УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ДВУКРАТНЫМ ЯДРОМ КОШИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В настоящей статье рассматривается интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dt d\tau + \frac{1}{\pi^2}\iint_D k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dt d\tau = f(x,y),\ \ (x,y)\in D=[-1,1]\times[-1,1],$$

где k, f – заданные функции своих аргументов, непрерывные по Гельдеру; φ – искомая функция. Как и в одномерном случае, решение данного уравнения зависит от класса функций, в котором оно разыскивается. Для этого уравнения указана структура общего решения в классе ограниченных функций, приведены условия разрешимости. Далее получена вычислительная схема численного решения рассматриваемого уравнения. В основе вычислительной схемы заложено приближение заданных функций интерполяционными многочленами по узлам Чебышева первого рода в виде линейной комбинации многочленов Чебышева первого рода. Неизвестную функцию ищем в виде линейной комбинации многочленов Чебышева второго рода. Это позволило получить разложение сингулярного и регулярного интегралов по указанным многочленам и применить далее метод ортогональных многочленов. Указаны порядковые оценки погрешности приближенного решения в равномерной метрике. Приведен результат численного решения на модельном уравнении.

Ключевые слова: полиномы Чебышева; ядра Коши; сингулярные уравнения; приближенное решение.

In the present paper the aspect integral equation is considered

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dt d\tau + \frac{1}{\pi^2}\iint_D k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dt d\tau = f(x,y),\ \ (x,y)\in D=[-1,1]\times[-1,1],$$

where k, f – given functions of the arguments, continuous on Holder; φ – required function. As well as in an one-dimensional case the solution of the given equation depends on the class of functions which it is searched in. For this equation the common decision structure in a class of the limited functions is specified, resolvability conditions are reduced. Further the computing scheme of a numerical solution of the considered equation is received. At the heart of the computing scheme the approach of given functions by interpolation polynomials on knots of Chebyshev of the first kind in the form of a linear combination of polynomials of Chebyshev of the first kind is included. Unknown function is searched in the form of a linear combination of polynomials of Chebyshev of the second kind. It has allowed to receive expansion of singular and regular integrals on the specified polynomials and to apply further a method of orthogonal polynomials. Ordinal estimations of an error of approximate solution in the uniform metric are specified. The outcome of a numerical solution on the modelling equation is reduced.

Key words: Chebyshev polynomials; Cauchy-type kernels; singular equations; approximate solutions.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau + \frac{1}{\pi^2}\iint_D k(x,y,t,\tau)\varphi(t,\tau)dtd\tau = f(x,y), \quad (x,y)\in D=[-1,1]\times[-1,1], \tag{1}$$

где k, f – заданные функции своих аргументов, непрерывные по Гельдеру; φ – искомая функция.

Как и в одномерном случае [1], решение уравнения (1) зависит от класса функций, в котором оно разыскивается. Вопросы обратимости простейших так называемых характеристических операторов с мультипликативным ядром Коши изучались в [2]–[6]. Более того, поскольку названные уравнения встречаются в приложениях [7], [8], то важное значение имеют приближенные методы решения.

Характерной особенностью численного решения интегральных уравнений (в том числе и сингулярных) является их дискретизация. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения, в том числе и метод ортогональных многочленов, который базируется на замечательном свойстве классических многочленов: они являются собственными функциями многих интегральных операторов.

В теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши известны так называемые «спектральные соотношения» для сингулярных интегралов [9]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad |x|<1, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода. Данные соотношения будем применять для построения вычислительной схемы численного решения уравнения (1), основанной на разложении сингулярного и регулярного интегралов по многочленам Чебышева. Отметим, что после появления первых ЭВМ началось широкое внедрение в численный анализ многочленов Чебышева первого и второго рода $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ (см., например, [10]).

В данной статье рассмотрим построение вычислительной схемы численного решения уравнения (1) в классе функций, ограниченных на всем замкнутом квадрате D, а построение вычислительной схемы в классе H^* (по Мусхелишвили) рассмотрим в следующей публикации.

Вначале рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau = f(x,y), \quad (x,y)\in D, \tag{3}$$

где заданная функция $f(x, y)$ принадлежит классу H (классу Гельдера) по своим переменным.

Если решение $\varphi(x, y)$ уравнения (3) ищется в классе функций, ограниченных на всем замкнутом квадрате D, то при выполнении условий (необходимых и достаточных)

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x,y)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1}\frac{f(x,y)}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0, \qquad -1<x,y<1$$

оно имеет вид [5]

$$\varphi(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\; R(f;x,y),$$

где

$$R(f;x,y) = \frac{1}{\pi^2}\iint_D \frac{f(t,\tau)}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}.$$

Уравнение же (1) эквивалентно (в смысле разрешимости) относительно

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

интегральному уравнению Фредгольма вида

$$u(x,y) + \iint_D N(x,y,t,\tau)u(t,\tau)dtd\tau = R(f;x,y), \tag{4}$$

в котором

$$N(x,y,t,\tau) = \sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\,\frac{1}{\pi^4}\iiint_D \frac{k(\xi,\eta,t,\tau)}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}\frac{d\xi d\eta}{(\xi-x)(\eta-y)}$$

