

### **3. АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ С УЧЕТОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И МАГНИТОУПРУГИЕ И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ**

Основы теории электромагнитоупругости отражены в известных работах [6, 41, 43]. Решения различных нестационарных задач, в том числе связанные с анализом закономерностей распространения магнитоупругих волн в неограниченных изотропных и анизотропных средах от точечных источников возмущений, рассматривались в работах [2, 19, 89, 76]. Результаты исследований в этом направлении также представлены в [9, 27]. Вопросам распространения упругих волн в неограниченных анизотропных средах с учетом взаимосвязи механических и электрических свойств посвящены фундаментальные монографии [8, 20]. В третьей части представлены результаты реализации метода слабых разрывов применительно к системам уравнений движения анизотропных сред с учетом пьезоэффекта, системе электродинамических уравнений Максвелла, системам уравнений движения упругой изотропной среды и жидкости, находящихся в магнитном поле с идеальной проводимостью.

#### **3.1. Уравнение характеристик для системы уравнений движения анизотропной среды с учетом пьезоэлектрического эффекта. Материалы кубической системы симметрии**

При исследовании закономерностей упругих волн в анизотропных средах необходимо учитывать пьезоэлектрическую связь между упругими и электрическими свойствами, которая существует в определенных материалах. Пьезоэлектрический эффект состоит в том, что в некоторых кристаллах под действием механических напряжений возникает электрическая поляризация (прямой эффект), а приложенное к кристаллу электрическое поле приводит к его деформации (обратный эффект). Боль-

шинство устройств, преобразующих механическую энергию в электрическую и наоборот, действуют на основе прямого или обратного пьезоэлектрического эффекта. Кроме того, пьезоэлектрический эффект позволяет использовать механические свойства некоторых кристаллов, в частности высокую добротность для фильтрации сигналов в электронике. Электромеханические резонаторы, изготовленные, например, из кварца, включаются непосредственно в электрическую цепь, где их колебания поддерживаются электрическим полем.

При анализе распространения волн в пьезоэлектрических средах в общем случае необходимо решать одновременно уравнения движения и уравнения Максвелла. Решения представляют собой смешанные упруго-электромагнитные волны со скоростью распространения  $V$ , сопровождаемые электрическим полем, и электромагнитные волны со скоростью распространения  $v \approx V \cdot 10^5$ , сопровождаемые механической деформацией [20]. Для первого типа волн можно пренебречь магнитным полем, которое создается электрическим, перемещающимся со скоростью, малой по сравнению со скоростью электромагнитных волн. Таким образом, даже в сильных пьезоэлектрических средах взаимодействие между упругими и электромагнитными волнами оказывается слабым из-за большой разности соответствующих скоростей. Поэтому, распространение волн можно рассматривать независимо, в квазистатическом приближении. В этом случае уравнения движения можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j,k,l=1}^3 A_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{i,j,k=1}^3 e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$\sum_{j,k,l=1}^3 e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$
(3.1)

Здесь  $A_{ijkl}$  – постоянные упругости;  $e_{jkl}$  – пьезоэлектрические модули;  $\varepsilon_{jk}$  – диэлектрические проницаемости;  $u_l$  – компоненты вектора перемещений;  $\rho$  – плотность среды;  $\Phi$  – электрический потенциал.

Пьезоэлектрические модули  $e_{ijk}$  симметричны по двум последовательным индексам  $j$  и  $k$  ( $e_{ijk} = e_{ikj}$ ), поэтому число независимых пьезоэлектрических модулей составляет 18. Пара двух последних индексов  $j$  и  $k$  принимает шесть различных значений, обозначаемых числом  $\alpha$  согласно следующему правилу:

$$e_{ijk} = e_{i\alpha}, \quad i, k = \overline{1,3}, \quad (j, k) \rightarrow \alpha, \quad \alpha = \overline{1,6},$$

$$(1, 1) \rightarrow 1, (2, 2) \rightarrow 2, (3, 3) \rightarrow 3, (2, 3) \rightarrow 4, (1, 3) \rightarrow 5, (1, 2) \rightarrow 6.$$

Пьезоэлектрические модули с двумя индексами можно представить в виде таблицы, содержащей три строки и шесть столбцов [20]:

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

Количество компонент таблицы (3.2) соответствует числу независимых пьезоэлектрических модулей для класса  $\bar{1}$  триклинной системы симметрии. В случае других систем симметрии, ограничения, накладываемые симметрией кристалла на количество независимых пьезоэлектрических модулей, позволяет значительно уменьшить число компонент матрицы (3.2).

Количество диэлектрических постоянных для анизотропных сред различных систем симметрии не превышает трех. Так, для триклинной, моноклинной и ромбической анизотропных сред не равными нулю являются константы  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  и  $\epsilon_{33}$ , для тригонально, тетрагонально и гексагонально анизотропных сред нулю не равны две константы  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$  и  $\epsilon_{33}$ , для кубически анизотропных сред – одна ( $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ ).

Зададим начальные условия к системе (3.1) на поверхности (1.1) и перейдем к новым переменным по схеме (1.5). Подставим выражения (1.6) в уравнения (3.1) и выпишем те члены, которые содержат производные второго порядка  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2}$  и  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2}$ , так как только они будут важны для последующего. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,l=1}^3 A_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial g^2} p_j p_k + \sum_{k,i,j=1}^3 e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2} p_j p_k - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2} p_0^2 + \dots = 0, \\ \sum_{j,k,l=1}^3 e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial g^2} p_j p_k - \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jk} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2} p_j p_k + \dots = 0, i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $p_i = \partial z / \partial x_i$ ,  $p_0 = \partial z / \partial t$ .

Из начальных условий (3.2) можно найти все частные производные второго порядка, кроме производной второго порядка по  $g$ . Недостающие производные можно определить из четырех уравнений (3.2), кото-

рые можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно производных  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2}$  и  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ .

Чтобы упростить систему (3.2) выразим из ее четвертого уравнения частную производную второго порядка от электрического потенциала  $\Phi$  и подставим ее в первые три уравнения. После несложных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{j,k,l=1}^3 e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial g^2} p_j p_k}{\sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk} p_j p_k} - \sum_{i,j,k=1}^3 e_{kij} p_j p_k + \\ & + \sum_{j,k,l=1}^3 A_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial g^2} p_j p_k - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial g^2} p_0^2 + \dots = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Частные производные второго порядка могут иметь разрывы на поверхности (1.1) только в том случае, если выполняется равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при этих производных в системе (3.4):

$$\det \|w_{il}\|_{3 \times 3} = 0. \quad (3.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{ii} &= \sum_{j,k=1}^3 \left( A_{ijki} p_j p_k + e_{jki} e_{kij} p_j^2 p_k^2 S \right) - \rho p_0^2, \\ w_{il} &= \sum_{j,k=1}^3 \left( A_{ijkl} p_j p_k + e_{jkl} e_{kij} p_j^2 p_k^2 S \right), \quad \frac{1}{S} = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk} p_j p_k, \quad i \neq l = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Раскрывая определитель (3.5), после несложных преобразований будем иметь уравнение вида (1.9), коэффициенты которого определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_0 &= -1, \quad q_1 = \sum_{j,k,i=1}^3 \left( a_{ijki} p_j p_k + s K_{jki} K_{kij} p_j^2 p_k^2 \right), \\ q_2 &= \sum_{j,k=1}^3 \left( \left( \sum_{i,l=1}^3 \left( a_{ijkl} a_{ljki} - a_{ijki} a_{ljkl} \right) \right) - s \left( \sum_{i,l=1}^3 a_{ijki} K_{klj} K_{jkl} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^3 a_{ijki} K_{kij} K_{jki} - \left( \sum_{i,l=1}^3 a_{ijkl} K_{kij} K_{jkl} - \sum_{i=1}^3 a_{ijki} K_{jki} K_{kij} \right) p_j p_k \Big) p_j^2 p_k^2 \Big), \\
q_3 = & \sum_{j,k=1}^3 \left( \frac{1}{3} \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl} a_{ljk m} a_{ijk m} - \frac{1}{2} \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl}^2 a_{mjkm} + \frac{1}{6} \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijki} a_{ljk l} a_{mjkm} \right) \times \\
& \times p_j^3 p_k^3 - \frac{s}{2} \sum_{j,k=1}^3 \left( \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl}^2 K_{jkm} K_{kmj} + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kij} - \right. \\
& \left. - \sum_{i,l=1}^3 \left( a_{ijkl}^2 K_{jkl} K_{klj} + a_{ijki}^2 K_{jkl} K_{klj} + a_{ijkl}^2 K_{jki} K_{kij} \right) \right) p_j^4 p_k^4 + \\
& + \frac{s}{2} \sum_{k,j=1}^3 \left( \sum_{i,m,l=1}^3 a_{ijki} a_{ljk l} K_{jkm} K_{kjm} + \sum_{i,m=1}^3 \left( 2 a_{ijki} a_{mjkm} K_{jki} K_{kji} - \right. \right. \\
& \left. \left. - a_{ijki}^2 K_{jkm} K_{kjm} \right) + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kji} \right) p_j^4 p_k^4 + \sum_{k,j=1}^3 \left( \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl} a_{mjkl} K_{jkm} K_{kij} - \right. \\
& \left. - \sum_{i,m=1}^3 \left( a_{ijkm}^2 K_{jki} K_{kij} + a_{ijki} a_{ijk m} K_{jkm} K_{kij} + a_{ijki} a_{ijk m} K_{jki} K_{kmj} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kij} \right) p_j^4 p_k^4 - \\
& - s \sum_{j,k=1}^3 \left( \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl} a_{mjkm} K_{jkl} K_{kij} - \sum_{i,m=1}^3 \left( a_{ijki} a_{mjkm} K_{jki} K_{kij} + \right. \right. \\
& \left. \left. + a_{ijki} a_{ijk m} K_{jki} K_{kmj} + a_{ijki} a_{ijk m} K_{jkm} K_{kij} \right) + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kij} \right) p_j^4 p_k^4, \\
s = & \sum_{j,k=1}^3 k_{jk} p_j p_k,
\end{aligned}$$

Здесь  $a_{ijkl} = A_{ijkl} / A_{2323}$ ,  $K_{ijk} = e_{ijk} / \sqrt{A_{2323} \epsilon_{11}}$  - константы электромеханической связи,  $k_{jk} = \epsilon_{jk} / \epsilon_{11}$  - безразмерные диэлектрические проницаемости.

Безразмерные координаты  $x_s^{(n)}/(c_2 t)$ ,  $s, n = \overline{1, 3}$  точек пьезоактивной анизотропной среды, до которых дошло волновое возмущение, определим в соответствии с формулами (1.25) с коэффициентами следующего вида:

$$\begin{aligned}
q_{1j} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left( a_{ijki} p_k + s K_{jki} K_{kij} p_j p_k^2 (2 - s k_{jk} p_j p_k) \right), \\
q_{2j} &= 2 \sum_{j,k=1}^3 \left( \sum_{i,l=1}^3 (a_{ijkl} a_{ljk} - a_{ijki} a_{lkl}) p_j p_k^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{i,l=1}^3 (a_{ijki} K_{klj} K_{jkl} + a_{ijkl} K_{kij} K_{jkl}) - \sum_{i=1}^3 (a_{ijki} K_{kij} K_{jki}) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( 1 - \frac{1}{2} p_j p_k s k_{jk} \right) \right) s p_j^2 p_k^3, \\
q_{3j} &= 3 \sum_{j,k=1}^3 \left( \frac{1}{3} \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl} a_{ljk} a_{ijkm} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl}^2 a_{mjkm} + \frac{1}{6} \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijki} a_{ljk} a_{mjkm} \right) p_j^2 p_k^3 - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \left( \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl}^2 K_{jkm} K_{kmj} + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kij} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i,l=1}^3 (a_{ijkl}^2 K_{jkl} K_{klj} + a_{ijki}^2 K_{jkl} K_{klj} + a_{ijkl}^2 K_{jki} K_{kij}) \right) (4 - k_{jk} p_j p_k s) p_j^3 p_k^4 s + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^3 \left( \sum_{i,m,l=1}^3 a_{ijki} a_{ljk} K_{jkm} K_{kjm} + \sum_{i,m=1}^3 (2 a_{ijki} a_{mjkm} K_{jki} K_{kji} - \right. \\
&\quad \left. - a_{ijki}^2 K_{jkm} K_{kjm}) + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kji} \right) (4 - s k_{jk} p_j p_k) s p_j^3 p_k^4 + \\
&\quad + 4 \sum_{k,j=1}^3 \left( \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl} a_{mjkl} K_{jkm} K_{kij} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,m=1}^3 \left( a_{ijkm}^2 K_{jki} K_{kij} + a_{ijki} a_{ijkm} K_{jkm} K_{kij} + a_{ijki} a_{ijkm} K_{jki} K_{kmj} \right) + \\
& \quad + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kij} \Big) p_j^3 p_k^4 - \sum_{j,k=1}^3 \left( \sum_{i,l,m=1}^3 a_{ijkl} a_{mjkm} K_{jkl} K_{kij} - \right. \\
& - \sum_{i,m=1}^3 \left( a_{ijki} a_{mjkm} K_{jki} K_{kij} + a_{ijki} a_{ijkm} K_{jki} K_{kmj} + a_{ijki} a_{ijkm} K_{jkm} K_{kij} \right) + \\
& \quad \left. + 2 \sum_{i=1}^3 a_{ijki}^2 K_{jki} K_{kij} \right) (4 - s k_{jk} p_j p_k) s p_j^3 p_k^4.
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай кубической системы симметрии. Для кристаллов этой системы симметрии количество независимых пьезоэлектрических модулей равняется одному и матрица (3.2) принимает вид:

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 000e_{14} & 0 & 0 \\ 000 & 0 & e_{14} & 0 \\ 000 & 0 & 0 & e_{14} \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

С учетом матрицы (3.6) и равенства  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$  для кубически анизотропных пьезоактивных материалов из уравнений (3.1) будем иметь следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned}
& \left( A_{44}\Delta + (A_{11} - A_{12} - 2A_{44}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) u_i + \\
& + (A_{12} + A_{44}) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + e_{14} \sum_{j \neq k=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad (3.7) \\
& e_{14} \sum_{j \neq k=1}^3 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{11} \Delta \Phi = 0, \quad i = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

После соответствующих преобразований коэффициенты характеристического уравнения (1.9) для системы (3.7) представим в виде:

$$q_0 = -1, \quad q_1 = (2 + a_{11})\tau_1 + \frac{4}{\tau_1} K_{14}^2 \tau_2,$$

$$\begin{aligned}
q_2 = & \left( (a_{11} + a_{12})(a_{12} - a_{11} + 2) - 8K_{14}^2 \right) \tau_2 - \\
& - (1 + 2a_{11}) \tau_1^2 - \frac{4}{\tau_1} K_{14}^2 (a_{11} - 1) (\tau_1 \tau_2 - 3\tau_3) + \frac{24}{\tau_1} (a_{12} + 1) K_{14}^2 \tau_3, \\
q_3 = & a_{11} \tau_1^3 + 4(a_{11} - 1) K_{14}^2 (\tau_1 \tau_2 - 3\tau_3) + \frac{4}{\tau_1} K_{14}^2 (a_{11} + a_{12})(a_{11} - a_{12} - 2) \times \\
& \times \left( \tau_2^2 - 2\tau_1 \tau_2 \right) + \left( (a_{11} + a_{12})(a_{11} - a_{12} - 2) + 4K_{14}^2 \right) \tau_1 \tau_2 + \\
& + \left( (a_{11} - a_{12} - 2)^2 (a_{11} + 2a_{12} + 1) - 8(1 + a_{12})(a_{11} + 1 - a_{12}) K_{14}^2 \right) \tau_3,
\end{aligned}$$

где  $\tau_1 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ ;  $\tau_2 = p_1^2 p_2^2 + p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_3^2$ ;  $\tau_3 = p_1^2 p_2^2 p_3^2$ .

Решение характеристического уравнения найдем по формулам (1.17). Здесь по-прежнему индекс  $i=1$  соответствует скорости распространения квазипродольной волны,  $i=2, 3$  - скоростям квазипоперечных волн. Анализ поверхностей обратных скоростей, выполненный для кубически анизотропных пьезоэлектрических материалов, показывает, что для арсенида галлия поверхности имеют вид фигур, представленных на рис. 1.1, для германата висмута – фигур, представленных на рис. 1.2. Чтобы оценить влияние пьезоэлектрического эффекта на фазовые скорости квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся в пьезоэлектриках кубической системы симметрии, рассмотрим зависимости скоростей от угла наклона нормали к волновому фронту в различных плоскостях, проходящих через начало координат. Поскольку результаты таких исследований в координатных плоскостях отражены в монографии [20], проанализируем зависимости  $v_i(\alpha)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  в плоскости  $x'_1 = 0$  (те же результаты получим в плоскости  $x'_2 = 0$ ; система координат  $x'_1 x'_2 x_3$ ). Заметим также, что в этих плоскостях влияние пьезоэлектрического эффекта на распространение упругих волн наиболее значительно. На рис. 3.1 представлены зависимости отношений  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  для скоростей квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в плоскости  $x'_1 = 0$  германата висмута ( $A_{11} = 128$ ,  $A_{12} = 30.5$ ,  $A_{44} = 25.5$  ГПа,  $e_{14} = 0.99$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\epsilon_{11} = 34.2 \cdot 10^{-11}$  Ф/м, числовые данные взяты из монографии [20]). Здесь  $v_{0i}$  - скорости распространения упругих волн без учета пьезоэлектрического эффекта.



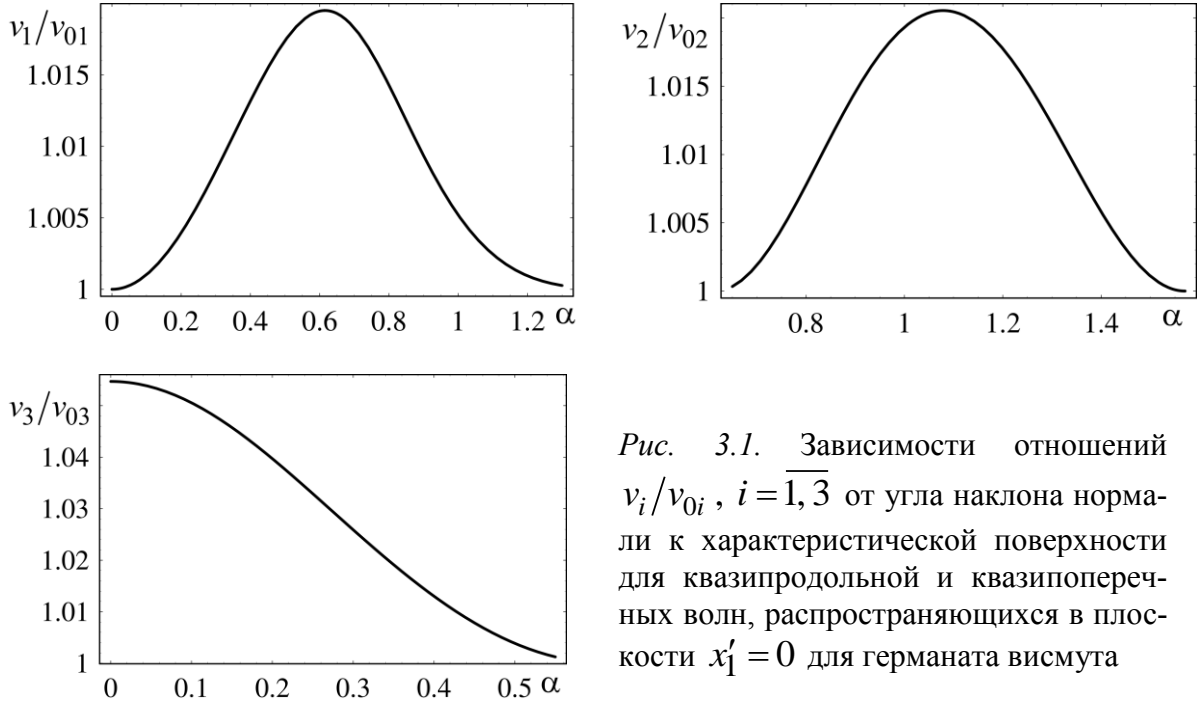


Рис. 3.1. Зависимости отношений  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  от угла наклона нормали к характеристической поверхности для квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в плоскости  $x'_1 = 0$  для германата висмута

Из рисунка 3.1 видно, что в плоскости  $x'_1 = 0$  пьезоэлектрический эффект оказывает влияние на распространение всех упругих волн, тогда как в координатных плоскостях пьезоактивной оказывается только квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_3$ . Максимальное увеличение скорости  $v_1$  и  $v_2$  за счет пьезоэффекта составляет  $\approx 2\%$ , скорости  $v_3$  -  $5.5\%$ . Сравнительный анализ соответствующих зависимостей  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , выполненный для арсенида галлия ( $A_{11} = 118.8$ ,  $A_{12} = 53.8$ ,  $A_{44} = 59.4$  ГПа,  $e_{14} = -0.16$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\varepsilon_{11} = 9.73 \cdot 10^{-11}$  Ф/м []) и германата висмута в плоскости  $x'_1 = 0$ , показывает, что увеличение фазовых скоростей распространения упругих волн в арсениде галлия менее значительно, чем в германате висмута.

