$, $e = 0$ (стб. 19, табл. 1) уравнение (4) имеет вид

$$\dot{y} = Ax^2 - V. \tag{9}$$

Функция x определена равенством (7).
Интегрирование уравнения (9) дает

$$\begin{gathered} y = \frac{AK^2}{63}t^7 - \frac{A}{9}KM_1t^6 + \left(-\frac{2A}{15}KM_2 + \frac{A}{5}M_1^2\right)t^5 + \left(-\frac{A}{6}KM_3 + \frac{A}{2}M_1M_2\right)t^4 + \\ + \left(\frac{2A}{3}M_1M_3 + \frac{A}{3}M_2^2\right)t^3 + AM_2M_3t^2 + \left(AM_3 - V\right)t + B, \end{gathered} \tag{10}$$

где A, B – произвольные постоянные.

Таким образом, при $a = -1,\ b = 0,\ c = d = -\frac{1}{2},\ e = f = 0$ система (3) имеет общее решение (7), (10), где $t = \tau - \tau_0$, τ_0, K, L_1, L_3, A, B – произвольные постоянные, а величины M_1, M_2, M_3 определены соотношениями (8).

Аналогичным образом находим решение для наборов констант (см. табл. 1) из столбцов 1, 3, 5, 9, 11, 14, 18, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 37, 39, 41.

Для остальных наборов значений констант взаимодействия соответствующие им системы не обладают свойством Пенлеве.

Пример 2. Для набора значений констант взаимодействия $a = 0,\ b = 0,\ e = -\frac{1}{2}$ (стб. 29, табл. 1) уравнение (4) примет вид

$$\dot{y} = \frac{A}{z} - V. \tag{11}$$

Функция z определена равенством (7). Пусть α_1, α_2, α_3 − корни полинома z из (7). Тогда, интегрируя уравнение (11), находим

$$y = 6AB\ln(t - \alpha_1) + 6AC\ln(t - \alpha_2)dt + 6AD\ln(t - \alpha_3) - Vt + E,$$

где A, B, C, D, E, V – произвольные постоянные. Отсюда следует, что α_1, α_2, α_3 – трансцендентные точки, а значит, уравнение (11) не обладает свойством Пенлеве. Следовательно, при $a = b = 0,\ c = d = e = -\frac{1}{2}$, $f = 0$ система (3) не обладает свойством Пенлеве.

Аналогичным образом находим, что для наборов констант (см. табл. 1) из столбцов 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 20, 22, 24, 25, 27, 31, 33, 34, 35, 36, 38, 40 соответствующие им системы не обладают свойством Пенлеве.

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема. *Если* $c = d = -\frac{1}{2},\ f = 0,$ *а константы a, b, e принимают одно из значений табл. 2, то система (3) обладает свойством Пенлеве.*

Таблица 2

Наборы значений констант взаимодействия *a*, *b*, *e*

a	–2	0	–2	–1	–3/2	–3/2	–1/2	–1	0	–1	–1/2	–1/2	0	–1/2	–1	–3/2	0
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	–2	–1	–2	–3/2	–1/2	–3/2	0	–1	–1/2	–1	0	–1/2	–1/2	–1	0	–3/2

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М-148).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Calogero F. A solvable n-body problem in the plane // J. Math. Phys. 1996. Vol. 37. P. 1735–1759.
2. Калоджеро Ф. Разрешимая задача трех тел и гипотезы Пенлеве // Теорет. и матем. физика. 2002. Т. 133. С. 149–155.

3. Calogero F., Françoise J.-P., Sommacal M. Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane. II. Analysis of various motions // J. Nonlinear Math. Phys. 2003. Vol. 10. P. 157–214.

Поступила в редакцию 11.03.2014.

Анна Тадеушевна Сазонова – аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы». Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» И. П. Мартынов.