с присоединенными к нему уравнениями

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi^2}\iint_D k(x,y,t,\tau)\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}u(t,\tau)dtd\tau\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{f(x,y)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi^2}\iint_D k(x,y,t,\tau)\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}u(t,\tau)dtd\tau\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{f(x,y)}{\sqrt{1-y^2}}dy, \tag{5}$$

$$k=1,2,\quad -1<x,y<1.$$

Пусть однородное уравнение (4) имеет только нулевое решение. Тогда решение неоднородного уравнения (4) определяется формулой

$$u(x,y)=R(f;x,y)-\iint_D \Gamma(x,y,\xi,\eta)R(f;\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{6}$$

где $\Gamma(x, y, \xi, \eta)$ – резольвента ядра $N(x, y, \xi, \eta)$.

Подставляя в (5) вместо $u(x,y)$ правую часть (6), получим условия вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega_1(x,y)f(x,y)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\omega_2(x,y)f(x,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0,\quad -1<x,y<1, \tag{7}$$

где ω_1, ω_2 – определенные функции. Эти соотношения выражают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть функции $k(x, y, t, \tau)$, $f(x, y)$, входящие в уравнение* (*1*), *принадлежат классу Гельдера* (*по всем переменным*); *пусть далее однородное уравнение Фредгольма* (*4*) *имеет только нулевое решение. Тогда при выполнении условий* (*необходимых и достаточных*) (*7*) *решение уравнения* (*1*) *относительно функции*

$$u(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

определяется формулой (*6*).

Построим приближенное решение уравнения (1). С этой целью функции нескольких переменных $k(x, y, t, \tau)$, $f(x, y)$ аппроксимируем интерполяционными многочленами, построенными по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода [11, с. 89].

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k=1,2,\ldots,n+1,\qquad y_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k=1,2,\ldots,n+1,\\ t_q=\cos\frac{2q-1}{2n}\pi,\ q=1,2,\ldots,n,\qquad \tau_q=\cos\frac{2q-1}{2n}\pi,\ q=1,2,\ldots,n,\qquad \delta_p=\begin{cases}1, & p=0,\\ 2, & p\ge 1.\end{cases}\end{gathered} \tag{8}$$

В следующих представлениях будем использовать обозначения (8).

Приближенное решение $u_{n-1}(x, y)$ найдем как точное решение уравнения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi^2}\iint_D\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\,u_{n-1}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}+\\ +\frac{1}{\pi^2}\iint_D k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}u_{n-1}(t,\tau)dtd\tau=f_n(x,y)+H(x)+Q(y),\ -1<x,y<1,\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$k(x,y,t,\tau)\approx k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{i,j,k,l}T_i(x)T_j(y)T_k(t)T_l(\tau), \tag{10}$$

$$\alpha_{i,j,k,l}=\frac{1}{(n^2+n)^2}\sum_{p=1}^{n+1}\delta_iT_i(x_p)\sum_{r=1}^{n+1}\delta_jT_j(y_r)\sum_{s=1}^{n}\delta_kT_k(t_s)\sum_{q=1}^{n}\delta_lT_l(\tau_q)k(x_p,y_r,t_s,\tau_q),$$

$$f(x,y)\approx f_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\beta_{i,j}T_i(x)T_j(y), \tag{11}$$

$$\beta_{i,j}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p=1}^{n+1}\delta_iT_i(x_p)\sum_{r=1}^{n+1}\delta_jT_j(y_r)f(x_p,y_r),$$

$$u_{n-1}(x,y)=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1}c_{p,r}U_p(x)U_r(y),$$

где $c_{p,r}(p,\ r=0,1,\ ...,\ n-1)$ – коэффициенты, подлежащие нахождению.

Вспомогательные многочлены $H(x)$, $Q(y)$ определим так, чтобы для уравнения (9) были выполнены условия разрешимости

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(G_n(x,y)+H(x)+Q(y))\frac{dx_k}{\sqrt{1-x_k^2}}=0,\quad -1<x,y<1,\quad k=1,2,$$

где

$$G_n(x,y)=f_n(x,y)-\frac{1}{\pi^2}\iint_D k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}u_{n-1}(t,\tau)dtd\tau.$$

Нетрудно получить из предыдущего тождества

$$H(x)+Q(y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G_n(x,y)dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G_n(x,y)dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{G_n(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x_2)(1-y^2)}}.$$

В результате будем иметь следующее приближенное уравнение относительно неизвестной функции $u_{n-1}(x,y)$:

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\,u_{n-1}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\iint_D k^*_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}u_{n-1}(t,\tau)dtd\tau=f_n^*(x,y), \tag{12}$$
$$-1<x,y<1,$$