Координаты точек фронтов пьезоактивных квазипродольных и квазипоперечных волн найдем в соответствии с формулами (1.25) с коэффициентами  $\hat{q}_{ki}$ ,  $i, k = \overline{1, 3}$ , следующего вида

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1i} &= (2 + a_{11})\hat{\tau}_{1i} + 4K_{14}^2(\hat{\tau}_{2i} - \hat{\tau}_{1i}\tau_2), \\ \hat{q}_{2i} &= \left( (a_{11} + a_{12})(a_{12} - a_{11} + 2) - 8K_{14}^2 \right) \tau_{2i} - 2(1 + 2a_{11})\tau_{1i} - \\ &- 24K_{14}^2(a_{12} + 1)\left( (a_{11} - 1)\left( (\tau_{1i}\hat{\tau}_2 + \tau_{2i} - 3\tau_{3i}) - (\hat{\tau}_2 - 3\hat{\tau}_3)\tau_{1i} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+\hat{\tau}_3\tau_{1i} - \tau_{3i}),$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{3i} = & 3a_{11}\tau_{1i} + \left( (a_{11} - a_{12} - 2)(a_{11} + a_{12}) + 4K_{14}^2 \right) (\tau_{1i}\hat{\tau}_2 + \tau_{2i}) + \\ & + 4(a_{11} - 1)K_{14}^2 (\tau_{1i}\hat{\tau}_2 + \tau_{2i} - 3\tau_{3i}) + \\ & + \left( (a_{11} - a_{12} - 2)^2 (a_{11} + 2a_{12} + 1) - 8(1 + a_{12})(a_{11} + 1 - b)K_{14}^2 \right) \tau_{3i} + \\ & + 8K_{14}^2 (a_{11} + a_{12})(a_{11} - a_{12} - 2) \left( (\hat{\tau}_2\tau_{2i} - (\tau_{1i}\hat{\tau}_3 + \tau_{3i})) - \tau_{1i}(\hat{\tau}_2^2 - 2\hat{\tau}_3) \right), \end{aligned}$$

где  $\hat{\tau}_2 = n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2$ ;  $\hat{\tau}_3 = n_1^2 n_2^2 n_3^2$ ,  $\tau_{1i} = 2n_i$ ,  $\tau_{2i} = 2n_i(\hat{\tau}_1 - n_i^2)$ ,  $\tau_{3i} = 2n_i(\hat{\tau}_2 - n_i^2(1 - n_i^2))$ ,  $n_i$  – направляющие косинусы нормали к волновой поверхности,  $i = \overline{1, 3}$ .

Построения волновых поверхностей, выполненные для арсенида галлия и германата висмута, показывают, что соответствующие волновые фронты совпадают с соответствующими поверхностями, представленными на рис. 1.3 и 1.4 соответственно. Чтобы оценить влияние пьезоэлектрического эффекта на изменение формы волнового фронта, рассмотрим зависимости лучевых скоростей распространения квазипродольной и квазипоперечных волн в плоскости  $x'_1 = 0$  от угла наклона нормали к волновой поверхности  $\alpha$ . Безразмерные лучевые скорости  $g_i = G_i/c_2$  с помощью формул (1.25) определим следующим образом:

$$g_i = \frac{1}{t} \sqrt{\left(x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2^{(i)}\right)^2 + \left(x_3^{(i)}\right)^2}. \quad (3.8)$$

На рис. 3.2 представлены зависимости отношений  $g_i/g_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , от угла наклона нормали к волновой поверхности для лучевых скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся в плоскости  $x'_1 = 0$  германата висмута (числовые данные прежние). Заметим, что  $g_{0i}$  – лучевая скорость упругой волны без учета пьезоэффекта.

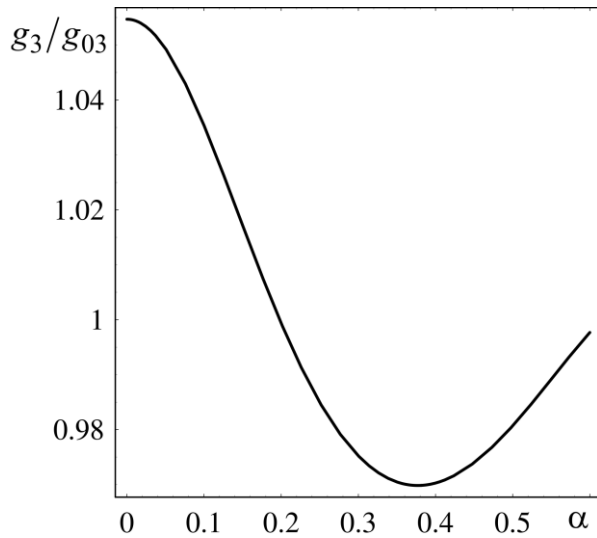
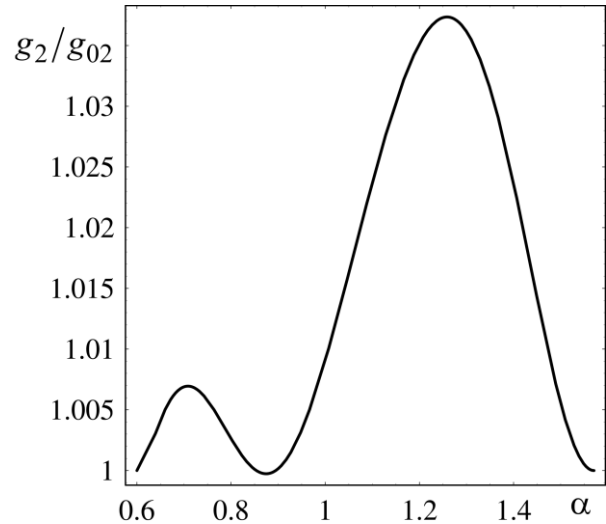
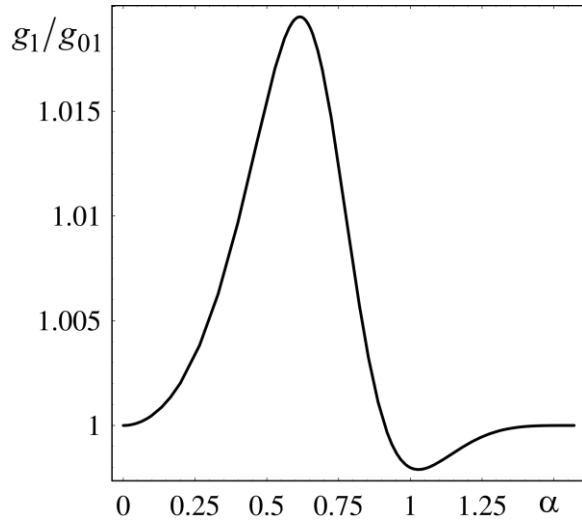


Рис. 3.2. Зависимости отношений лучевых скоростей  $g_i/g_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  от угла наклона нормали к характеристической поверхности  $\alpha$  для квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в плоскости  $x'_1 = 0$

Как следует из рисунка 3.2, влияние пьезоэлектрического эффекта в плоскости  $x'_1 = 0$  приводит как к увеличению, так и уменьшению лучевой скорости распространения квазипродольной волны и квазипоперечной волны, имеющей скорость  $g_3$ . Максимальное увеличение скорости для этих волн составляет 2 и 4.75%, уменьшение – 0.3 и 2.5%. Таким образом, фронт квазипродольной и одной из квазипоперечных пьезоактивных волн может как опережать, так и отставать от соответствующего фронта чисто упругой волны в зависимости от угла наклона нормали  $\alpha$ . Лучевая скорость  $g_2$  квазипоперечной волны с учетом пьезоэффекта для любых значений угла  $\alpha$  больше скорости  $\tilde{g}_2$ , определяемой без учета пьезоэффекта. Следовательно, волновой фронт квазипоперечной волны, распространяющейся с фазовой скоростью в плоскости  $x'_1 = 0$  германата

висмута, опережает фронт соответствующей чисто упругой волны. Отметим также, что сравнительный анализ отношений скоростей  $g_i/v_i$  показывает, что выполняется  $g_i/v_i \geq 1$  для одних и тех же значений угла наклона нормали к характеристической поверхности.

Рассмотрим влияние пьезоэлектрического эффекта на ориентацию вектора прерывности, характеризующего типы волновых фронтов, распространяющихся в кубически анизотропной среде. Для этого представим решение системы (3.7) в следующем виде:

$$\vec{u} = \vec{h}f(B), \Phi = h^* f(B), \quad (3.9)$$

где  $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$  - вектор прерывности,  $h^*$  - коэффициент прерывности,

$B = \sum_{k=1}^3 p_k x_k - p_0 t = \sqrt{\tau_1} \left( \sum_{k=1}^3 n_k x_k - Vt \right)$  - фаза,  $V$  - фазовая скорость рас-

пространения волны,  $n_k$  - направляющие косинусы нормали к волновой поверхности.

Подставляя выражения (3.9) в систему (3.7), после очевидных преобразований получим систему однородных алгебраических уравнений относительно компонент вектора прерывности:

$$\begin{aligned} & \left( 1 + (a_{11} - a_{12} - 2)n_i^2 - v^2 \right) h_i + (a_{12} + 1)n_i \sum_{k=1}^3 h_k n_k + \\ & + 4K_{14}^2 n_j n_k (h_1 n_2 n_3 + h_2 n_1 n_3 + h_3 n_1 n_2) = 0, i \neq j \neq k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Чтобы определить компоненты вектора прерывности, разделим уравнения (3.10) на  $h_1$  и одно из них заменим условием нормировки  $\sum_{k=1}^3 h_k^2 = 1$

[45]. Решение полученной системы найдем в координатной плоскости  $x_3 = 0$  (принимая  $n_3 = 0$ ):

$$\begin{aligned} h_1^{(i)} &= \frac{(1 + a_{12})n_1 n_2}{d}, h_2^{(i)} = \frac{v_i^2 - a_{11}n_1^2 - n_2^2}{d}, i = \overline{1, 3}, \\ d &= \sqrt{v_i^4 + a_{11}^2 n_1^4 + 2a_{11}n_1^2 n_2^2 - 2v_i^2 (a_{11}n_1^2 + n_2^2) +} \\ & \quad + n_2^2 \left( (1 + a_{12})^2 n_1^2 + n_2^2 \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь  $v_i$  - скорость распространения упругой волны в плоскости  $x_3 = 0$ ; индекс  $i=1$  соответствует квазипродольной волне,  $i=2, 3$  - квазипоперечным волнам.

Скорости  $v_i$  в формулах (3.11) определим на основании выражений (1.17) следующим образом:

$$v_k = \sqrt{\frac{(a_{11} + 1) - (-1)^k \sqrt{(a-1)^2 (n_1^2 - n_2^2)^2 + 4(a_{12} + 1)^2 n_1^2 n_2^2}}{2}}, \quad (3.12)$$

$$v_3 = \sqrt{1 + 4K_{14}^2 n_1^2 n_2^2}, \quad k = 1, 2.$$

Отсюда следует, что в плоскости  $x_3 = 0$  пьезоактивной является только квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_3$ . Поэтому далее исследуем зависимость тангенса угла  $\gamma_3$  между нормалью к волновому фронту и вектором прерывности  $\vec{h}^{(3)}$ . Соответствующую зависимость найдем согласно следующему выражению:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{n_2 h_1 - n_1 h_2}{n_1 h_1 + n_2 h_2}. \quad (3.13)$$

Последовательно подставляя в формулу (3.13) соотношения (3.11) для компонент вектора прерывности и (3.12) для скорости  $v_3$  получим

$$\operatorname{tg} \gamma_3 = \frac{a_{11} n_1^2 - 1 + (2 + a_{12} - 4K_{14}^2 n_1^2) n_2^2}{(2 - a_{11} + a_{12} + 4K_{14}^2 n_2^2) n_1 n_2}. \quad (3.14)$$

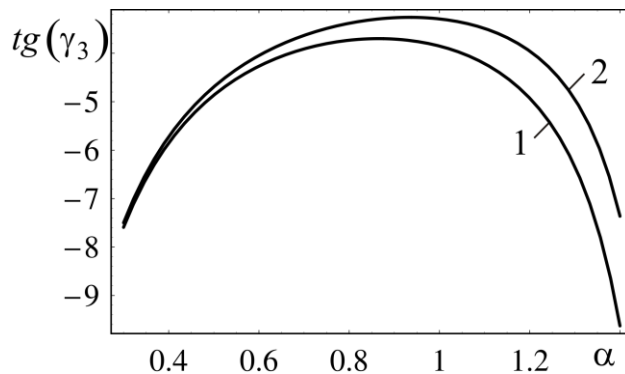


Рис. 3.3. Зависимости тангенса  $\operatorname{tg}(\gamma_3)$  угла между нормалью к волновому фронту и вектором прерывности  $\vec{h}^{(3)}$  для германата висмута в плоскости  $x_3 = 0$ : 1 - с учетом пьезоэффекта; 2 - без учета пьезоэффекта

Зависимость  $tg(\gamma_3)$  от угла наклона нормали к волновому фронту, принадлежащему промежутку  $(0.3, 1.4)$ , для германата висмута с учетом и без учета пьезоэффекта представлена на рис. 3.3 (числовые данные прежние).

Из рисунка 3.3 видно, что пьезоэлектрический эффект оказывает влияние на ориентацию вектора прерывности  $\vec{h}^{(3)}$  в плоскости  $x_3 = 0$ . Угол  $\gamma_3$  между нормалью и вектором прерывности для пьезоактивной квазипоперечной волны возрастает по сравнению с углом  $\gamma_3$  для соответствующей чисто упругой волны. Поэтому можно сделать вывод о том, что существование пьезоэлектрической связи между упругими и электрическими свойствами германата висмута приводит к ослаблению анизотропии упругих свойств.

### 3.2. Анализ волновых движений в тригонально анизотропных средах с учетом пьезоэлектрического эффекта

Тригонально анизотропные среды характеризуются наличием оси третьего порядка (класс 3). Это приводит к тому, что матрица пьезоэлектрических модулей (3.2) принимает следующий вид []:

$$e_{i\alpha}^{tr_1} = \begin{vmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & e_{24} & -e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & -e_{14} & -e_{11} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

Помимо этого, тригонально анизотропные среды могут характеризоваться наличием оси второго порядка, параллельной оси  $x_1$ , а также плоскостью симметрии перпендикулярной к оси  $x_1$ . Для этих случаев количество пьезоэлектрических модулей понижается до двух (тригональные кристаллы класса 32) и четырех (тригональные кристаллы класса 3m) соответственно []:

$$e_{i\alpha}^{tr_2} = \begin{vmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & -e_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

$$e_{i\alpha}^{tr_3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.17)$$

Независимыми диэлектрическими проницаемостями тригонально анизотропной среды являются  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{33}$ . Поскольку более практически востребованными являются тригональные кристаллы классов  $32$  и  $3m$  (ниобат лития, танталат лития,  $\alpha$ -кварц), далее рассмотрим распространение волн, возбуждаемых точечным источником возмущений, в материалах этих классов симметрии.

Для кристаллов тригональной системы симметрии класса  $32$  систему уравнений движения в отсутствие массовых сил представим в виде:

$$\begin{aligned}
& \left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_1 + 2A_{14} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( A \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + B \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = e_{11} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \Phi, \\
& \left( A \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_2 + A_{14} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_3 + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( A \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + B \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \tag{3.18} \\
& = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( 2e_{11} \frac{\partial}{\partial x_2} - e_{14} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \Phi, \\
& e_{14} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( A_{44} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + A_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_3 + \\
& e_{11} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) u_1 - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + e_{14} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \\
& + B \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + A_{14} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0. \\
& = \varepsilon_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \Phi + \varepsilon_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}$$

где  $A = (A_{11} + A_{12})/2$ ,  $B = A_{13} + A_{44}$ .

После соответствующих преобразований коэффициенты характеристического уравнения (1.9) для системы (3.18) представим в виде

$$\begin{aligned}
q_1 &= \sum_{i=1}^3 s_i, \quad q_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^2 - s_i s_j) + \sum_{i=4}^6 s_i^2, \\
q_3 &= s_1 s_2 s_3 + 2s_4 s_5 s_6 - s_1 s_6^2 - s_2 s_5^2 - s_3 s_4^2. \\
s_1 &= c_{11} p_1^2 + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12}) p_2^2 + p_3 (2a_{14} p_2 + c_{44} p_3) + \frac{1}{d} K_{11}^2 (p_1^2 - p_2^2)^2, \\
s_2 &= c_{11} p_2^2 + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12}) p_1^2 + p_3 (2a_{14} p_2 + c_{44} p_3) + \frac{1}{d} p_1^2 (K_{14} p_3 - 2K_{11} p_2)^2, \\
s_3 &= a_{33} p_3^2 + a_{44} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{d} K_{14}^2 p_1^2 p_2^2, \\
s_4 &= \frac{p_1}{2} ((a_{11} + a_{12}) p_2 + 4a_{14} p_3) - \frac{1}{d} K_{11} p_1 (2K_{11} p_2 - K_{14} p_3) (p_1^2 - p_2^2), \\
s_5 &= p_1 ((a_{13} + a_{44}) p_3 + 2a_{14} p_2) + \frac{1}{d} K_{11} K_{14} p_1 p_2 (p_1^2 - p_2^2), \\
s_6 &= a_{14} (p_1^2 - p_2^2) + (a_{13} + a_{44}) p_2 p_3 + \frac{1}{d} K_{14} (K_{14} p_3 - 2K_{11} p_2) p_1^2 p_2, \\
d &= p_1^2 + p_2^2 + k_{33} p_3^2.
\end{aligned}$$

Разделив уравнение (1.9) с выше приведенными коэффициентами на  $\tau_1^3$ , получим уравнение относительно безразмерной скорости распространения пьезоактивных волн вида (1.16). Найдем решение этого уравнения по формулам (1.17) и выполним построение поверхностей обратных скоростей для квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в  $\alpha$ -кварце. Результаты построения представлены на рис. 3.4. Упругие и пьезоэлектрические свойства материала характеризуются следующими постоянными:  $A_{11} = 86,7$ ;  $A_{12} = 7$ ;  $A_{13} = 11,9$ ;  $A_{33} = 107,2$ ;  $A_{44} = 57,9$  ГПа;  $e_{11} = 0,171$ ;  $e_{14} = -0,04$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\varepsilon_{11} = 3,92 \cdot 10^{-11}$ ;  $\varepsilon_{33} = 4,1 \cdot 10^{-11}$  Ф/м [20].



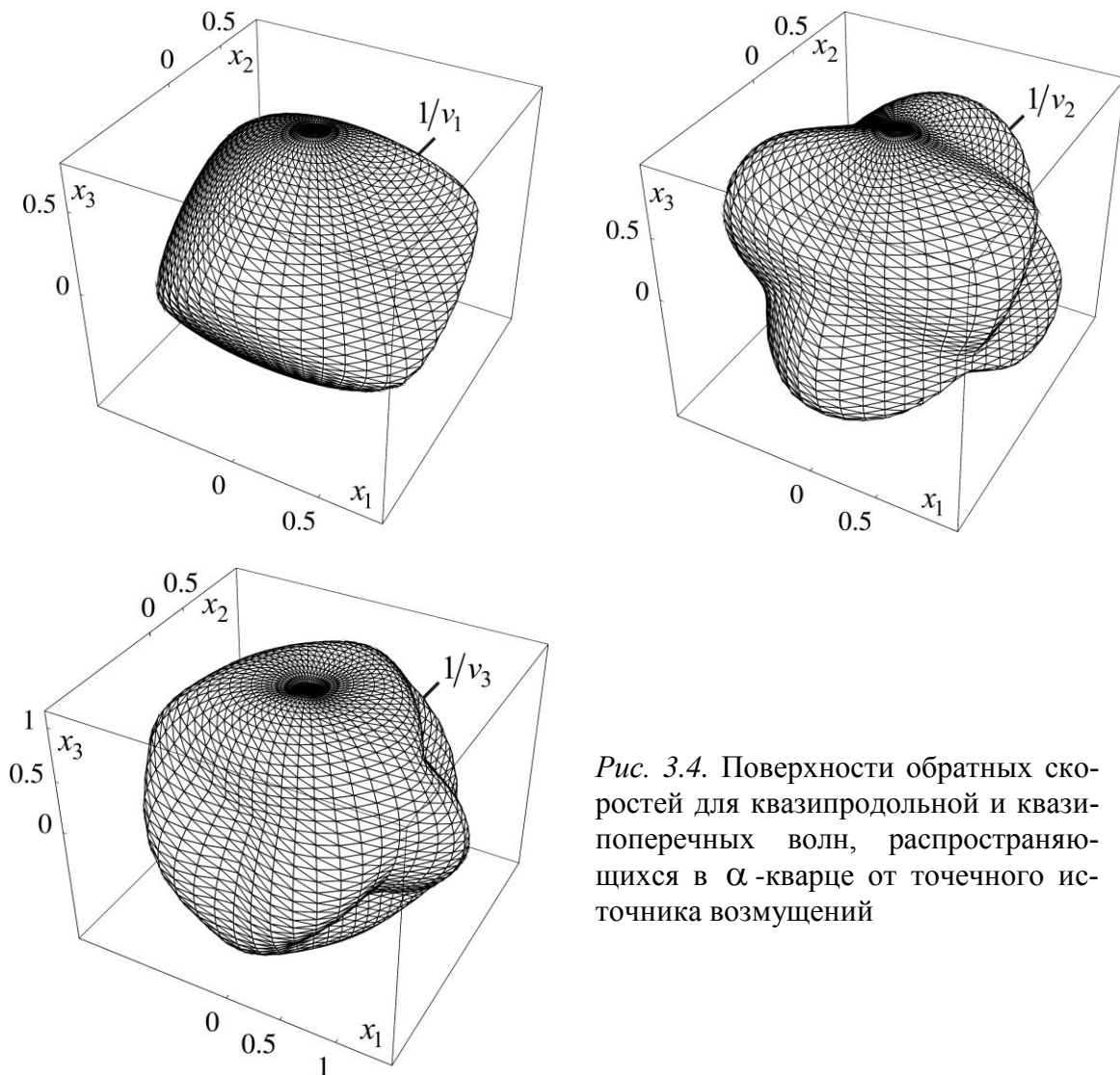


Рис. 3.4. Поверхности обратных скоростей для квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в  $\alpha$ -кварце от точечного источника возмущений

Для количественной оценки влияния пьезоэлектрического эффекта на фазовые скорости распространения упругих волн, рассмотрим зависимости фазовых скоростей квазипродольной и квазипоперечных волн в плоскостях, проходящих через начало координат.

На рис. 3.5 представлены зависимости отношений фазовых скоростей распространения квазипродольных и квазипоперечных волн  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  для различных плоскостей  $\alpha$ -кварца ( $v_{0i}$  - фазовая скорость упругой волны без учета пьезоэффекта). При построении принимаются прежние числовые данные.

Как следует из рис. 3.5, пьезоэлектрический эффект приводит к незначительному увеличению фазовой скорости распространения упругих волн в  $\alpha$ -кварце. Максимальное увеличение скорости ( $\approx 0.95\%$ ) наблю-

дается в плоскости  $x_1 = 0$  при распространении квазипоперечной волны, имеющей скорость  $v_3$ . В плоскости  $x_1 = 0$  пьезоэлектрический эффект не оказывает влияния на распространение квазипродольной волны и квазипоперечной волны, скорость которой равна  $v_2$ . При распространении другой квазипоперечной волны в плоскости  $x_2 = 0$  максимальное увеличение скорости пьезоактивной волны по сравнению со скоростью чисто упругой волны составляет  $\approx 0.1\%$ .

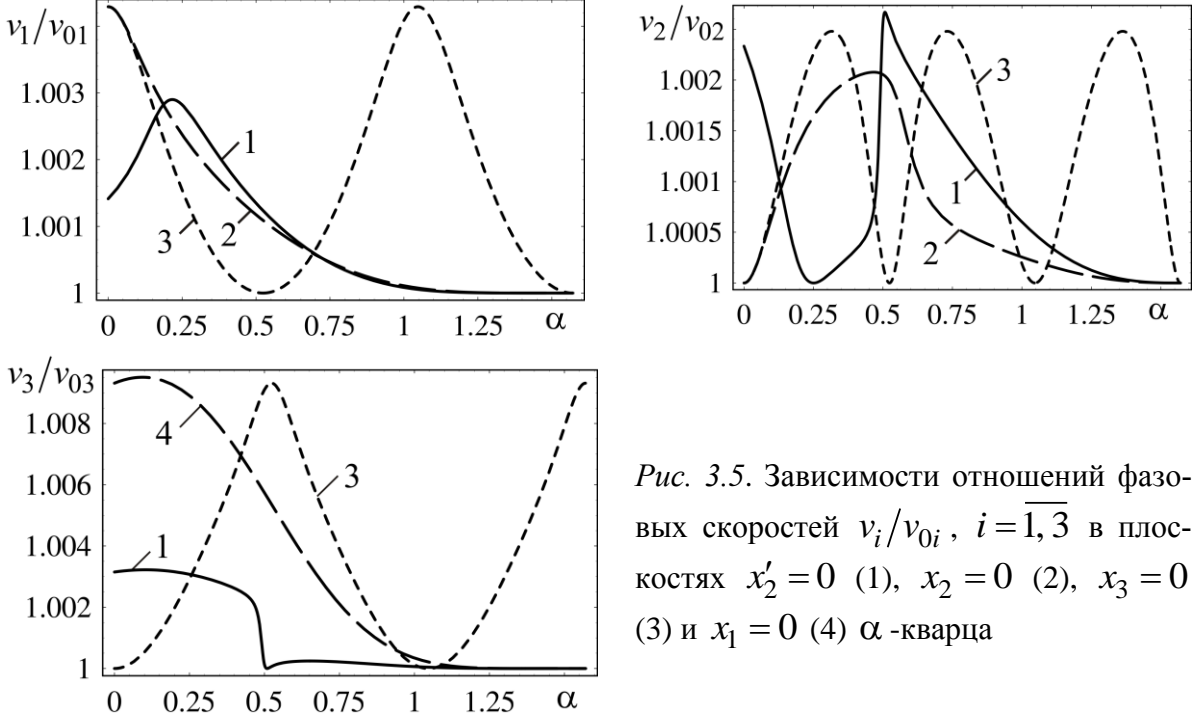


Рис. 3.5. Зависимости отношений фазовых скоростей  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  в плоскостях  $x'_2 = 0$  (1),  $x_2 = 0$  (2),  $x_3 = 0$  (3) и  $x_1 = 0$  (4)  $\alpha$ -кварца

Найдем выражения для координат точек среды, определяющих геометрическую форму волнового фронта для материалов тригональной системы симметрии класса 32. Для этого воспользуемся выражениями (1.25), определив в них коэффициенты  $q_{ik}$ ,  $i, k = \overline{1, 3}$  следующим образом:

$$q_{1i} = \sum_{j=1}^3 s_{1j}, q_{2i} = 2 \sum_{j=4}^6 \hat{s}_j s_{ji} - \sum_{j=1}^3 \hat{s}_j (s_{1i} + s_{2i} + s_{3i} - s_{ji}),$$

$$q_{3i} = (\hat{s}_2 \hat{s}_3 - \hat{s}_6^2) s_{1i} + (\hat{s}_1 \hat{s}_3 - \hat{s}_5^2) s_{2i} + (\hat{s}_1 \hat{s}_2 - \hat{s}_4^2) s_{3i} -$$

$$- 2(\hat{s}_3 \hat{s}_4 - \hat{s}_5 \hat{s}_6) s_{4i} - 2(\hat{s}_2 \hat{s}_5 - \hat{s}_4 \hat{s}_6) s_{5i} - 2(\hat{s}_1 \hat{s}_6 - \hat{s}_4 \hat{s}_5) s_{6i},$$

$$\begin{aligned}
s_{11} &= 2n_1 \left( a_{11} + \frac{1}{f^2} K_{11}^2 (n_1^2 - n_2^2) (n_1^2 + 3n_2^2 + 2k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{12} &= (a_{11} - a_{12})n_2 + 2an_3 - \frac{2}{f^2} K_{11}^2 n_2 (n_1^2 - n_2^2) (3n_1^2 + n_2^2 + 2k_{33}n_3^2), \\
s_{13} &= 2 \left( a_{14}n_2 + n_3 \left( a_{44} - \frac{1}{f^2} K_{11}^2 k_{33} (n_1^2 - n_2^2)^2 \right) \right), \\
s_{21} &= n_1 \left( (a_{11} - a_{12}) + \frac{2}{f^2} (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2)^2 (n_2^2 + k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{22} &= 2(a_{11}n_2 + a_{14}n_3 - \\
&\quad - \frac{1}{f^2} n_1^2 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2) (2dK_{11} + (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2)n_2) \Big), \\
s_{33} &= 2n_3 \left( a_{33} - \frac{1}{f^2} K_{14}^2 n_1^2 n_2^2 \right), s_{23} = 2((a_{14}n_2 + a_{44}n_3) + \\
&\quad + \frac{1}{f^2} n_1^2 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2) (dK_{14} - k_{33}n_3 (K_{14}n_3 - 2K_{11}n_2))), \\
s_{31} &= 2n_1 \left( a_{44} + \frac{1}{f^2} n_2^2 K_{14}^2 (n_2^2 + k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{32} &= 2n_2 \left( a_{44} + \frac{1}{f^2} n_1^2 K_{14}^2 (n_1^2 + k_{33}n_3^2) \right), \\
s_{41} &= \frac{1}{2} ((a_{11} + a_{12})n_2 + 4a_{14}n_3) - \\
&\quad - \frac{1}{f^2} K_{11} (2K_{11}n_2 - K_{14}n_3) \left( f(3n_1^2 - n_2^2) - 2(n_1^2 - n_2^2)n_1^2 \right), \\
s_{42} &= \frac{n_1(a_{11} + a_{12})}{2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{f^2} K_{11} n_1 \left( f \left( 2K_{11} (2n_2^2 - n_1^2) - K_{14} n_2 n_3 \right) + 2n_2 (n_1^2 - n_2^2) (2K_{11} n_2 - K_{14} n_3) \right), \\
s_{43} & = n_1 \left( 2a_{14} + \frac{1}{f^2} K_{11} (n_1^2 - n_2^2) (fK_{14} + 2k_{33} n_3 (2K_{11} n_2 - K_{14} n_3)) \right), \\
s_{51} & = (a_{13} + a_{44}) n_3 + 2a_{14} n_2 + \frac{1}{f^2} K_{11} K_{14} n_2 \left( f (3n_1^2 - n_2^2) - 2n_1^2 (n_1^2 - n_2^2) \right),
\end{aligned}$$

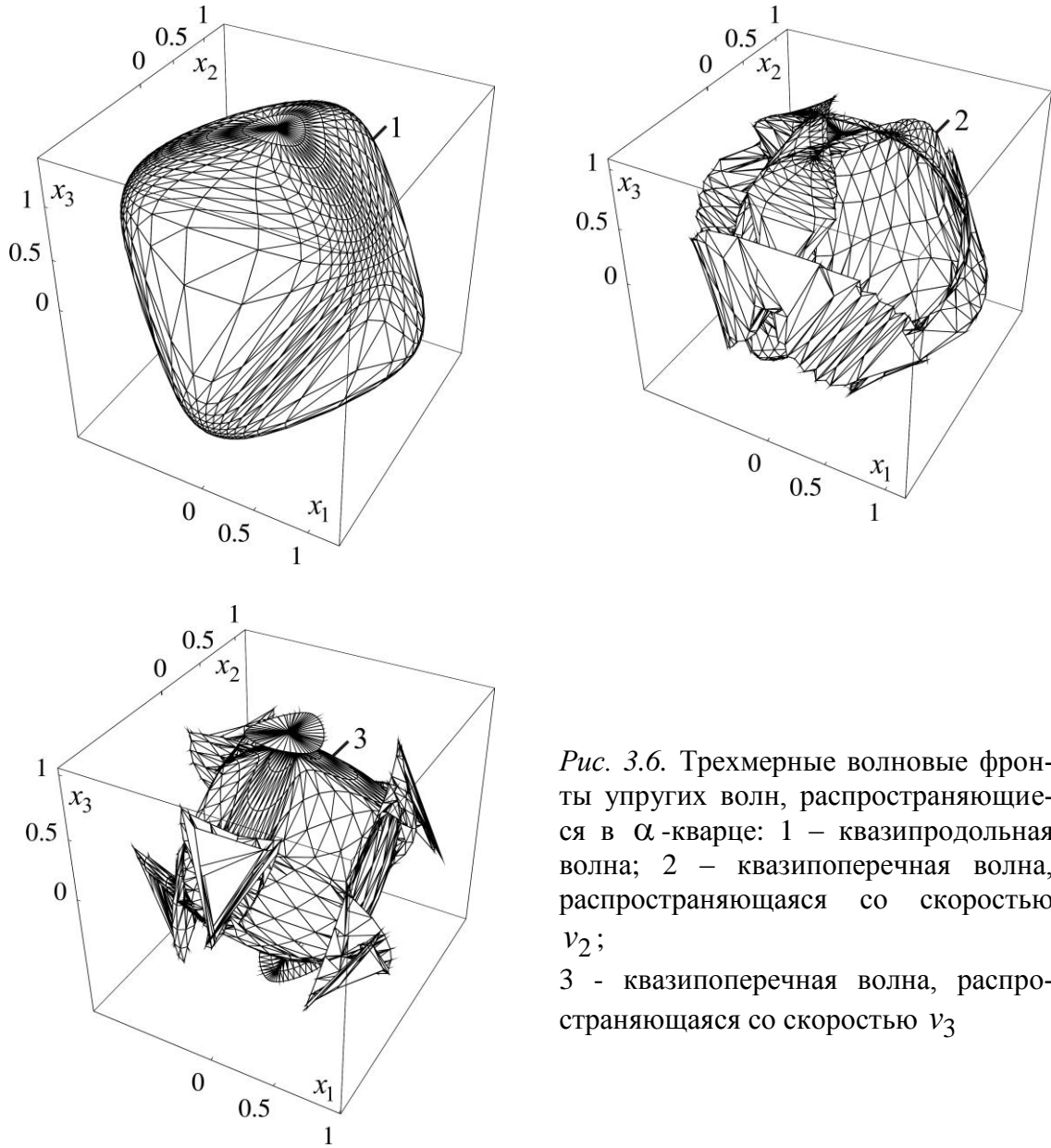


Рис. 3.6. Трехмерные волновые фронты упругих волн, распространяющиеся в  $\alpha$ -кварце: 1 – квазипродольная волна; 2 – квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_2$ ; 3 – квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_3$

$$\begin{aligned}
s_{52} &= n_1 \left( 2a_{14} + \frac{1}{f^2} K_{11} K_{14} \left( f \left( n_1^2 - 3n_2^2 \right) - 2n_2^2 \left( n_1^2 - n_2^2 \right) \right) \right), \\
s_{53} &= n_1 \left( (a_{13} + a_{44}) - \frac{2}{f^2} k_{33} K_{11} K_{14} n_2 n_3 \left( n_1^2 - n_2^2 \right) \right), \\
s_{61} &= 2n_1 \left( a_{14} + \frac{1}{f^2} K_{14} n_2 \left( K_{14} n_3 - 2K_{11} n_2 \right) \left( n_2^2 + k_{33} n_3^2 \right) \right), \\
s_{62} &= (a_{13} + a_{44}) n_3 - 2a_{14} n_2 + \\
&+ \frac{1}{f^2} K_{14} n_1^2 \left( f \left( K_{14} n_3 - 4K_{11} n_2 \right) - 2n_2^2 \left( K_{14} n_3 - 2K_{11} n_2 \right) \right), \\
s_{63} &= n_2 \left( (a_{13} + a_{44}) + \frac{1}{f^2} K_{14} n_1^2 \left( f K_{14} - 3k_{33} n_3 \left( K_{14} n_3 - 2K_{11} n_2 \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\hat{s}_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$  получаются из соответствующих коэффициентов  $s_k$  заменой параметров  $p_i$  на направляющие косинусы нормали к волновой поверхности  $n_i$ ,  $f = n_1^2 + n_2^2 + k_{33} n_3^2$ .

Результаты построения трехмерных фронтов квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся от точечного источника возмущений в  $\alpha$ -кварце, приведены на рис. 3.6 (числовые данные прежние).

Из рисунка 3.6 видно, что распространение квазипоперечных волн в  $\alpha$ -кварце происходит с возникновением сложной системы лакун. В частности, на волновом фронте квазипоперечной волны, имеющую фазовую скорость равную  $v_2$ , возникает две конические лакуны, осью которых является координатная ось  $x_3$ , четыре лакуны симметрично расположенных относительно трех осей координат, а также две лакуны симметричных относительно начала координат. Лакуны, возникающие на фронте квазипоперечной волны, распространяющейся с фазовой скоростью  $v_3$ , имеют вид полос. Заметим, что геометрическая форма лакун на фронтах квазипоперечных волн существенно отличается от конических лакун, имеющих одну точку ветвления линий волнового фронта. На рис. 3.7 представлены соответствующие сечения трехмерных фронтов квази-

поперечных волн, имеющих фазовые скорости  $v_2$  и  $v_3$ , плоскостью  $x'_2 = 0$  для  $\alpha$ -кварца (числовые данные прежние).

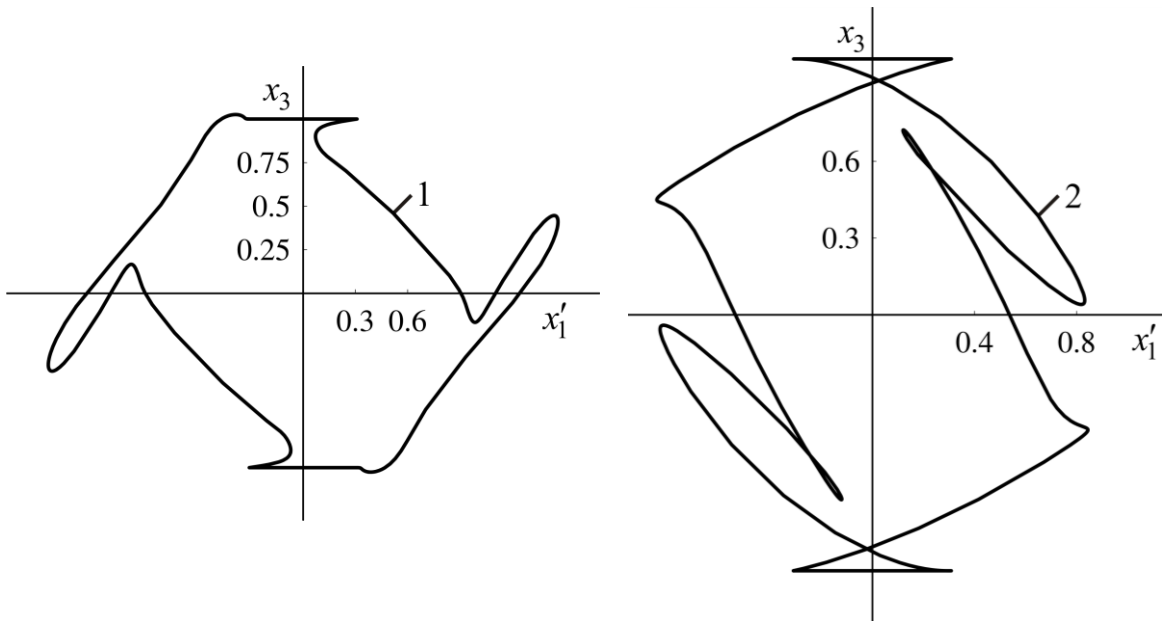


Рис. 3.7. Сечения трехмерных фронтов квазипоперечных волн плоскостью  $x'_2 = 0$ , распространяющихся со скоростями  $v_2$  (1) и  $v_3$  (2), для  $\alpha$ -кварца

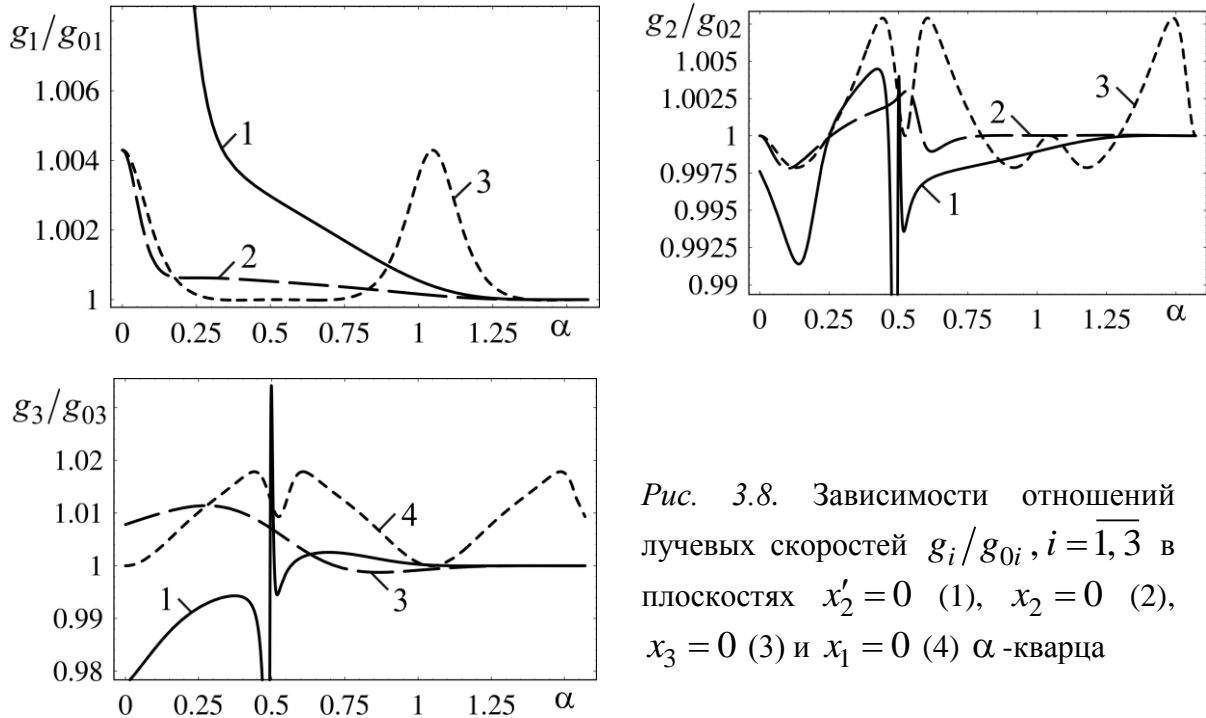


Рис. 3.8. Зависимости отношений лучевых скоростей  $g_i/g_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  в плоскостях  $x'_2 = 0$  (1),  $x_2 = 0$  (2),  $x_3 = 0$  (3) и  $x_1 = 0$  (4)  $\alpha$ -кварца

Для количественной оценки влияния пьезоэлектрического эффекта на фазовые скорости распространения упругих волн, рассмотрим зависимости фазовых скоростей квазипродольной и квазипоперечных волн в плоскостях, проходящих через начало координат.

Из рисунка 3.8 следует, что лучевая скорость  $g_1$  квазипродольной пьезоактивной волны в плоскостях  $x'_2 = 0$ ,  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 0$  незначительно превышает лучевую скорость чисто упругой волны. В плоскости  $x_1 = 0$  влияния пьезоэффекта на лучевую скорость квазипродольной волны не наблюдается. Скорости квазипоперечных пьезоактивных волн могут, как уменьшаться, так и увеличиваются по сравнению с соответствующими скоростями чисто упругих квазипоперечных волн.

Для тригонально анизотропных материалов, принадлежащих классу  $3m$ , система уравнений движения (3.1) с учетом матрицы (3.10) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_1 + 2A_{14} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( A \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + B \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \\
& \quad = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial}{\partial x_3} - 2e_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Phi, \\
& \left( A \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_2 + A_{14} \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_3 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( A \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + B \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \quad (3.19) \\
& \quad = e_{22} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \Phi + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3}, \\
& \left( A_{44} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + A_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +B \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + A_{14} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \\
& + \left( e_{15} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \Phi = 0. \\
& e_{22} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right) + e_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + e_{31} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \\
& + e_{15} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) = \varepsilon_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} \right) \Phi + \varepsilon_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}$$

Здесь также как и в системе (3.16) полагаем  $A = (A_{11} + A_{12})/2$ ,  $B = A_{13} + A_{44}$ .

Поскольку выражения для коэффициентов  $q_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  характеристического уравнения (1.9) для системы (3.19), связывающие их с коэффициентами  $s_j$ ,  $j = \overline{1, 6}$  останутся прежними, выпишем только соотношения для  $s_j$ :

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_{11} p_1^2 + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12}) p_2^2 + p_3 (2a_{14} p_2 + c_{44} p_3) + \\
& \quad \frac{1}{d} p_1^2 \left( (K_{15} + K_{31}) p_3 - 2K_{22} p_2 \right)^2, \\
s_2 &= a_{11} p_2^2 + \frac{1}{2} (a_{11} - a_{12}) p_1^2 + p_3 (2a_{14} p_2 + c_{44} p_3) + \\
& \quad + \frac{1}{d} \left( K_{22} (p_1^2 - p_2^2) - (K_{15} + K_{31}) p_2 p_3 \right)^2, \\
s_3 &= a_{33} p_3^2 + a_{44} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{d} \left( K_{15} (p_1^2 + p_2^2) + K_{33} p_3^2 \right)^2, \\
s_4 &= \frac{p_1}{2} \left( (a_{11} + a_{12}) p_2 + 4a_{14} p_3 \right) - \\
& - \frac{1}{d} p_1 \left( 2K_{22} p_2 - (K_{15} + K_{31}) p_3 \right) \left( K_{22} (p_2^2 - p_1^2) + (K_{15} + K_{31}) p_2 p_3 \right),
\end{aligned}$$



$$s_5 = p_1 \left( (a_{13} + a_{44}) p_3 + 2a_{14} p_2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{d} p_1 \left( (K_{15} + K_{31}) p_3 - 2K_{22} p_2 \right) \left( K_{15} (p_1^2 + p_2^2) + K_{33} p_3^2 \right),$$

$$s_6 = a_{14} (p_1^2 - p_2^2) + (a_{13} + a_{44}) p_2 p_3 +$$

$$+ \frac{1}{d} \left( K_{22} (p_2^2 - p_1^2) + (K_{15} + K_{31}) p_2 p_3 \right) \left( K_{15} (p_1^2 + p_2^2) + K_{33} p_3^2 \right).$$

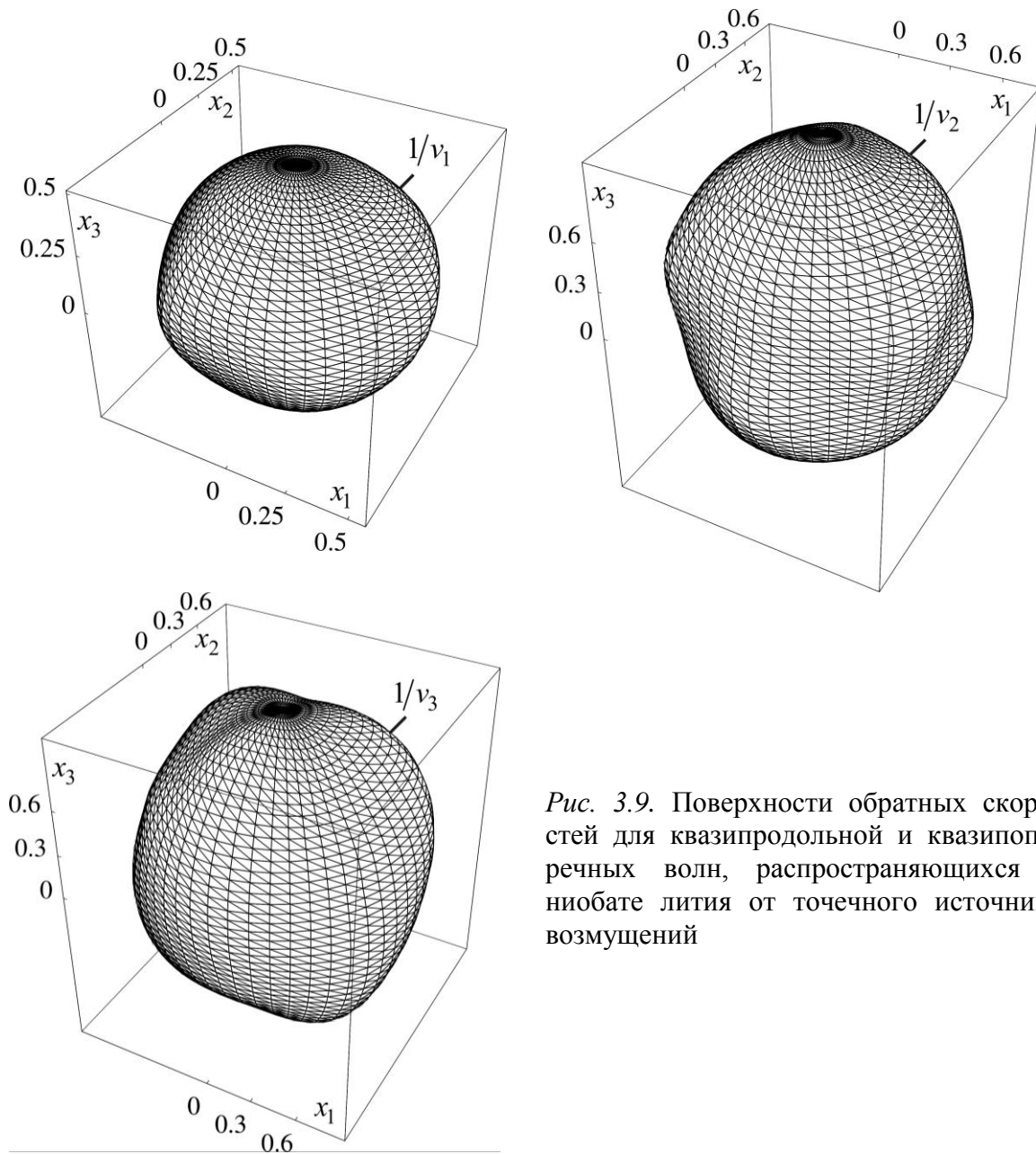


Рис. 3.9. Поверхности обратных скоростей для квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в ниобате лития от точечного источника возмущений

Аналогично предыдущему случаю найдем выражения для скоростей распространения квазипродольных и квазипоперечных волн и выполним построения поверхностей обратных скоростей для тригональных кристаллов класса  $3m$ . На рис. 3.9 представлены безразмерные поверхности  $1/v_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  для ниобата лития ( $A_{11} = 203$ ;  $A_{12} = 53$ ;  $A_{13} = 75$ ;  $A_{33} = 245$ ;  $A_{44} = 60$  ГПа;  $e_{15} = 3.7$ ;  $e_{22} = 2.5$ ,  $e_{31} = 0.2$ ,  $e_{33} = 1.3$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\varepsilon_{11} = 38.9 \cdot 10^{-11}$ ;  $\varepsilon_{33} = 25.7 \cdot 10^{-11}$  Ф/м [20]).

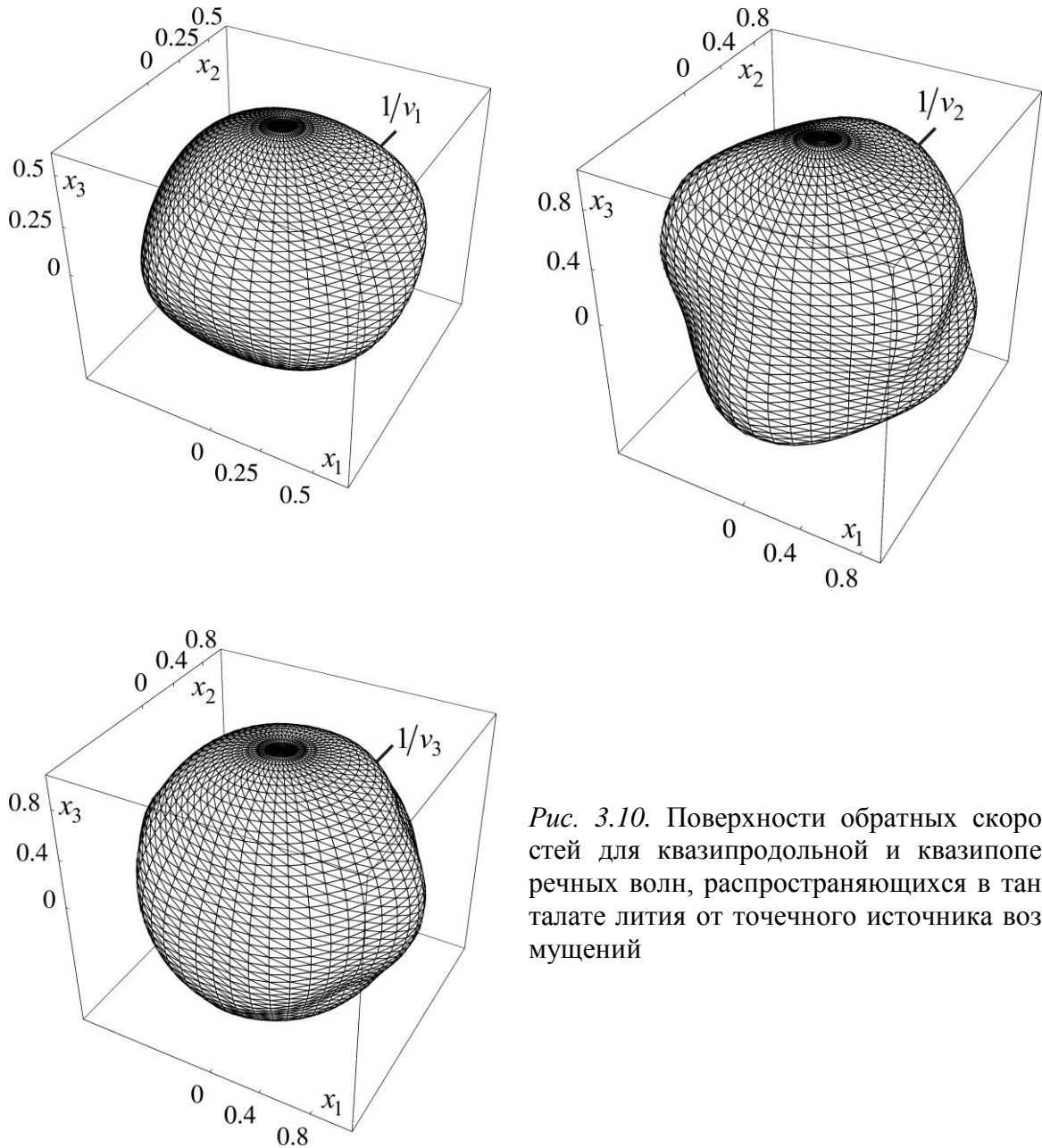


Рис. 3.10. Поверхности обратных скоростей для квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в танталате лития от точечного источника возмущений

На рис. 3.10 представлены безразмерные поверхности обратных скоростей для квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющиеся в танталате лития ( $A_{11} = 233$ ;  $A_{12} = 47$ ;  $A_{13} = 80$ ;  $A_{33} = 275$ ;  $A_{44} = 94$  ГПа;  $e_{15} = 2.6$ ;  $e_{22} = 1.6$ ,  $e_{31} = 0$ ,  $e_{33} = 1.9$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\varepsilon_{11} = 36.3 \cdot 10^{-11}$ ;  $\varepsilon_{33} = 38.1 \cdot 10^{-11}$  Ф/м [20]).

Для количественного анализа влияния пьезоэлектрического эффекта на фазовые скорости распространения квазипродольной и квазипоперечной волн, рассмотрим зависимости отношений  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  от угла наклона нормали к волновому фронту в плоскости  $x'_2 = 0$  и в координатных плоскостях  $x_k = 0$ . На рис. 3.11 представлены зависимости  $v_i(\alpha)/v_{0i}(\alpha)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  для ниобата лития (числовые данные прежние).

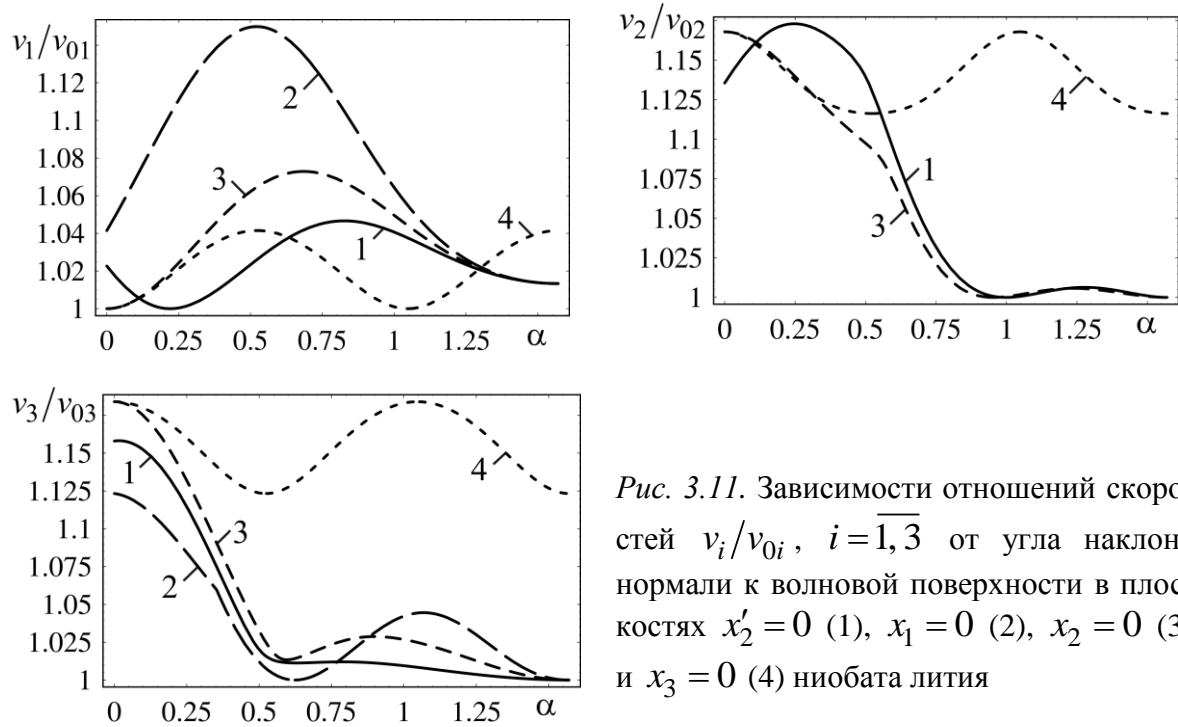


Рис. 3.11. Зависимости отношений скоростей  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  от угла наклона нормали к волновой поверхности в плоскостях  $x'_2 = 0$  (1),  $x_1 = 0$  (2),  $x_2 = 0$  (3) и  $x_3 = 0$  (4) ниобата лития

Из рисунка 3.11 видно, что действие пьезоэлектрического эффекта приводит к достаточно существенному возрастанию фазовых скоростей упругих волн в рассматриваемых плоскостях. Наибольшее увеличение скорости  $v_1$  ( $\approx 13\%$ ) наблюдается в плоскости  $x_1 = 0$ , скорости  $v_2$  ( $\approx 17.5\%$ ) - во всех рассматриваемых плоскостях за исключением  $x_2 = 0$ . Максимальное возрастание скорости  $v_3$  ( $\approx 17.5\%$ ) для квазипоперечных волн имеет место в плоскостях  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 0$ .

Влияние пьезоэффекта на скорости распространения упругих волн в плоскостях  $x'_1 = 0$  и  $x_k = 0$ ,  $k = \overline{1, 3}$  танталата лития не так существенно по сравнению с ниобатом лития. Максимальное увеличение ( $\approx 11.5\%$ ) фазовой скорости пьезоактивной волны по отношению к фазовой скорости чисто упругой волны наблюдается для квазипоперечной волны, распространяющейся со скоростью  $v_2$ , в плоскости  $x_3 = 0$ . Для остальных случаев отношения  $v_i/v_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  не превышают 3.5 %. Квазипоперечная волна, имеющая скорость  $v_3$ , в плоскости  $x_1 = 0$  танталата лития не является пьезоэлектрически активной.

Выражения для координат точек среды, определяющих геометрическую форму волнового фронта для материалов тригональной системы симметрии класса  $3m$  так же, как и в предыдущем случае определяются соотношениями (1.25). Однако в отличие от соответствующих соотношений для тригонально анизотропных материалов класса  $3m$ , коэффициенты  $s_{ik}$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ,  $k = \overline{1, 3}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= 2n_1 \left( a_{11} + \frac{1}{f^2} \left( (K_{15} + K_{31}) p_3 - 2K_{22} p_2 \right)^2 \left( p_2^2 + k_{33} p_3^2 \right) \right), \\
s_{12} &= (a_{11} - a_{12}) n_2 + 2a_{14} n_3 - \\
&- 2 \left( (K_{15} + K_{31}) n_3 - 2K_{22} n_2 \right) \left( 2K_{22} f + \left( (K_{15} + K_{31}) n_3 - 2K_{22} n_2 \right) n_2 \right) \frac{n_1^2}{f^2}, \\
s_{13} &= 2 \left( (a_{14} n_2 + a_{44} n_3) + \left( \frac{n_1}{f} \right)^2 \left( (K_{15} + K_{31}) p_3 - 2K_{22} p_2 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( f (K_{15} + K_{31}) - k_{33} n_3 \left( (K_{15} + K_{31}) p_3 - 2K_{22} p_2 \right)^2 \right) \right), \\
s_{21} &= 2n_1 \left( (a_{11} - a_{12}) + \frac{1}{f^2} \left( K_{22} (n_1^2 - n_2^2) - (K_{15} + K_{31}) n_2 n_3 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( K_{22} (n_1^2 + 3n_2^2 + k_{33} n_3^2) + (K_{15} + K_{31}) n_2 n_3 \right) \right), \\
s_{22} &= 2(a_{11} n_2 + a_{14} n_3) - \frac{1}{f^2} \left( K_{22} (n_1^2 - n_2^2) - (K_{15} + K_{31}) n_2 n_3 \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( (2K_{22}n_2 + (K_{15} + K_{31})n_3) + 2n_2 \left( K_{22}(n_1^2 - n_2^2) - (K_{15} + K_{31})n_2n_3 \right) \right), \\
s_{23} &= 2 \left( (a_{14}n_2 + a_{44}n_3) - \frac{1}{f^2} \left( K_{22}(n_1^2 - n_2^2) - (K_{15} + K_{31})n_2n_3 \right) \right) \times \\
& \times \left( (K_{15} + K_{31})n_2 + \left( K_{22}(n_1^2 - n_2^2) - (K_{15} + K_{31})n_2n_3 \right) k_{33}n_3 \right), \\
s_{31} &= 2n_1 \left( a_{44} + \frac{\left( K_{15}(n_1^2 + n_2^2) + K_{33}n_3^2 \right) \left( K_{15}(n_1^2 + n_2^2) + (2K_{15} - K_{33})n_3^2 \right)}{f^2} \right), \\
s_{32} &= 2n_2 \left( a_{44} + \frac{\left( K_{15}(n_1^2 + n_2^2) + K_{33}n_3^2 \right) \left( K_{15}(n_1^2 + n_2^2) + (2K_{15} - K_{33})n_3^2 \right)}{f^2} \right), \\
s_{33} &= 2a_{33} \left( n_3 + \frac{1}{f^2} \left( K_{15}(n_1^2 + n_2^2) + K_{33}n_3^2 \right) \right) \times \\
& \times \left( 2K_{33} - k_{33} \left( K_{15}(n_1^2 + n_2^2) + K_{33}n_3^2 \right) \right), \\
s_{41} &= \frac{1}{2} \left( (a_{11} + a_{12})n_2 + 4a_{14}n_3 \right) - \frac{1}{f^2} \left( 2K_{22}n_2 - (K_{15} + K_{31})n_3 \right) \times \\
& \times \left( f \left( K_{22}(n_2^2 - 3n_1^2) + (K_{15} + K_{31})n_2n_3 \right) - \right. \\
& \left. - 2n_1^2 \left( K_{22}(n_2^2 - n_1^2) + (K_{15} + K_{31})n_2n_3 \right) \right), \\
s_{42} &= \frac{(a_{11} + a_{12})n_1}{2} - \frac{n_1}{f^2} \left( f \left( 2K_{22} \left( K_{22}(n_2^2 - n_1^2) + (K_{15} + K_{31})n_2n_3 \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (2K_{22}n_2 - (K_{15} + K_{31})n_3) \left( 2n_2K_{22} + (K_{15} + K_{31})n_3 \right) \right) - \right. \\
& \left. - 2n_2 \left( 2K_{22}n_2 - (K_{15} + K_{31})n_3 \right) \left( K_{22}(n_2^2 - n_1^2) + (K_{15} + K_{31})n_2n_3 \right) \right), \\
s_{43} &= 2a_{14}n_1 - \frac{n_1}{f^2} \left( f \left( (K_{15} + K_{31})n_2 \left( 2K_{22}n_2 - (K_{15} + K_{31})n_3 \right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(K_{15} + K_{31}\right)\left(K_{22}\left(n_2^2 - n_1^2\right) + \left(K_{15} + K_{31}\right)n_2n_3\right) - \\
& -2k_{33}n_3\left(2K_{22}n_2 - \left(K_{15} + K_{31}\right)n_3\right)\left(K_{22}\left(n_2^2 - n_1^2\right) + \left(K_{15} + K_{31}\right)n_2n_3\right), \\
s_{51} & = \left(a_{13} + a_{44}\right)n_3 + 2a_{14}n_2 + \frac{1}{f^2}\left(\left(K_{15} + K_{31}\right)n_3 - 2K_{22}n_2\right) \times \\
& \times \left(f\left(K_{15}\left(3n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right) - 2n_1^2\left(K_{15}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right)\right), \\
s_{52} & = 2a_{14}n_1 - \frac{n_1}{f^2}\left(2n_2\left(\left(K_{15} + K_{31}\right)n_3 - 2K_{22}n_2\right)\left(K_{15}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right) - \right. \\
& \left. - f\left(2K_{15}n_2\left(\left(K_{15} + K_{31}\right)n_3 - 2K_{22}n_2\right) - 2K_{22}\left(K_{15}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right)\right)\right), \\
s_{53} & = \left(a_{13} + a_{44}\right)n_1 + \frac{n_1}{f^2}\left(f\left(2K_{33}n_3\left(\left(K_{15} + K_{31}\right)n_3 - 2K_{22}n_2\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(K_{15} + K_{31}\right)\left(K_{15}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right)\right) - \right. \\
& \left. - 2k_{33}n_3\left(\left(K_{15} + K_{31}\right)n_3 - 2K_{22}n_2\right)\left(K_{15}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right)\right), \\
s_{61} & = 2a_{14}n_1 - \frac{2n_1}{f^2}\left(f\left(K_{22}\left(K_{15}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + K_{33}p_3^2\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - K_{15}\left(K_{22}\left(p_2^2 - p_1^2\right) + \left(K_{15} + K_{31}\right)p_2p_3\right)\right) + \right. \\
& \left. + \left(K_{22}\left(p_2^2 - p_1^2\right) + \left(K_{15} + K_{31}\right)p_2p_3\right)\left(K_{15}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + K_{33}p_3^2\right)\right), \\
s_{62} & = \left(a_{13} + a_{44}\right)n_3 - 2a_{14}n_2 + \\
& + \frac{1}{f^2}\left(f\left(\left(2K_{22}n_2 + \left(K_{15} + K_{31}\right)n_3\right)\left(K_{15}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2K_{15}n_2\left(K_{22}\left(n_2^2 - n_1^2\right) + \left(K_{15} + K_{31}\right)n_2n_3\right)\right) - \right. \\
& \left. - 2n_2\left(K_{22}\left(n_2^2 - n_1^2\right) + \left(K_{15} + K_{31}\right)n_2n_3\right)\left(K_{15}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + K_{33}n_3^2\right)\right),
\end{aligned}$$



$$s_{63} = (a_{13} + a_{44})n_2 + \frac{1}{f^2} \left( f \left( (K_{15} + K_{31})p_2 \left( K_{15}(p_1^2 + p_2^2) + K_{33}p_3^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2K_{33}n_3 \left( K_{22}(p_2^2 - p_1^2) + (K_{15} + K_{31})p_2p_3 \right) \right) - \right. \\ \left. - 2k_{33}n_3 \left( K_{22}(p_2^2 - p_1^2) + (K_{15} + K_{31})p_2p_3 \right) \left( K_{15}(p_1^2 + p_2^2) + K_{33}p_3^2 \right) \right).$$

Здесь  $f = n_1^2 + n_2^2 + k_{11}n_3^2$ .

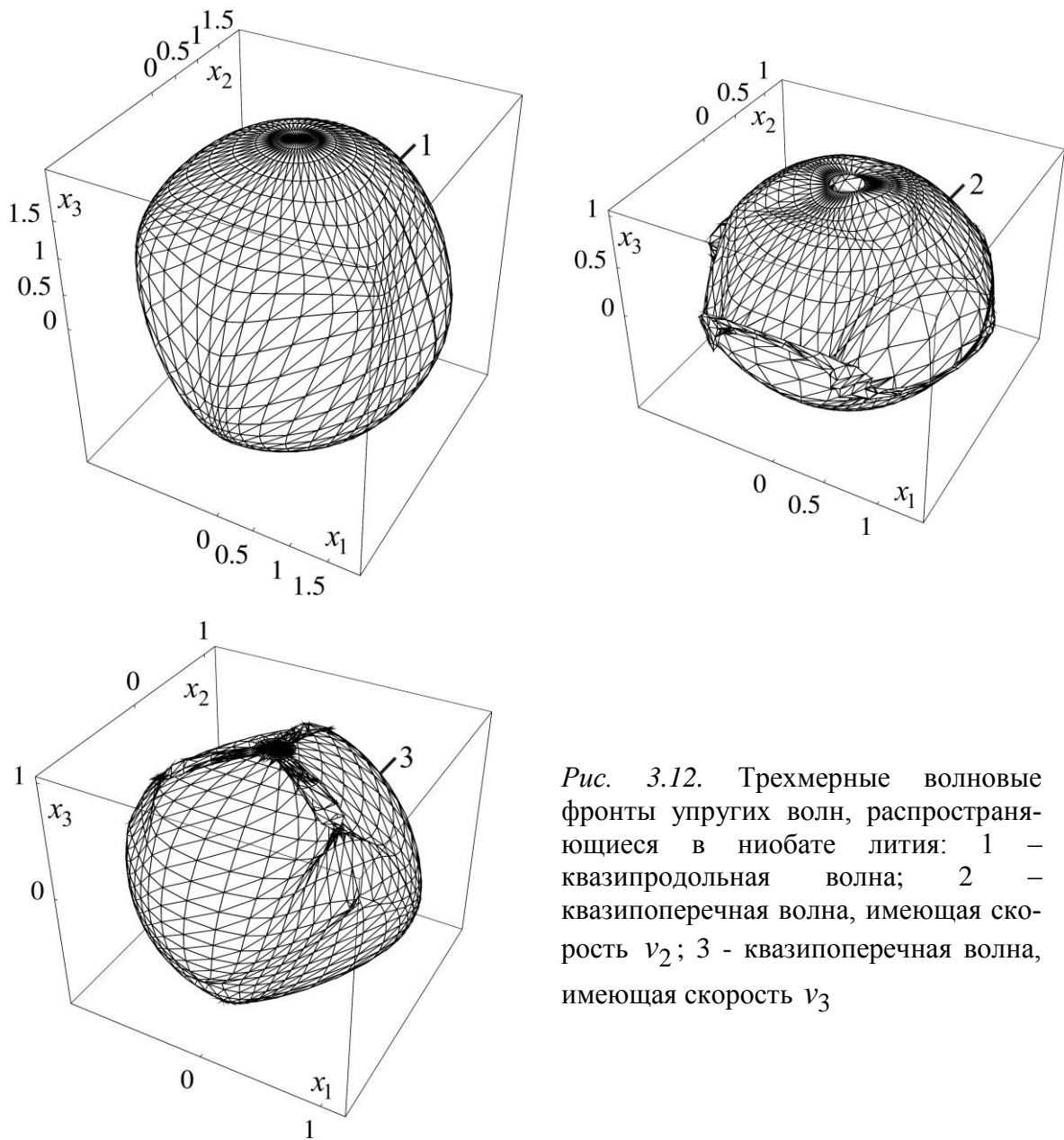


Рис. 3.12. Трехмерные волновые фронты упругих волн, распространяющиеся в ниобате лития: 1 – квазипродольная волна; 2 – квазипоперечная волна, имеющая скорость  $v_2$ ; 3 – квазипоперечная волна, имеющая скорость  $v_3$

Результаты построения трехмерных фронтов квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся от точечного источника возмущений в ниобате лития, представлены на рис. 3.12 и 3.13 соответственно (числовые данные прежние).

Сравнительный анализ соответствующих трехмерных фронтов квазипродольных и квазипоперечных волн, построенных с учетом и без учета пьезоэлектрического эффекта, показывает, что взаимосвязь электрических и механических свойств ниобата лития существенно влияет на геометрию волнового фронта.

В частности, пьезоэффект может приводить практически к полному исчезновению лакун на фронтах квазипоперечных волн. На рис. 3.13 представлены сечения волновых поверхностей квазипоперечной волны, имеющей фазовую скорость  $v_3$ , плоскостями  $x'_1 = 0$  и  $x_2 = 0$  для ниобата лития с учетом и без учета пьезоэффекта (числовые данные прежние).

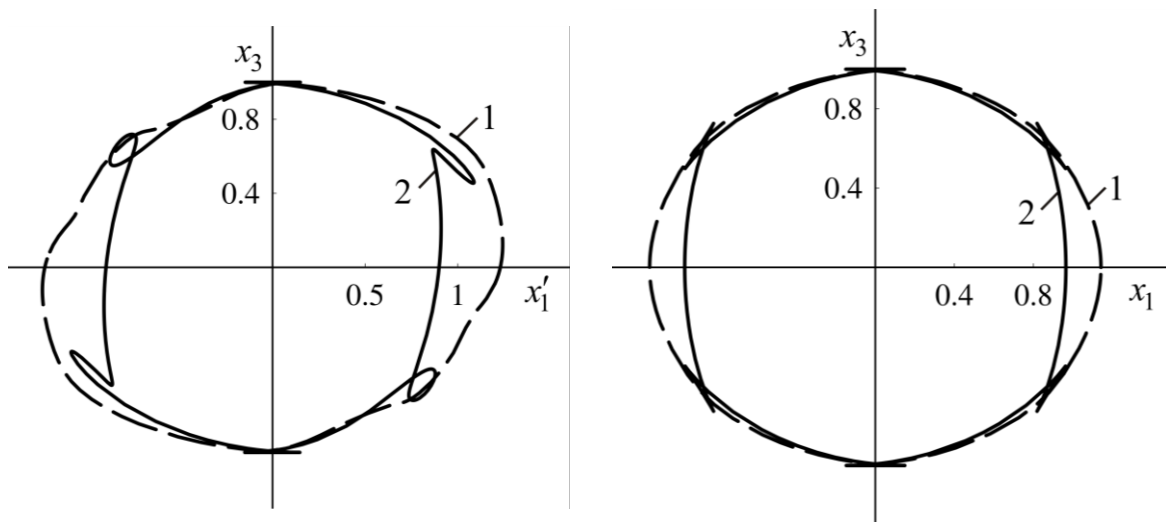


Рис. 3.13. Волновые фронты квазипоперечной волны, распространяющиеся в плоскостях  $x'_1 = 0$  и  $x_2 = 0$  ниобата лития со скоростью  $v_3$  с учетом (1) и без учета пьезоэффекта (2)

Трехмерные фронты квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся от точечного источника возмущений в танталате лития, представлены на рис. 3.14 (числовые данные прежние).

Сравнительный анализ волновых поверхностей построенных для танталата лития с учетом и без учета пьезоэффекта показывает, что в результате взаимосвязи электрических и механических свойств материала также как и в случае ниобата лития, происходит «сглаживание» фронтов квазипоперечных волн.



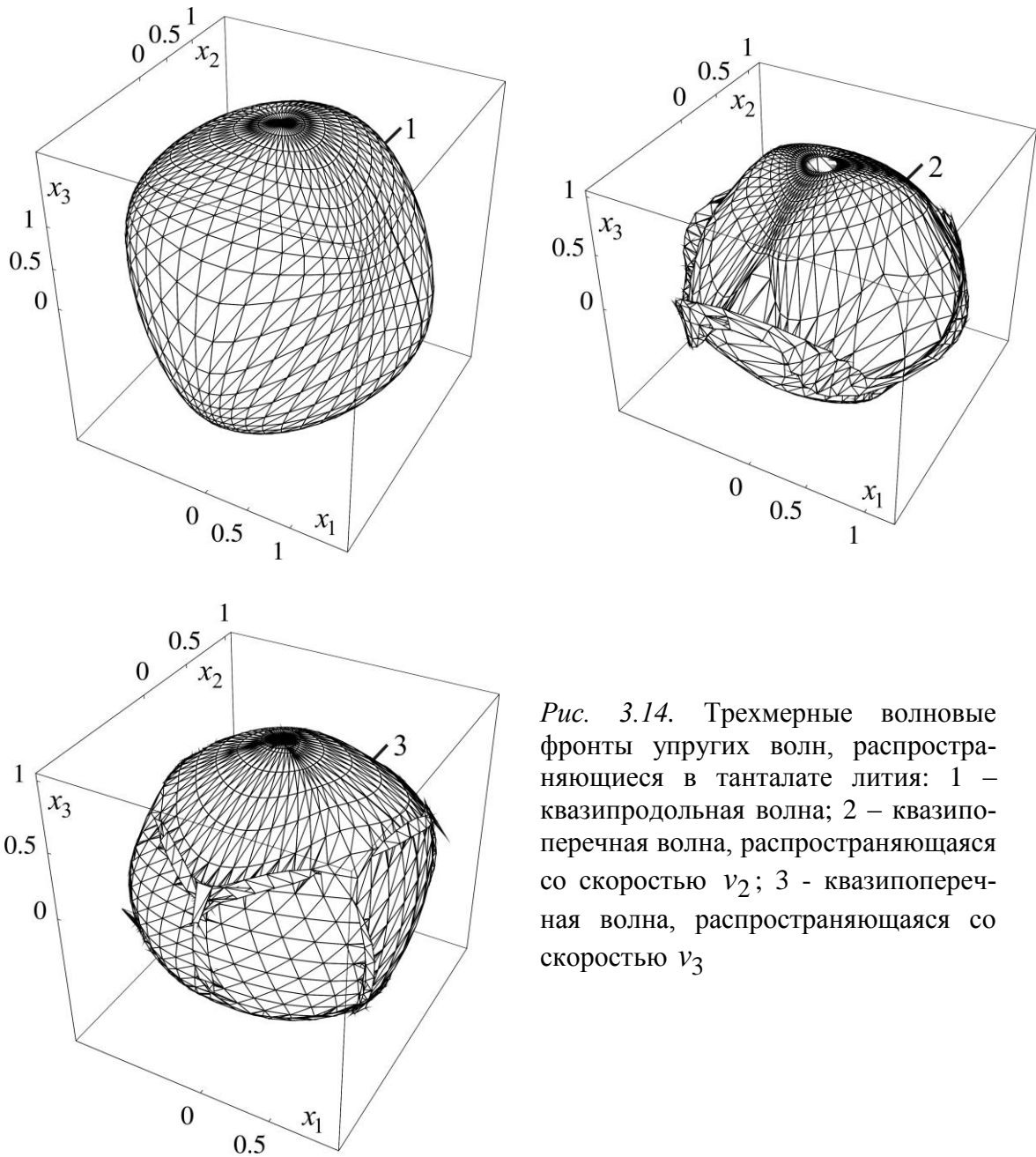


Рис. 3.14. Трехмерные волновые фронты упругих волн, распространяющиеся в танталате лития: 1 – квазипродольная волна; 2 – квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_2$ ; 3 – квазипоперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v_3$

### 3.3. Метод характеристик для системы электродинамических уравнений Максвелла

Первое применение классического метода характеристик к уравнениям электродинамики Максвелла в случае изотропии и анизотропии электрических свойств дано Т. Леви - Чивита в работе [91]. Там же на основании уравнения характеристик исследованы некоторые закономерности распространения электромагнитных волн и выведено уравнение

волновой поверхности для ряда частных случаев. Рассмотрим реализацию метода характеристик применительно к системе электродинамических уравнений Максвелла, характеризующуюся тремя различными диэлектрическими проницаемостями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_j}{\partial x_k} &= 0, \\ \mu \frac{\partial B_i}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} &= 0, i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь  $E_k$  - компоненты вектора напряженности электрического поля;  $B_k$  - компоненты вектора магнитной индукции;  $\varepsilon_{ijk}$  - компоненты альтернирующего тензора;  $\varepsilon_{ii}$  - диэлектрические проницаемости анизотропной среды;  $\mu$  - магнитная проницаемость.

Зададим начальные данные к системе (3.20) на поверхности (1.1) и перейдем к новым переменным по схеме (1.5). С учетом того, что для анизотропной среды отличными от нуля являются диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_{ii}$ , уравнение характеристической поверхности для системы (3.20), представим в виде:

$$\begin{aligned} p_0^2 \left( p_0^4 \mu^2 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \tau_1 \left( p_1^2 \varepsilon_{11} + p_2^2 \varepsilon_{22} + p_3^2 \varepsilon_{33} \right) + \right. \\ \left. - p_0^2 \mu \left( p_1^2 \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + p_2^2 \varepsilon_{22} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + \right. \right. \\ \left. \left. + p_3^2 \varepsilon_{33} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из уравнения (3.21) вытекает существование стационарной поверхности разрыва  $V = p_0 / \sqrt{\tau_1} = 0$ , а также двух электромагнитных волн, скорости распространения которых, удовлетворяют следующему уравнению:

$$\begin{aligned} V^4 \mu^2 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + n_1^2 \varepsilon_{11} + n_2^2 \varepsilon_{22} + n_3^2 \varepsilon_{33} + \\ - V^2 \mu \left( n_1^2 \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + n_2^2 \varepsilon_{22} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + n_3^2 \varepsilon_{33} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right) = 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} v^4 k_1 k_2 k_3 + n_1^2 k_1 + n_2^2 k_2 + n_3^2 k_3 + \\ - v^2 \left( n_1^2 k_1 (k_2 + k_3) + n_2^2 k_2 (k_1 + k_3) + n_3^2 k_3 (k_1 + k_2) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $k_i = \varepsilon_{ii}/\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = 1 \cdot 10^{-11}$  Ф/м,  $v = V\sqrt{\mu\varepsilon_0}$  - безразмерная скорость распространения электромагнитной волны,  $n_k$  - направляющие косинусы нормали к волновой поверхности.

Из уравнения (3.22) получим

$$v_i = \frac{\sqrt{A - (-1)^i \sqrt{A^2 - 4k_1k_2k_3(k_1n_1^2 + k_2n_2^2 + k_3n_3^2)}}}{\sqrt{2k_1k_2k_3}}, i = 1, 2, \quad (3.23)$$

$$A = n_1^2k_1(k_2 + k_3) + n_2^2k_2(k_1 + k_3) + n_3^2k_3(k_1 + k_2).$$

Применим формулы (3.23) для построения поверхностей обратных скоростей для электромагнитных волн, распространяющихся в кристаллах различных систем симметрии от точечного источника возмущений.

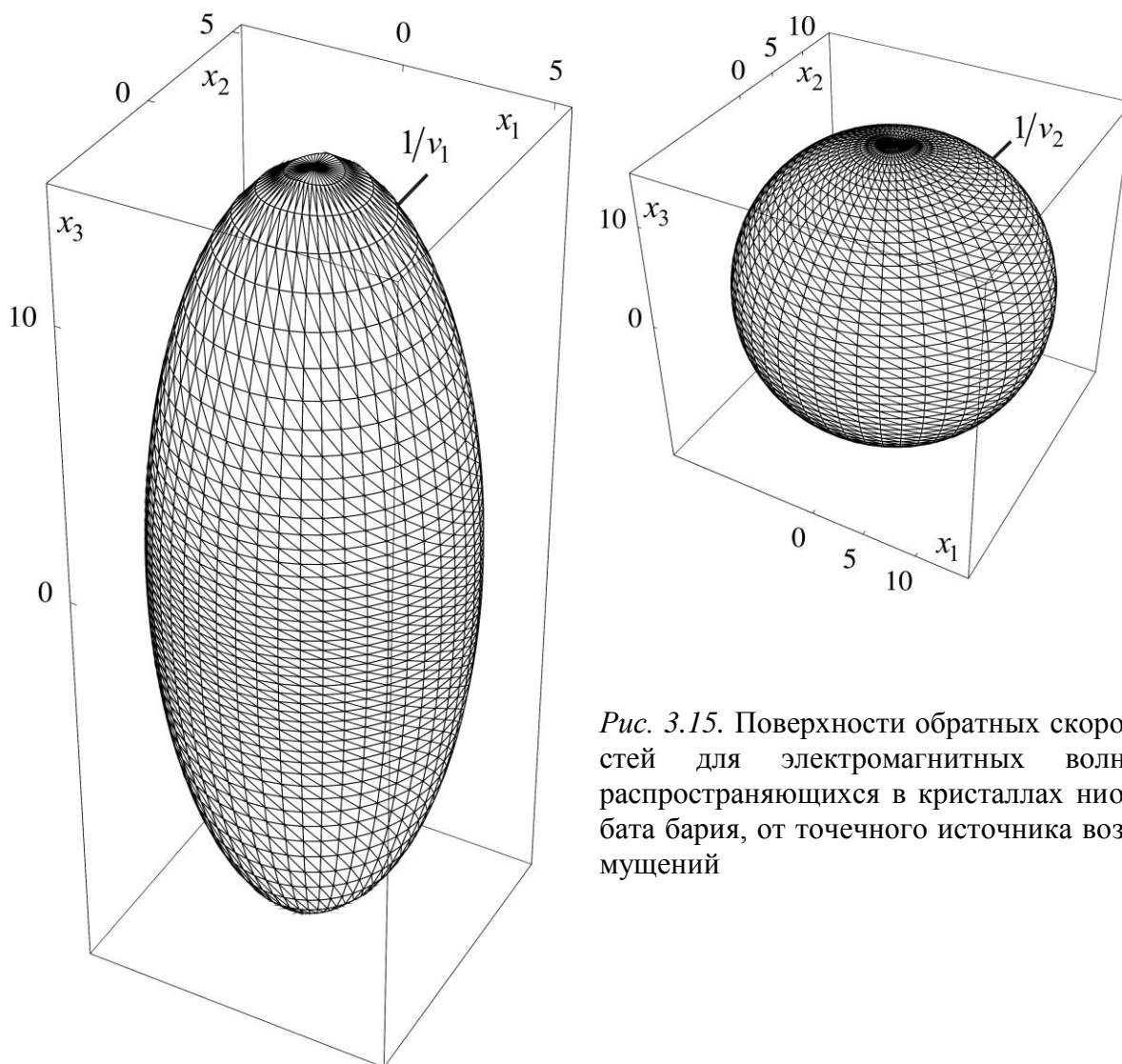


Рис. 3.15. Поверхности обратных скоростей для электромагнитных волн, распространяющихся в кристаллах ниобата бария, от точечного источника возмущений

На рис. 3.15 представлены безразмерные поверхности обратных скоростей для электромагнитных волн, распространяющихся в двухосных кристаллах ниобата бария ромбической системы симметрии ( $\epsilon_{11} = 196 \cdot 10^{-11}$ ;  $\epsilon_{22} = 201 \cdot 10^{-11}$  и  $\epsilon_{33} = 28 \cdot 10^{-11}$  Ф/м, числовые данные взяты из монографии [20]).

Из рисунка 3.15 видно, что поверхности обратных скоростей  $1/v_1$  и  $1/v_2$  являются эллипсоидом и сферой соответственно. Это можно объяснить тем, что отношение  $k_2/k_1 \approx 1.026 \approx 1$ , то есть по своим электрическим свойствам ниобат бария близок к полупроводниковым кристаллам более высоких систем симметрии (одноосным кристаллам). Если значения безразмерных диэлектрических констант  $k_1, k_2$  и  $k_3$  заметно отличаются друг от друга, поверхности обратных скоростей для электромагнитных волн имеют достаточно сложный вид. На рис. 3.16 показаны безразмерные поверхности обратных скоростей  $1/v_1$  и  $1/v_2$  для электромагнитных волн, распространяющиеся в кристаллах, диэлектрические проницаемости которых удовлетворяют соотношениям  $k_1/k_3 = 2$  и  $k_3/k_2 = 1/4$ .

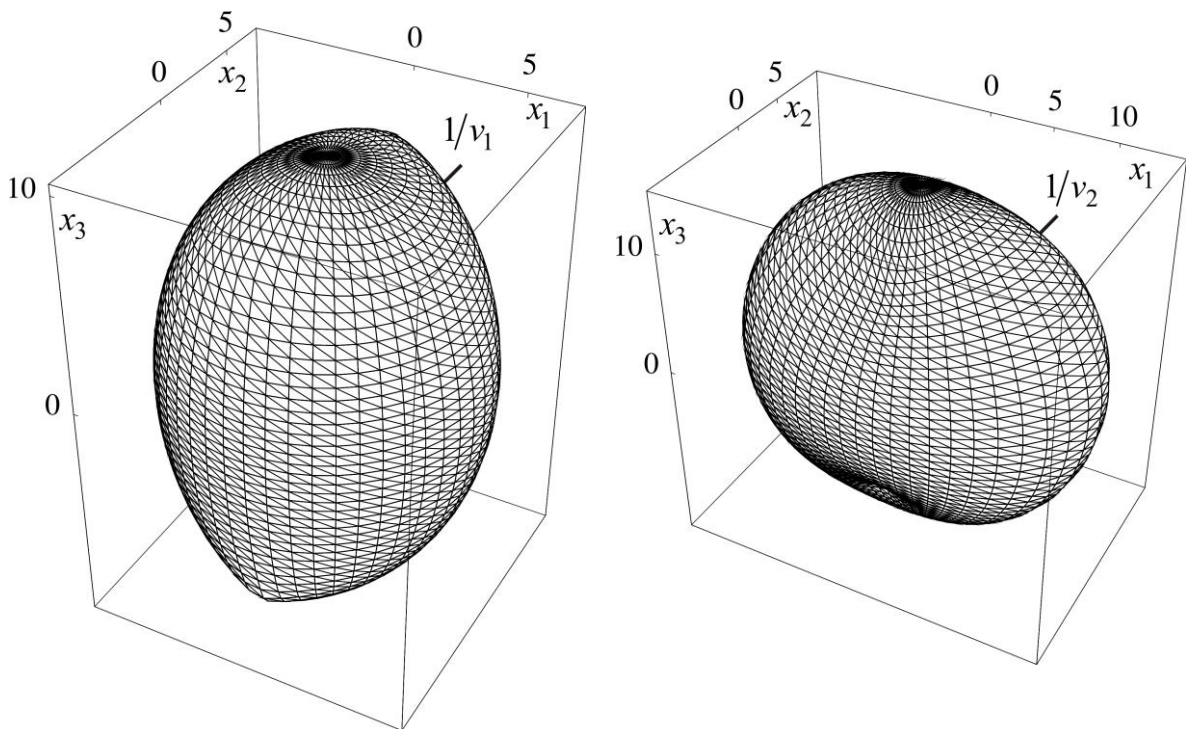


Рис. 3.16. Поверхности обратных скоростей для электромагнитных волн, распространяющихся в двухосных кристаллах с диэлектрическими проницаемостями  $k_1/k_3 = 2$  и  $k_3/k_2 = 1/4$

Поверхность обратных скоростей  $1/v_2$  в основном является выпуклой, но существуют четыре участка, где поверхность изменяет свою кривизну и выпуклость переходит в вогнутость. Появление таких участков на поверхности обратных скоростей указывает на возникновение четырех лакун на волновой поверхности электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью  $v_2$ . Поверхности обратных скоростей  $1/v_1$  указанными особенностями не обладают, то есть распространение электромагнитных волн со скоростью  $v_1$  не сопровождается распространением лакун. Для материалов, характеризующихся диэлектрическими проницаемостями, которые удовлетворяют аналогичным отношениям, поверхности обратных скоростей имеют тот же вид. В частности, чтобы получить поверхности обратных скоростей для кристаллов с  $k_1/k_3 = 1/2$  и  $k_3/k_2 = 4$ , следует повернуть поверхности  $1/v_1$  и  $1/v_2$  (представленные на рис. 3.16) на угол  $\pi/2$  около оси  $x_1$ , если  $k_1/k_3 = k_3/k_2 = 2$  - последовательно повернуть  $1/v_1$  и  $1/v_2$  на угол  $\pi/2$  около осей  $x_1$  и  $x_3$ , и т. д.

Для построения волновых поверхностей выразим  $p_0$  из уравнения (3.22):

$$p_0^{(i)} = \frac{\sqrt{B - (-1)^i \sqrt{B^2 - 4\tau_1 k_1 k_2 k_3 (k_1 p_1^2 + k_2 p_2^2 + k_3 p_3^2)}}}{\sqrt{2k_1 k_2 k_3}}, \quad (3.24)$$

$$B = p_1^2 k_1 (k_2 + k_3) + p_2^2 k_2 (k_1 + k_3) + p_3^2 k_3 (k_1 + k_2), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, дифференцируя соотношения (3.24) по параметрам  $p_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , после соответствующих преобразований найдем следующие выражения для координат точек среды, которые определяют геометрию волновых фронтов, распространяющихся от точечного источника:

$$\begin{aligned} \frac{x_j^{(i)} \sqrt{\varepsilon \mu}}{t} &= \frac{1}{k_1 k_2 k_3 v_i} \left( n_i k_i (k_1 + k_2 + k_3 - k_i) - (-1)^i \times \right. \\ &\times \frac{A p_i k_i (k_1 + k_2 + k_3 - k_i) - 2k_1 k_2 k_3 \left( p_i (k_1 n_1^2 + k_2 n_2^2 + k_3 n_3^2) + k_1 n_1 \right)}{\sqrt{A^2 - 4k_1 k_2 k_3 (k_1 n_1^2 + k_2 n_2^2 + k_3 n_3^2)}} \left. \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь  $v_i$  и  $A$  определяются формулами (3.23),  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 3}$ .



Применим формулы (3.23) для построения трехмерных фронты электромагнитных волн. На рисунке 3.17 представлены волновые поверхности для ниобата бария (числовые данные прежние).

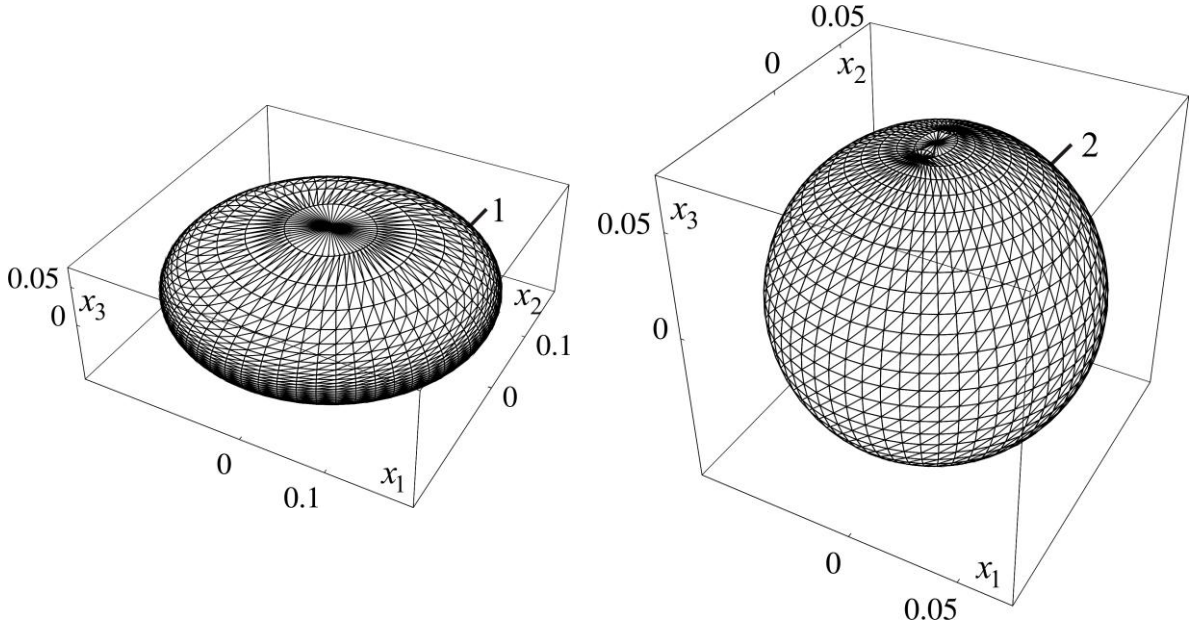


Рис. 3.17. Трехмерные фронты электромагнитных волн, распространяющиеся в ниобате бария, со скоростью  $v_1$  (1) и  $v_2$  (2)

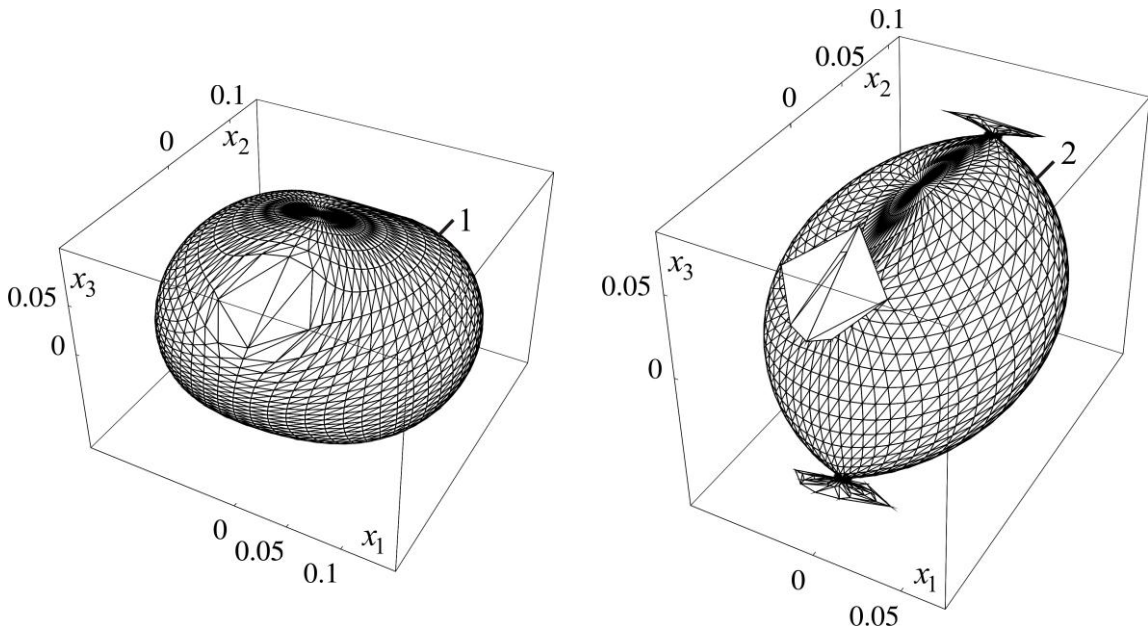


Рис. 3.18. Трехмерные фронты электромагнитных волн, распространяющихся в двухосных кристаллах с диэлектрическими проницаемостями  $k_1/k_3 = 2$  и  $k_3/k_2 = 1/4$  со скоростями  $v_1$  (1) и  $v_2$  (2)

Из рисунка 3.17 видно, что волновые поверхности, распространяющиеся в ниобате бария, не имеют лакун. Другой вид принимают трехмерные фронты электромагнитных волн, распространяющиеся в двухосных кристаллах, диэлектрические проницаемости которых удовлетворяют соотношениям  $k_1/k_3 = 2$  и  $k_3/k_2 = 1/4$ . Результат построения для таких кристаллов представлен на рис. 3.18.

Как следует из рисунка 3.18, волновой фронт, распространяющийся со скоростью  $v_2$ , содержит четыре лакуны, которые имеют вид конусов (причем основание лакуны не является окружностью) и расположены симметрично относительно координатных плоскостей. Так, в случае, представленном на рис. 3.18, лакуны расположено симметрично относительно координатных плоскостей  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 0$ , плоскость  $x_1 = 0$  проходит через лакуны. Трехмерный волновой фронт, распространяющийся со скоростью  $v_1$ , не содержит лакун и представляет собой эллипсоид, сжатый в направлении биссектрис координатных четвертей плоскости  $x_1 = 0$ . Добавим, что аналогичный вид имеют волновые поверхности для двухосных кристаллов, диэлектрические проницаемости которых удовлетворяют следующим соотношениям:  $k_1/k_3 = 1/2$ ,  $k_3/k_2 = 4$ ;  $k_1/k_3 = k_3/k_2 = 2$ ;  $k_1/k_3 = 4$ ,  $k_3/k_2 = 1/2$ ;  $k_1/k_3 = k_3/k_2 = 1/2$  и  $k_1/k_3 = 1/4$ ,  $k_3/k_2 = 2$ .

Рассмотрим сечения поверхностей обратных скоростей волновых поверхностей координатными плоскостями  $x_j = 0$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Выражения (3.23), определяющие скорости распространения электромагнитных волн в плоскостях координат, принимают следующий вид:

$$v_{1i} = \frac{\sqrt{k_2 k_3 + a k_1 - (-1)^i |k_2 k_3 - a k_1|}}{\sqrt{2 k_1 k_2 k_3}}, \quad (3.26)$$

$$a = k_3 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha,$$

$$v_{2i} = \frac{\sqrt{k_1 k_3 + b k_2 - (-1)^i |k_1 k_3 - b k_2|}}{\sqrt{2 k_1 k_2 k_3}}, \quad (3.27)$$

$$b = k_3 \cos^2 \alpha + k_1 \sin^2 \alpha,$$

$$v_{3i} = \frac{\sqrt{k_1 k_2 + c k_3 - (-1)^i |k_1 k_2 - c k_3|}}{\sqrt{2 k_1 k_2 k_3}}, \quad (3.28)$$

$$c = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha.$$

Здесь первый нижний индекс  $k = \overline{1, 3}$  указывает на координатную плоскость  $x_k = 0$  соответственно. Угол  $\alpha$  для скорости  $v_{1i}$  отсчитывается от оси координат  $0x_2$ , для скоростей  $v_{2i}$  и  $v_{3i}$  - от оси координат  $0x_1$ ,  $i = 1, 2$ . Сечения безразмерных поверхностей обратных скоростей  $1/v_1$  и  $1/v_2$  плоскостью  $x_1 = 0$  для двухосных кристаллов, диэлектрические проницаемости которых удовлетворяют соотношениям  $k_1/k_3 = 2$  и  $k_3/k_2 = 1/4$ , представлены на рис. 3.19.

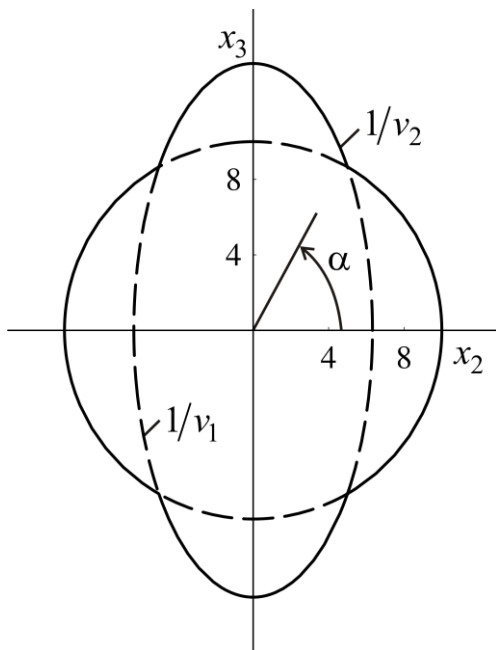


Рис. 3.19. Кривые обратных скоростей для электромагнитных волн в плоскости координат  $x_1 = 0$  для двухосных кристаллов с диэлектрическими проницаемостями  $k_1/k_3 = 2$  и  $k_3/k_2 = 1/4$

Рисунок 3.19 показывает, что кривая  $1/v_2$  имеет особенности (существование у одной касательной двух точек касания), указывающие на возникновение четырех лагун на двумерном волновом фронте в плоскости  $x_1 = 0$ . На основании результатов анализа особенностей кривых обратных скоростей  $1/v_2$ , проведенного для трех координатных плоскостей, можно сформулировать две группы условий появления лагун в виде пар неравенств, которым должны удовлетворять безразмерные диэлектрические проницаемости кристалла. Следует отметить, что условия, сформулированные в таблице 3.1, носят приближенный характер, и погрешность числового значения в правой части неравенств может достигать  $\pm 0.05$ . В случае нарушения хотя бы одного из неравенств условий 1 или 2 лагуны на волновом фронте электромагнитной волны, распростра-



няющейся о скоростью  $v_2$  не возникают. В частности, для ниобата бария  $k_1/k_3 = 7$ ,  $k_3/k_2 = 0.14$ ,  $k_2/k_1 \leq 1.03$ , то есть не выполняется первое условие возникновения лакун в плоскости  $x_2 = 0$  (или второе условие для плоскости  $x_1 = 0$ ).

Таблица 3.1

**Условия возникновения лакун на трехмерном фронте электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью  $v_2$**

Условия	Плоскость		
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$
1	$k_1/k_3 \leq 0.85$ $k_3/k_2 \geq 1.15$ $k_2/k_1 \leq 0.85$	$k_1/k_3 \geq 1.15$ $k_3/k_2 \leq 0.85$ $k_2/k_1 \leq 0.85$	$k_1/k_3 \geq 1.15$ $k_3/k_2 \geq 1.15$ $k_2/k_1 \leq 0.85$
2	$k_1/k_3 \geq 1.15$ $k_3/k_2 \leq 0.85$ $k_2/k_1 \geq 1.15$	$k_1/k_3 \leq 0.85$ $k_3/k_2 \geq 1.15$ $k_2/k_1 \geq 1.15$	$k_1/k_3 \leq 0.85$ $k_3/k_2 \leq 0.85$ $k_2/k_1 \geq 1.15$

Для построения двумерных волновых фронтов электромагнитных волн в координатных плоскостях, запишем с помощью соотношений (3.25) выражения для соответствующих координат точек среды:

$$\frac{x_2^{(i)} \sqrt{\varepsilon\mu}}{t} = \sqrt{k_2} n_2 \times \frac{\left( (k_1 + k_2) |k_2 k_3 - a k_1| - (-1)^i (k_1 - k_3) (a k_1 - k_2 k_3) \right)}{\left( \sqrt{2 k_1 k_3} \sqrt{k_2 k_3 + a k_3} - 1 \right) |k_2 k_3 - a k_1|}, \quad (3.29)$$

$$\frac{x_3^{(i)} \sqrt{\varepsilon\mu}}{t} = \sqrt{k_3} n_3 \times \frac{\left( (k_1 + k_2) |k_2 k_3 - a k_1| - (-1)^i (k_1 - k_3) (a k_1 - k_2 k_3) \right)}{\left( \sqrt{2 k_1 k_2} \sqrt{k_2 k_3 + a k_3} - 1 \right) |k_2 k_3 - a k_1|},$$

$$\frac{x_1^{(i)} \sqrt{\varepsilon\mu}}{t} = \sqrt{k_1} n_1 \times$$

$$\times \frac{\left( (k_2 + k_3) |k_1 k_3 - b k_2| - (-1)^i (k_2 - k_3) (b k_2 - k_1 k_3) \right)}{\left( \sqrt{2 k_2 k_3} \sqrt{k_2 k_3 + b k_2} - 1 \right) |k_1 k_3 - b k_2|},$$

$$\frac{x_3^{(i)} \sqrt{\varepsilon \mu}}{t} = \sqrt{k_3} n_3 \times \quad (3.30)$$

$$\times \frac{\left( (k_1 + k_2) |k_2 k_3 - a k_1| - (-1)^i (k_1 - k_3) (a k_1 - k_2 k_3) \right)}{\left( \sqrt{2 k_1 k_2} \sqrt{k_2 k_3 + b k_2} - 1 \right) |k_1 k_3 - b k_2|};$$

$$\frac{x_1^{(i)} \sqrt{\varepsilon \mu}}{t} = \sqrt{k_1} n_1 \times$$

$$\times \frac{\left( (k_2 + k_3) |k_1 k_2 - c k_3| - (-1)^i (k_3 - k_2) (c k_3 - k_1 k_2) \right)}{\left( \sqrt{2 k_2 k_3} \sqrt{k_1 k_2 + c k_3} - 1 \right) |k_1 k_2 - c k_3|},$$

$$\frac{x_2^{(i)} \sqrt{\varepsilon \mu}}{t} = \sqrt{k_2} n_2 \times \quad (3.31)$$

$$\times \frac{\left( (k_1 + k_3) |k_1 k_2 - c k_3| - (-1)^i (k_3 - k_1) (c k_3 - k_1 k_2) \right)}{\left( \sqrt{2 k_1 k_3} \sqrt{k_1 k_2 + c k_3} - 1 \right) |k_1 k_2 - c k_3|};$$

Здесь  $n_k$  - направляющие косинусы нормали к волновой поверхности. Заметим, что формулы (3.29) - (3.31) описывают распространение двумерных волновых фронтов в плоскостях  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 0$  соответственно; выражения  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются в соответствии с соотношениями (3.26) – (3.28). Сечения волновых поверхностей электромагнитных волн плоскостью  $x_1 = 0$  для двухосных кристаллов с диэлектрическими проницаемостями, удовлетворяющими соотношениям  $k_1/k_3 = 2$ ,  $k_3/k_2 = 1/4$  и  $k_1/k_3 = 5$ ,  $k_3/k_2 = 1/10$ , представлены на рис. 3.20.

Из рисунка 3.20 видно, что двумерные волновые фронты в области лакун накладываются друг на друга. При этом фронт волны, распространяющейся со скоростью  $v_2$ , не выходит за линию фронта волны, распространяющейся со скоростью  $v_1$ . Для материалов с диэлектрическими проницаемостями, удовлетворяющими второму условию в плоскости  $x_1 = 0$ , фронт волны, имеющей скорость  $v_2$ , в плоскостях  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 0$  является окружностью и эллипсом соответственно.

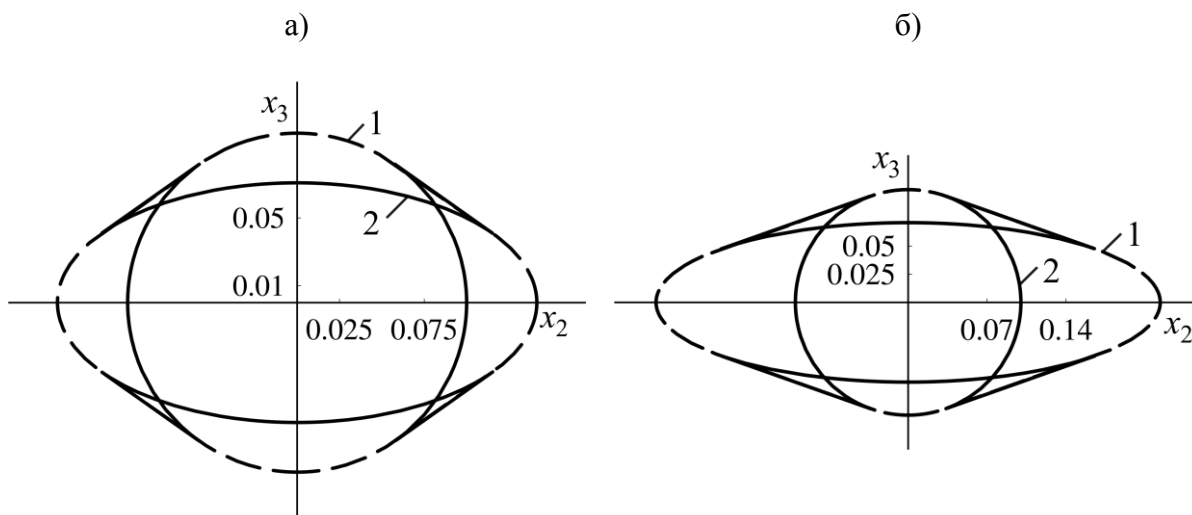


Рис. 3.20. Сечения трехмерных фронтов электромагнитных волн плоскостью  $x_1 = 0$  распространяющихся в материалах с отношениями диэлектрических проницаемостей  $k_1/k_3 = 2$  и  $k_3/k_2 = 1/4$  (а);  $k_1/k_3 = 5$ ,  $k_3/k_2 = 1/10$  (б) со скоростями: 1 -  $v_1$ , 2 -  $v_2$

Таким образом, волновые поверхности электромагнитных волн в двухосных кристаллах являются либо эллипсоидами, либо в случае выполнения условий, представленных в таблице 3.1, поверхностями, аналогичными показанным на рис. 3.18. В одноосных кристаллах волновые поверхности представляют собой эллипсоид и сферу, в кубических кристаллах – две сферы.

### 3.4. Распространение поверхностей разрыва в магнитоупругом изотропном теле и магнитной жидкости с идеальной проводимостью

Теория магнитоупругости изучает взаимное воздействие поля деформаций и электромагнитного поля на напряженно-деформированное состояние и динамические процессы в твердом теле, и является одним из современных направлений механики деформируемого твердого тела [9]. Полученные в этой области результаты в основном связаны с решениями одномерных и двумерных задач для магнитоупругих сред с идеальной и реальной проводимостью. Ниже рассмотрим распространение поверхностей слабого разрыва в изотропной неограниченной магнитоупругой среде с идеальной проводимостью. Соответствующую систему уравнений движения представим в векторном виде [41]:

$$A_{44}\Delta\vec{u} + (A_{11} - A_{44})\text{grad}(\text{div}(\vec{u})) + \frac{1}{\mu_e}\text{rot}(\text{rot}(\vec{u} \times \vec{B})) \times \vec{B} = \rho\ddot{\vec{u}}, \quad (3.32)$$

где  $\vec{u}$  – вектор перемещений;  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции;  $A_{11}$ ,  $A_{44}$  – постоянные упругости изотропной среды ( $A_{11} = \lambda - 2\mu$ ,  $A_{44} = \mu$ );  $\mu_e$  – магнитная постоянная.

После стандартной процедуры получим следующее характеристическое уравнение для системы (3.32):

$$\left(\frac{p_0^2}{c_2^2} - \tau_1 - \left(\sum_{k=1}^3 b_k p_k\right)^2\right) \left(\frac{p_0^4}{c_2^4} - \tau_1 \left(a_{11} + 1 + \sum_{k=1}^3 b_k^2\right) \frac{p_0^2}{c_2^2} + \tau_1 \left(\left(a_{11} + \sum_{k=1}^3 b_k^2\right) \tau_1 + (a_{11} - 1) \left(\sum_{k=1}^3 b_k p_k\right)^2\right)\right) = 0. \quad (3.33)$$

Отсюда для безразмерных скоростей распространения магнитоупругих волн:

$$v_j = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \left( a_{11} + 1 + \sum_{k=1}^3 b_k^2 \right) - (-1)^j \sqrt{\left( a_{11} + 1 + \sum_{k=1}^3 b_k^2 \right)^2 - 4 \left( a_{11} + \sum_{k=1}^3 b_k^2 - (a_{11} - 1) \left( \sum_{k=1}^3 b_k n_k \right)^2 \right)} \right)}, \quad j = 1, 2, \quad (3.34)$$

$$v_3 = \sqrt{1 + \left( \sum_{k=1}^3 b_k n_k \right)^2}.$$

В формулах (3.33) и (3.34)  $b_k = B_k / (\mu_e A_{44})$  – безразмерные компоненты вектора магнитной индукции,  $k = \overline{1, 3}$ . Индекс  $j = 1$  соответствует скорости распространения квазипродольной магнитоупругой волны,  $j = 2, 3$  – скоростям распространения магнитоупругих квазипоперечных волн. Из выражений (3.34) следует, что скорости распространения магнитоупругих волн в изотропной среде с идеальной проводимостью зависят как от направляющих косинусов нормали к волновой поверхности, так и от значений компонент вектора магнитной индукции. В случае равенства

нулю составляющих вектора напряженности магнитного поля соотношения (3.34) переходят в известные формулы для безразмерных скоростей распространения упругой продольной ( $v_1 = a$ ) и поперечной волн ( $v_2 = v_3 = 1$ ).

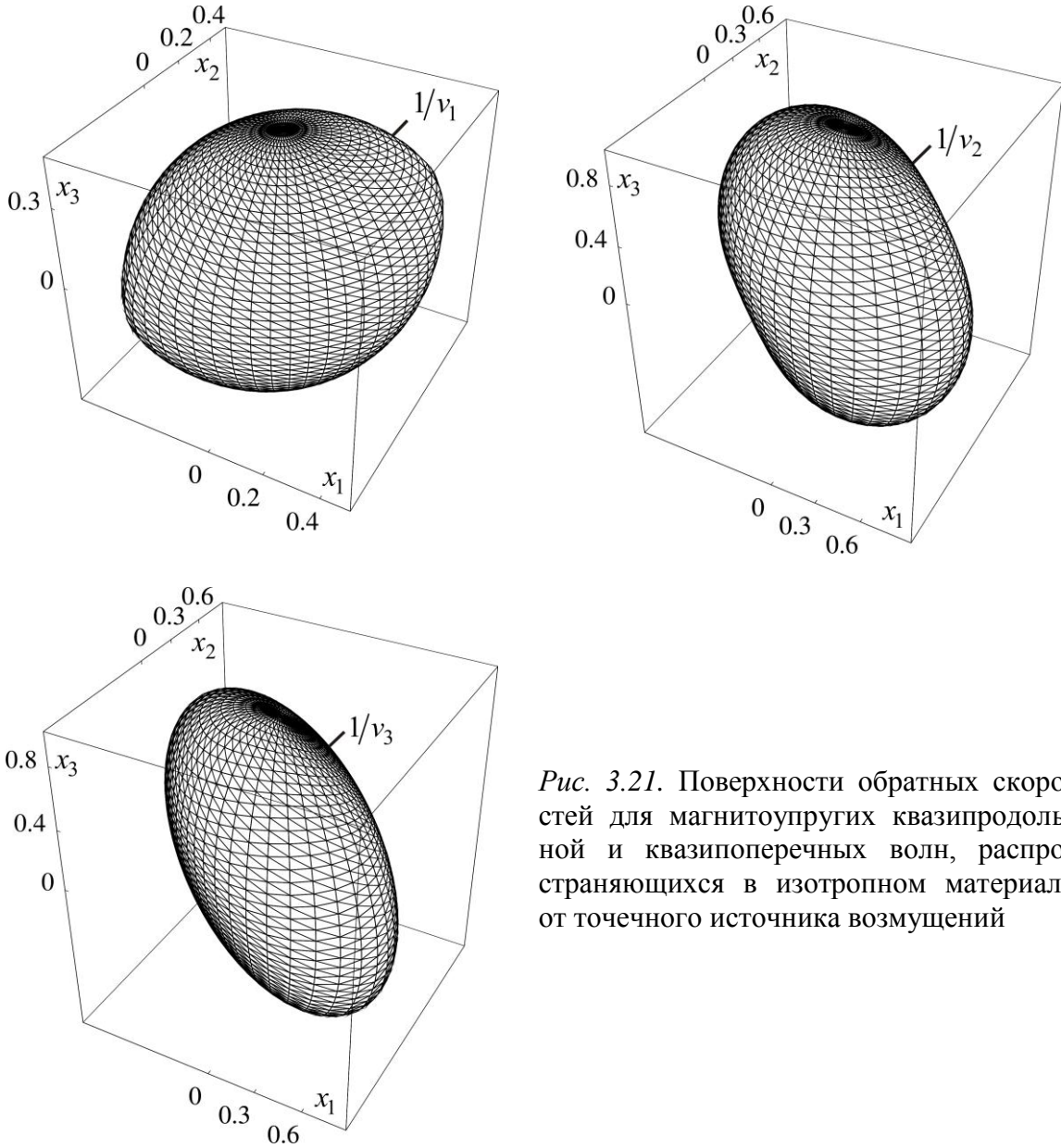


Рис. 3.21. Поверхности обратных скоростей для магнитоупругих квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в изотропном материале от точечного источника возмущений

Применим выражения (3.34) для построения безразмерных поверхностей обратных скоростей для магнитоупругих волн. На рисунке 3.21 приведены поверхности  $1/v_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$  для изотропного материала с идеальной проводимостью, находящегося в магнитном поле с индукцией

$b_1 = b_2 = 1$  и  $b_3 = 0.5$  (упругие свойства материала описываются константой  $a_{11} = 2.72$ ).

Из рисунка 3.21 видно, что поверхность  $1/v_2$  содержит два участка, на которых выпуклость переходит в вогнутость. Это указывает на появление двух лакун на трехмерном фронте квазипоперечной волны, распространяющейся со скоростью  $v_2$ . Поверхности  $1/v_1$  и  $1/v_3$  указанными особенностями не обладают, то есть распространение магнитоупругих волн со скоростями  $v_1$  и  $v_3$  не сопровождается образованием лакун.

Для нахождения бихарактеристик системы (3.32) найдем решения характеристического уравнения (3.33) относительно  $p_0$  и выполним их дифференцирование по параметрам  $p_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . После несложных преобразований будем иметь следующие выражения для координат, определяющих геометрию волнового фронта магнитоупругих волн:

$$\frac{x_i^{(j)}}{c_2 t} = \frac{1}{v_j \sqrt{2}} \left( n_i \left( a + 1 + \sum_{k=1}^3 b_k^2 \right) - \frac{\left( n_i - 3n_i \left( a + \sum_{k=1}^3 b_k^2 \right) + (a-1) \left( 2n_i \left( \sum_{k=1}^3 b_k n_k \right) - 2b_i \right) \left( \sum_{k=1}^3 b_k n_k \right) \right)}{\sqrt{\left( a + 1 + \sum_{k=1}^3 b_k^2 \right)^2 - 4 \left( a + \sum_{k=1}^3 b_k^2 - (a-1) \left( \sum_{k=1}^3 b_k n_k \right) \right)^2}} \right), \quad (3.35)$$

$$\frac{x_i^{(3)}}{c_2 t} = \frac{n_i}{v_3} \left( 1 + b_i \sum_{k=1}^3 b_k n_k \right), \quad j = 1, 2, i = \overline{1, 3}.$$

Здесь верхний индекс указывает на тип магнитоупругой волны: 1 – квазипродольная волна, 2 и 3 – квазипоперечные волны.

Применим формулы (3.35) для построения безразмерных трехмерных волновых фронтов магнитоупругих волн. Результаты построения представлены на рис. 3.22 (при построении принимаем  $a = 2.72$ ,  $b_1 = b_2 = 1$  и  $b_3 = 0.5$ ).

Из рисунка 3.22 видно, что при распространении магнитоупругой волны со скоростью  $v_2$  при указанных значениях компонент вектора магнитной индукции возникают две лакуны. При распространении двух других магнитоупругих волн лакун, ни при каких значениях магнитной индукции.

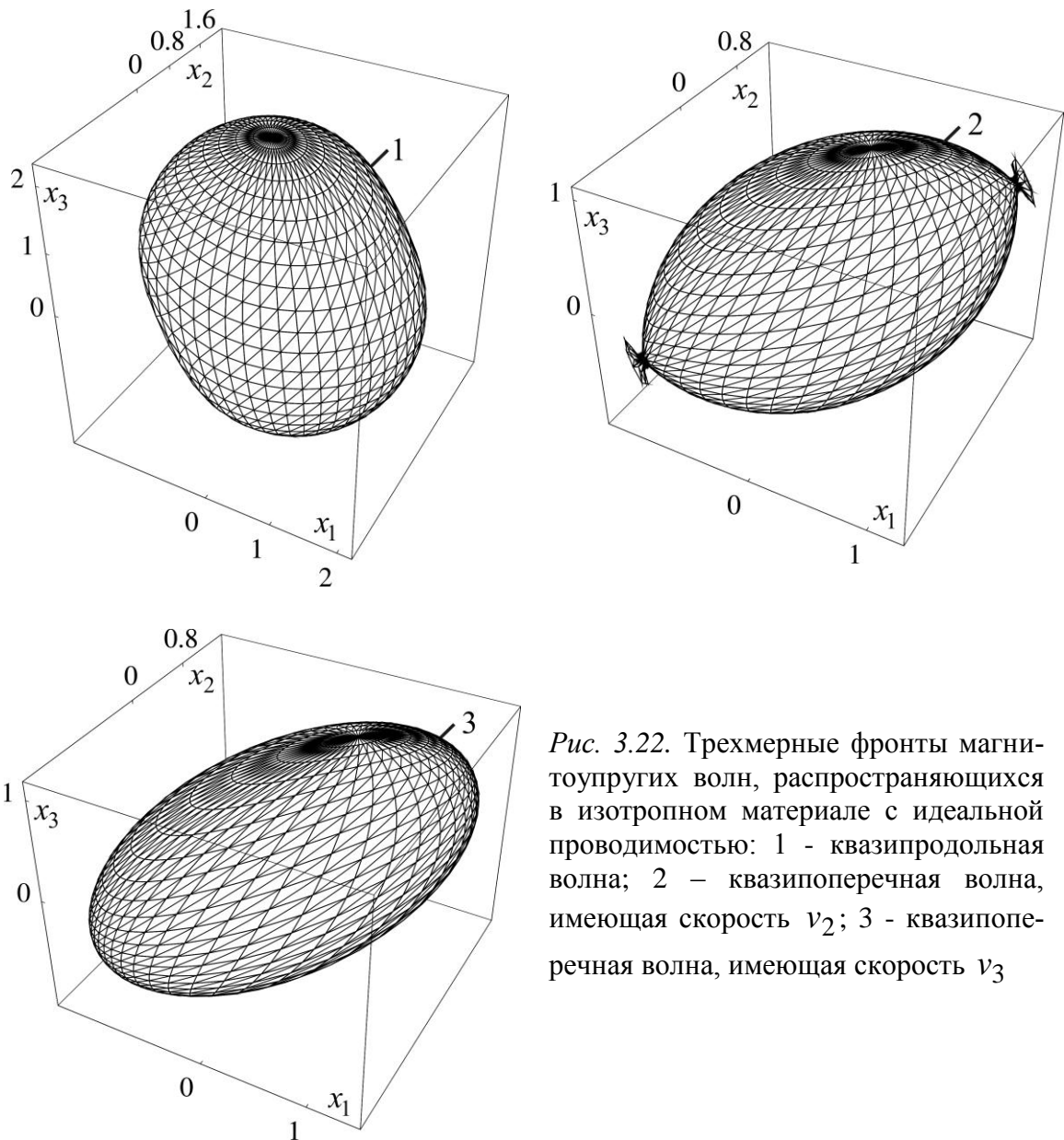


Рис. 3.22. Трехмерные фронты магнитоупругих волн, распространяющихся в изотропном материале с идеальной проводимостью: 1 - квазипродольная волна; 2 - квазипоперечная волна, имеющая скорость  $v_2$ ; 3 - квазипоперечная волна, имеющая скорость  $v_3$

Анализ условий появления лакун в результате действия магнитного поля показывает, что наблюдать возникновение лакун на волновом фронте квазипоперечной волны, распространяющейся со скоростью  $v_2$ , можно при выполнении приближенного равенства единице хотя бы одной из трех составляющих вектора магнитной индукции. Так, например, возникновение лакун можно наблюдать в случаях, когда  $b_1 = b_3 = 0.2, b_2 = 1$  или  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ .

Исследуем характер фронтов магнитоупругих волн, распространяющихся в изотропной среде с идеальной проводимостью, для случая, ко-

где  $b_1 = b_2 = b_3 = b$ . Введем вектор прерывности  $\vec{h}^{(j)} = (h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, h_3^{(j)})$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Для определения отношений компонент вектора прерывности имеем следующую систему неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} w_{11} + w_{12}H_2^{(j)} + w_{13}H_3^{(j)} &= 0, \\ w_{21} + w_{22}H_2^{(j)} + w_{23}H_3^{(j)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где  $H_k^{(j)} = h_k^{(j)} / h_1^{(j)}$ ,  $k = 1, 2$ . Коэффициенты системы (3.34) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_{ii} &= 1 + (a - 1 + 2b^2)n_i^2 + (n_1 + n_2 + n_3 - n_i)^2 b^2 - v^2, \quad i \neq j = \overline{1, 3}, \\ w_{ij} &= (a - 1 + b^2)p_i p_j - b^2(n_i^2 + n_j^2 + (n_i + n_j)(n_1 + n_2 + n_3 - n_i - n_j)). \end{aligned}$$

Из системы (3.36) получим:

$$H_2^{(j)} = \frac{w_{12}w_{13} - w_{11}w_{23}}{w_{12}w_{23} - w_{13}w_{22}}, \quad H_3^{(j)} = \frac{w_{12}^2 - w_{11}w_{22}}{w_{13}w_{22} - w_{12}w_{23}}. \quad (3.37)$$

Соотношения для косинусов угла между вектором прерывности и нормалью к характеристической поверхности найдем в соответствии со следующим выражением:

$$\cos \gamma_j = \frac{n_1 + n_2 H_2^{(j)} + n_3 H_3^{(j)}}{\sqrt{1 + (H_2^{(j)})^2 + (H_3^{(j)})^2}}. \quad (3.38)$$

Подставим в формулу (3.38) одновременно соотношения для безразмерных компонент вектора прерывности и соответствующие выражения (3.34) для скоростей распространения магнитоупругих волн. В результате для волны, распространяющейся со скоростью  $v_3$ , получим  $\cos \gamma_3 = 0$ , то есть вектор прерывности оказывается перпендикулярен нормали к волновой поверхности. Таким образом, магнитное поле не влияет на направление перемещений, сопровождающих распространение волны со скоростью  $v_3$  в изотропном теле с идеальной проводимостью, и магнитоупругая волна является поперечной. Анализ зависимостей косинуса угла между  $\vec{h}$  и  $\vec{n}$  от направляющих косинусов нормали к волновой поверхности  $n_k$ , получаемых подстановкой в соотношение (3.38) выражений (3.37) и выражений для скоростей  $v_1$  и  $v_2$ , показывает, что наличие



магнитного поля в каждом из случаев приводит к изменению ориентации вектора прерывности. В частности, значение  $|\cos\gamma_2|$  при изменении направляющих косинусов  $n_k$  от 0 до  $\pi/2$  изменяется от 0 до 0.005 (материальные константы  $a = 2.72$ ,  $b = 1$ ). Это позволяет сделать вывод о том, что магнитоупругие волны, распространяющиеся в изотропной среде с идеальной проводимостью со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , являются квазипродольной и квазипоперечными волнами соответственно.

Исследования закономерностей распространения магнитогидродинамических волн, распространяющихся в идеально проводящей жидкости при наличии магнитного поля, представлены в работе [30]. Рассмотрим поверхности скоростей волн Альфвена и соответствующие трехмерные фронты волн, распространяющихся в сжимаемой ионизированной жидкости, находящейся во внешнем магнитном поле с учетом различных составляющих вектора напряженности магнитного поля. Соответствующую систему уравнений представим в следующем виде (в предположении малости движений) [30]:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}(p) - \frac{1}{\mu_e} \text{rot}(\vec{B}) \times \vec{B} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) &= 0,\end{aligned}\tag{3.40}$$

Здесь  $\vec{v}$  – вектор скоростей;  $p = f(\rho)$  – давление, являющееся функцией плотности;  $\vec{B}$  – вектор напряженности магнитного поля;  $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$ .

Уравнение характеристик для системы (3.37) представим в виде:

$$\det \|w_i\|_{7 \times 7} = 0,\tag{3.41}$$

где  $w_{jk} = B_j p_k$ ,  $w_{kk} = B_k p_k - \sum_{n=1}^3 B_n p_n$ ,  $w_{j+3,j} = \rho p_0$ ,  $w_{7k} = \rho p_k$ ,  $w_{77} = p_0$ ,

$w_{j,j+3} = p_0 + \sum_{n=1}^3 u_n p_n - u_j p_j$ ,  $w_{j,k+3} = -u_j p_k$ ,  $w_{j+3,k+3} = B_k p_j / \mu_e$ ,

$w_{j+3,j+3} = -\frac{1}{\mu_e} (\sum_{n=1}^3 B_n p_n - B_j p_j)$ ,  $w_{j+3,7} = a^2 p_j$ ,  $a = \sqrt{dp/d\rho}$  – скорость

звука,  $j \neq k = 1, 3$ ; остальные компоненты равны нулю.

Раскрыв определитель, после несложных преобразований будем иметь (считаем, что система координат перемещается вместе с жидкостью, то есть  $u_k = 0$  [30]):

$$p_0 \left( \mu_e \rho p_0^2 - (B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3)^2 \right) (A p_0^4 + B p_0^2 + C) = 0. \quad (3.42)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$A = \mu_e \rho, \quad H = -\left( B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + a^2 \mu_e \rho \right) \tau_1,$$

$$C = a^2 (B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3)^2 \tau_1.$$

Из уравнения (3.42), учитывая, что скорость распространения поверхности разрыва  $V = -p_0 / \sqrt{\tau}$ , получим

$$\begin{aligned} & v \left( v^2 - (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2 \right) \times \\ & \times \left( v^4 - v^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1) + (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где  $v = V/a$  - безразмерная скорость распространения поверхности разрыва,  $b_k = \frac{B_k}{a \sqrt{\mu_e \rho}}$  - безразмерная скорость волны Альфвена,  $k = \overline{1, 3}$ .

Из уравнения (3.43) следует существование линии тока (стационарная поверхность разрыва), скорость которой  $v = 0$ , а также прямой и обратной волн Альфвена, распространяющихся со скоростями  $v = \pm \sqrt{b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3}$ . Поскольку анализ этих волн подробно выполнен в [30], обратимся к модифицированным волнам Альфвена, на скорость распространения которых влияет скорость звука  $a$ . Из уравнения (3.43), имеем:

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{A - (-1)^i \sqrt{A^2 - (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2}}, \\ A &= \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1). \end{aligned} \quad (3.44)$$

С помощью формул (3.44) можно выполнить построения поверхностей скоростей, отражающих зависимость фазовой скорости от угла наклона нормали к волновой поверхности, а также их сечений различными плоскостями, для модифицированных волн Альфвена. Рассмотрим поверхности скоростей для различных значений компонент вектора магнитной индукции. На рис. 3.23 представлены поверхности скоростей для

магнитогидродинамических волн, распространяющихся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  в идеальной жидкости, находящейся во внешнем магнитном поле, характеризующимся значениями  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 0.1$ .

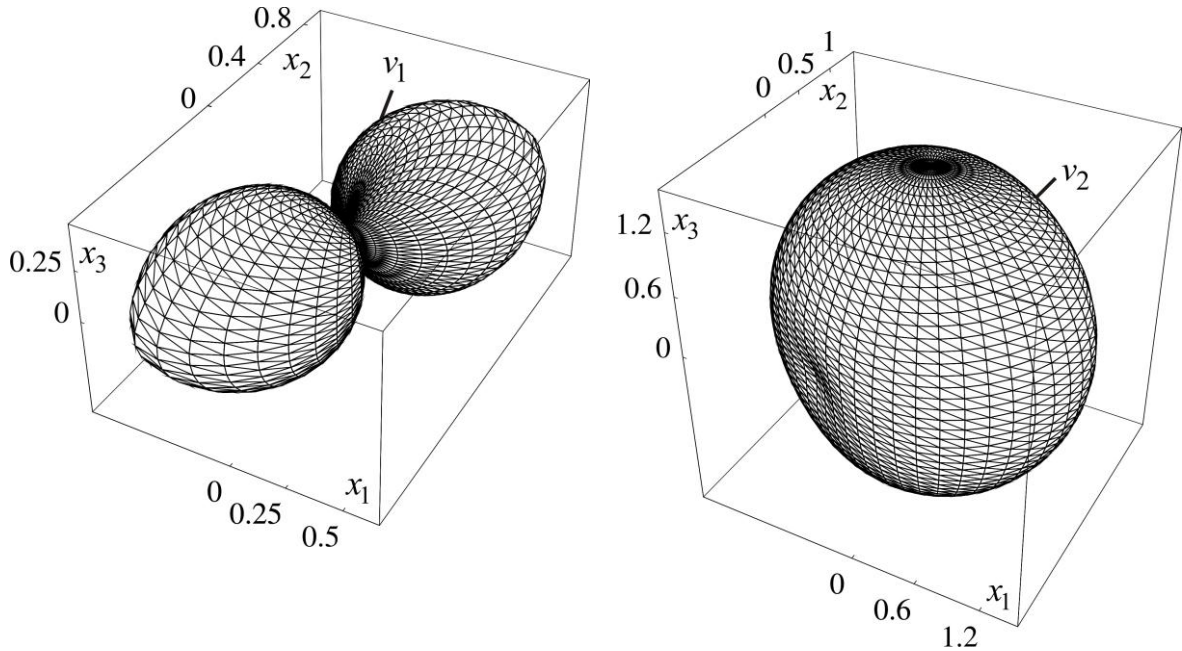


Рис 3.23. Поверхности скоростей для магнитогидродинамических волн

Аналогичный вид имеют поверхности скоростей для магнитогидродинамических волн, распространяющихся жидкости, характеризующейся безразмерными скоростями Альфвена  $b_1 = 0.1$ ,  $b_2 = 0.5$ ,  $b_3 = 1$  и  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 0.1$ . Для этих значений безразмерных скоростей волн Альфвена поверхность скоростей для гидродинамической волны, распространяющейся со скоростью  $v_2$ , имеет вид сферы. Поверхность скоростей, соответствующая волне, распространяющейся со скоростью  $v_1$ , представляет собой повернутый относительно начала координат эллипсоид, сжатый в направлении одной из осей. Особенностью этой поверхности является наличие областей вогнутости и выпуклости, что указывает на возникновение лакун на фронтах этих волн. При циклическом изменении значений  $b_1, b_2, b_3$  область вогнутости поворачивается таким образом, что оказывается расположенной на прямой, которая является биссектрисой координатных углов. Участки выпуклости и вогнутости могут наблюдаться на поверхностях скоростей магнитогидродинамических волн и в случаях, когда компоненты вектора магнитной индукции не отличаются друг от друга. При уменьшении или увеличении значений

безразмерных скоростей волн Альфвена, поверхность скоростей, соответствующая волне, распространяющейся со скоростью  $v_1$ , приобретает вид эллипсоида (или сферы).

Для определения координат точек среды, до которых дошло волновое возмущение, выразим из уравнения (3.42) параметр  $p_0$ :

$$p_0 = 0, \quad \frac{p_0}{a} = b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0^{(i)}}{a} = & \sqrt{\frac{1}{2} \left( (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1) (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \right.} \\ & \left. - (-1)^k \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1)^2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2 - \right.} \\ & \left. - 4(b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3)^2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \right)}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь верхний индекс  $k = 1$  соответствует волне, распространяющейся со скоростью  $v_1$ , индекс  $k = 2$  - волне, распространяющейся со скоростью  $v_2$ .

Выражения (3.45) описывают стационарную поверхность разрыва (линию тока) и прямую (и обратную) волны Альфвена [30]. Далее рассмотрим волны Альфвена, скорость распространения которых зависит от скорости звука. Из выражений (1.19) с учетом соотношений (3.46) после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{x_k^{(i)}}{at} = & \frac{1}{\sqrt{2}v_i} \left( (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1)n_k - (-1)^k n_k \times \right. \\ & \times \frac{1}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1)^2 - 4(b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2}} \times \\ & \times \left( (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 1)^2 - 2(b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3) \times \right. \\ & \left. \left. \times (b_k + (b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3)^2) \right) \right), i = 1, 2, k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

В формулах (3.47) верхний индекс также указывает на скорость распространения магнитогидродинамической волны (скорости  $v_i$  определяются выражениями (3.44)).

Применим выражения (3.47) для построения волновых поверхностей при различных значениях безразмерных скоростей распространения волн Альфвена. На рис. 3.24 представлены безразмерные трехмерные фронты, описываемые тройками безразмерных координат  $x_k^{(1)}/(at)$  и  $x_k^{(2)}/(at)$ , для случаев, когда  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 0.1$ . Для нахождения абсолютных значений координат точек волнового фронта, необходимо значения, приведенные по осям координат на рис. 3.24 умножить на произведение  $at$ .

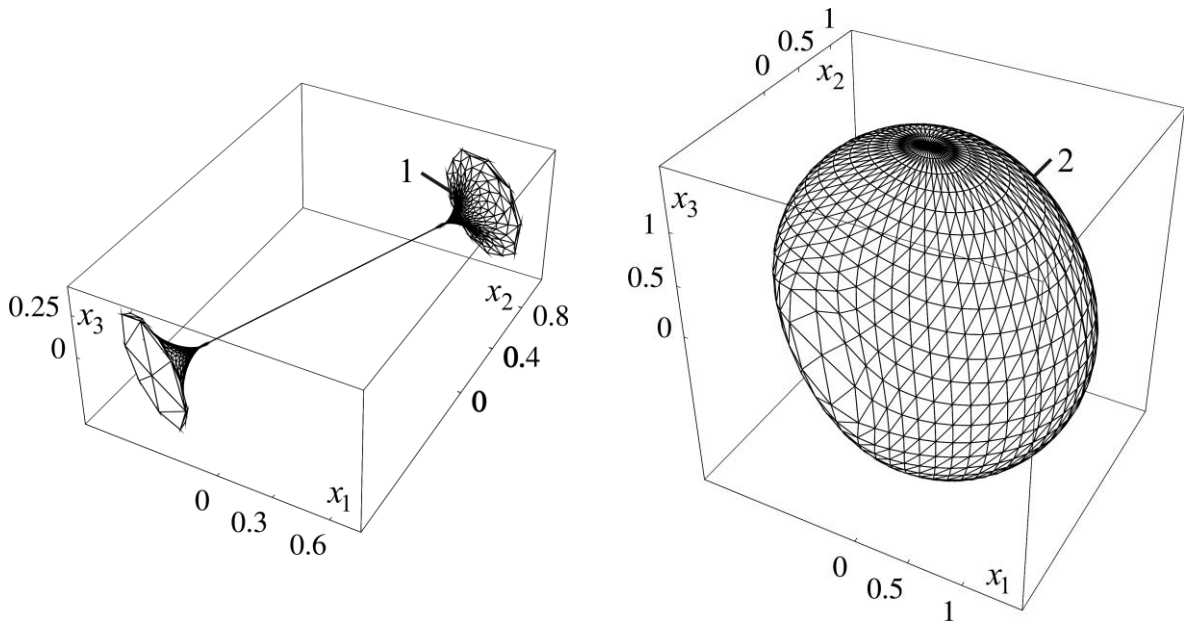


Рис. 3.24. Трехмерные фронты магнитогидродинамических волн, распространяющиеся со скоростями  $v_1$  (1) и  $v_2$  (2)

Из рисунка 3.24 видно, что при распространении гидродинамической волны со скоростью  $v_1$  происходит возникновение лакун на волновом фронте. Лакуны представляют собой конусы, ось которых является биссектрисой координатных четвертей, причем положение лакун соответствует участкам вогнутости на поверхностях скоростей для соответствующих магнитогидродинамических волн. При распространении магнитогидродинамической волны со скоростью  $v_2$  лакун на волновом фронте не наблюдается, а волновая поверхность представляет собой эллипсоид, сжатый в направлении одной из осей.

Рассмотрим влияние на форму лакун, возникающих на волновых фронтах магнитогидродинамических волн, которые распространяются со

скоростью  $v_1$ , безразмерных скоростей распространения волн Альфвена. Анализ трехмерных волновых фронтов, проведенный для различных значений равных между собой безразмерных скоростей волн Альфвена показывает, что наибольший угол лакуны наблюдается при  $b_1 = b_2 = b_3 = 0.75$ . В случае если значения  $b_1 = b_2 = b_3$  уменьшаются или увеличиваются, уменьшается угол лакуны. При этом трехмерный фронт магнитогидродинамической волны, распространяющейся со скоростью  $v_1$ , переходит в сферу. При увеличении безразмерных скоростей волн Альфвена значения координат точек, определяющих геометрию волновых фронтов, увеличиваются, причем для координат волнового фронта, распространяющихся со скоростью  $v_1$ , увеличение координат менее значительное, чем для волнового фронта, распространяющегося со скоростью  $v_2$ .