где

$$k^*_{n,n-1}(x,y,t,\tau)=k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)+W_n(x,y,t,\tau),$$
$$W_n(x,y,t,\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+$$
$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_{n,n-1}(x,y,t,\tau)\frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}};$$

$$f_n^*(x,y)=f_n(x,y)+V_n(x,y),$$
$$V_n(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f_n(x,y)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f_n(x,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f_n(x,y)\frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Пользуясь формулой

$$J_k=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_k(t)dt=\begin{cases}1/2, & k=0;\\ -1/2, & k=-2;\\ 0, & k\neq 0, k\neq -2,\end{cases} \tag{13}$$

упростим интегралы, входящие в многочлены $W_n(x,y)$, $V_n(x,y)$, и этим получим их представление через многочлены $T_{m_j}(x_j),\ m_j=0,1,\ldots,n$. Имеем

$$k^*_{n,n-1}(x,y,t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{i,j,k,l}T_i(x)T_j(y)T_k(t)T_l(\tau)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{0,0,k,l}T_k(t)T_l(\tau)-$$
$$-\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{0,j,k,l}T_j(y)T_k(t)T_l(\tau)-\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{i,0,k,l}T_i(x)T_k(t)T_l(\tau),$$

$$f_n^*\ \text{ùàùyùàù}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\beta_{i,j}T_i\ \ x\ \ T_j\ \ y\ \ -\sum_{j=0}^{n}\beta_{0,j}T_j\ \ y\ \ -\sum_{i=0}^{n}\beta_{i,0}T_i\ \ x\ \ +\beta_{0,0,0}$$

Применяя в (12) аддитивные свойства интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, учтя аппроксимации (10), (11) и спектральные соотношения (2), из (12) получим

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} c_{p,r} T_{p+1}(x) T_{r+1}(y) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \alpha^*_{i,j,k,l} T_i(x) T_j(y) \times$$
$$\times \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} c_{p,r} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t) U_p(t)\,dt \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\,T_l(\tau) U_r(\tau)\,d\tau = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \beta^*_{i,j} T_i(x) T_j(y). \tag{14}$$

Используя формулы $2T_p(x)U_k(x) = U_{p-k}(x) + U_{p+k}(x)$ и (13), упростим интегралы, входящие в (14). Приравнивая в (14) коэффициенты при одинаковых многочленах $T_i(x)$, $T_j(y)$, $i, j > 0$, для нахождения $c_{p,r}(p,r = 0,1, ..., n-1)$ получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$c_{i-1,j-1} + \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-1} c_{p,r}\, \mu_{i,j,p,r} = \beta_{i,j}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{15}$$

где

$$\mu_{i,j,p,r} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{i,j,k,l}(J_{k-p} + J_{k+p})(J_{l-r} + J_{l+r}), \quad i, j = 1,2,\ldots,n, \quad k,l = 0,1,\ldots,n-1.$$

Отметим, что те уравнения из (14), которые содержат строки, где $i,\ j = 0$, не вошли в систему (15) (поэтому в системе (15) не участвуют функции W_n, V_n).

Приведем теорему, устанавливающую разрешимость системы (15).

Введем класс функций $W^r H(\mu), \quad r \geq 1, \quad 0 < \mu \leq 1.$

Мы говорим, что функция $f(x, y) \in W^r H(\mu), r \geq 1,$ если она по каждой переменной имеет производные до порядка $r \geq 1$ и r-я производная из класса $H(\mu), 0 < \mu \leq 1.$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $k \in W^r H(\mu), \quad f \in W^r H(\mu), r \geq 1, 0 < \mu \leq 1,$ *то при достаточно больших* n *система* (*15*) *разрешима и*

$$\| u(x, y) - u_{n+1}(x, y) \|_C = O\left(\frac{ln^4 n}{n^{r+\mu-2}}\right), r + \mu - 2 > 0.$$

Доказательство проводится по схеме работы [12].

В качестве примера рассмотрим уравнение (1) при $f(x, y) = (2x^2 - 1)(2y^2 - 1) + x^3 y^3,$ $k(x, y, t, \tau) = 16x^3 y^3 t\tau.$ Приближенное решение $u_{n-1}(x, y)$ отличается от точного $u(x, y) = 4xy$ при $n = 2$ в 15-м знаке после запятой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
2. Лифанов И. К. О формулах обращения многомерных сингулярных интегралов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1306–1309.
3. Шешко М. А. Обращение многомерного интеграла типа Коши // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 10. С. 888–891.
4. Расолько Г. А. Прямой метод решения интегральных уравнений первого рода с мультипликативным ядром Коши // Дифференц. уравнения. 1987. Деп. в ВИНИТИ 12.03.87, № 1808–В87.
5. Шешко М. А., Расолько Г. А. О точных и приближенных формулах обращения кратного интеграла с ядрами Коши // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 911–915.
6. Расолько Г. А., Шешко М. А. О решении одного уравнения, содержащего кратные интегралы с ядрами Коши // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 6. С. 1092–1097.
7. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
8. Borja M., Brakhage H. Über die numerische Behandlung der Tragflächengleichung // Z. angew. Math. und Mech. 1967. Vol. 47. P. 102–103.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 2 т. М., 1966. Т. 2.
10. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., 1962.
11. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
12. Шешко М. А. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение. Люблин, 2003.

Поступила в редакцию 25.03.13.

Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования.