УДК 519.71

О. В. ШУТ

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В статье рассматривается задача распознавания образов в случае, когда все признаки объектов принимают конечное количество значений. Используются дедуктивный и индуктивный подходы к решению задач распознавания и описаны соответствующие им модели представления начальной информации об объектах: логическая и прецедентная. Построена алгебра объектов. Предложена кодировка объектов, сохраняющая операции алгебры объектов и позволяющая учитывать возможную неопределенность значений признаков независимо от мощности множества их значений. Показан изоморфизм предложенной алгебры объектов и алгебры многозначной логики. В рамках дедуктивного подхода предложена модификация метода резолюций для прецедентной модели. Разработан комбинированный алгоритм, объединяющий метод резолюций с параметрическим семейством алгоритмов распознавания, и показано, что он работает не хуже любого из алгоритмов, образующих комбинацию.

Ключевые слова: распознавание образов; многозначная логика; метод резолюций.

The paper considers a pattern recognition problem in the case when all signs of objects have a finite quantity of values. Deductive and inductive approaches to pattern recognition problems are considered. Two information encoding models, which correspond to these approaches, are described: logical and precedent-related. An algebra of objects is built. A coding of objects, which preserves operations of algebra of objects and allows to take possible uncertainty of values of signs into account without depending on the cardinal number of the set of their signs, is proposed. It is shown that algebra of objects and algebra of many-valued logic are isomorphic. In the context of the deductive approach a modification of the resolution method in case of the precedent-related model is proposed. A new algorithm, which combines resolution method and a parametric family of pattern recognition algorithms, is developed. It is shown that this combined algorithm works not worse than any of the two algorithms which constitute a combination.

Key words: pattern recognition; many-valued logic; resolution method.

В задачах распознавания образов с обучением часто используются две основные модели представления информации: логическая и прецедентная. Первая из них применяется в продукционных экспертных системах [1], вторая характерна для задач, в которых информация задается перечислением или прямым указанием объектов. В системах, использующих логическую модель, знания представлены в форме правил, указывающих, какие заключения должны быть сделаны в различных ситуациях. На основании этих правил система делает логические выводы, универсальным способом построения которых является метод резолюций. Этот же метод используется, например, в задаче классификации формул в исчислении высказываний. Для решения задач, использующих прецедентную модель, разработано большое количество алгоритмов. В качестве примера можно привести семейство алгоритмов, предложенное в [2]. В данной статье исследуется связь логической и прецедентной моделей для задачи распознавания образов в конечномерном пространстве, а также возможность использования обоих подходов с сохранением их преимуществ путем разработки алгоритма, объединяющего вышеуказанные алгоритмы.

1. Постановка задачи. Начнем с общей постановки задачи распознавания образов с обучением (обозначим ее через Z) [2]:

На множестве объектов X задано конечное число подмножеств (классов) $X_1,\dots,X_l$. *Имеется начальная информация* I_0 *о принадлежности к классам множества объектов* $X^0 \subset X$. *Требуется указать алгоритм A, определенный на множестве X, который на основании информации* I_0 *для произвольного объекта* $x \in X \setminus X^0$ *вычисляет результат, который можно интерпретировать в терминах принадлежности x к классам* $X_1,\dots,X_l$.

Для представления начальной информации I_0 в задаче Z часто применяются две модели: прецедентная (перечисление объектов) и логическая (через предикаты, используемые для описания объектов и классов).

В [3] исследован подкласс $Z_2 \subset Z$, для которого множество X удовлетворяет условию $X \subset B_2^n$, где $B_2 = \{0,1\}$, $n \in N$. Для Z_2 получены следующие основные результаты:

1) установлено взаимно однозначное соответствие между логической и прецедентной моделями представления информации I_0;

2) разработан метод объектных резолюций, представляющий собой метод резолюций, модифицированный для прецедентной модели (обозначим его через A_1);

3) разработан комбинированный алгоритм A_C, объединяющий алгоритмы A_1 и A_2, где через A_2 обозначен алгоритм распознавания, описанный в [2].

В данной работе рассматривается «естественное» расширение подкласса Z_2. А именно речь идет о подклассе $Z_k \subset Z$, для которого $X \subset B_k^n$, где $B_k = \{0,1,\dots,k-1\}$, $n \in N$, $k < \infty$. Основной целью работы является исследование возможности использования результатов, полученных для задачи Z_2, при решении задачи Z_k. В этой связи рассматриваются следующие вопросы[1]:

1) установление связи между логической и прецедентной моделями представления информации об объектах в Z_k;

2) обобщение алгоритмов решения Z_2 для их применения в Z_k.

2. Алгебра объектов. Пусть $S = \{s_1,\dots,s_n\}$ – множество признаков объектов, D_j – множество значений признака s_j, тогда $k = \max\limits_j \{|D_j|\}$. Зафиксируем порядок признаков. *Объектом* назовем отображение $p : s_1 \times \dots \times s_n \to D_1 \times \dots \times D_n$. Будем считать, что $D_j = \{0,1,\dots,|D_j|-1\}$, $D = \bigcup\limits_{j=1}^{n} D_j$, тогда $k = |D|$, $D = \{0,1,\dots,k-1\}$. Множество значений признака $s_j \in S$ объекта p обозначим D_j^p, где $D_j^p \subset D$, $j = \overline{1,n}$. *Набором* назовем любое множество объектов из предметной области Z_k.

Пусть значение признака s_j объекта p неизвестно, но точно известно, что этот признак принимает значения из множества $D_j^p \subset D$. Будем рассматривать такой объект p как набор из $|D_j^p|$ объектов, у которых значение признака s_j пробегает множество D_j^p, а значения остальных признаков совпадают

[1] Основные определения, используемые в этой статье, взяты из [3].

со значениями соответствующих признаков p. Если $D_j^p = \varnothing$, то считается, что объект p не обладает признаком s_j, поэтому p не рассматривается в рамках задачи Z_k.

Объект p называется *нормализованным*, если $\forall j \ \left|D_j^p\right| = 1$. Набор P называется *нормализованным*, если все его объекты нормализованы; в этом случае обозначим его $Norm(P)$. Пусть $X^{norm} = Norm(X)$. В общем случае для произвольного признака существует $\left|\rho(D)\right| = 2^k$ комбинаций его значений, где $\rho(D)$ – множество всех подмножеств D. Поэтому будем считать, что $X = (\rho(D))^n$. В случае нормализованных объектов произвольный признак принимает $|D| = k$ значений, поэтому $X^{norm} = D^n$.

Объектом-признаком называется объект, для которого точно известно значение ровно одного признака, а информация о значении других признаков отсутствует:

$$D_j^p = \begin{cases} \left\{d_j^p\right\}, \ j = h, \\ D, \ j \neq h, \end{cases}$$

где $d_j^p \in D$.

Опишем операции алгебры объектов. Определим произведение объектов p и q как объект, значения признаков которого определяются формулой $D_j^{pq} = D_j^p \bigcap D_j^q$.

Пусть заданы наборы P и Q. Введем следующие операции над наборами объектов:

1) *отрицание*: $\overline{P} = X^{norm} \setminus Norm(P)$;

2) *умножение*: $PQ = P \wedge Q = \bigcup\limits_{p \in P, \ q \in Q} \{pq\}$. Объекты с $D_j^{pq} = \varnothing$ не входят в произведение;

3) *сложение*: $P \vee Q = P \bigcup Q$.

Таким образом, построены алгебры объектов $G = < \rho(X), \{\neg, \wedge, \vee\} >$ и нормализованных объектов $G^{norm} = < \rho(X^{norm}), \{\neg, \wedge, \vee\} >$, где $\rho(X)$ и $\rho(X^{norm})$ – множества ненормализованных и нормализованных наборов соответственно.

Алгебра G обладает свойствами, которые будут использованы при исследовании соотношения прецедентной и логической моделей представления информации I_0 и при описании метода объектных резолюций.

Свойства. 1) Система операций $\{\neg, \wedge, \vee\}$ над наборами является полной;

2) $G^{norm} \subset G$.

Доказательство. Идея доказательства свойства 1 состоит в представлении произвольного набора как суммы его объектов, а каждого объекта – как произведения его объектов-признаков. Доказательство свойства 2 проводится непосредственной проверкой того, что результатом выполнения любой операции над нормализованным набором или парой таких наборов также является нормализованный набор.

3. Кодировка объектов[2]. В Z_2 неопределенные значения объектов обозначались особым символом. Этот символ означал, что признак может принимать любое значение из D. В Z_k признаки могут принимать значения из $D_j^p \subset D$, где $|D| > \left|D_j^p\right| > 1$. Кодировка, предложенная в [3], не позволяет учитывать такого рода ограничения на диапазон значений. Поэтому введем кодировку, которая, во-первых, была бы применима при любом $k < \infty$; во-вторых, позволяла бы учитывать все виды неопределенности значений.

Введем отображение $c_k : \rho(D) \to B_2^k$, которое кодирует отдельные признаки:

$$c_k(D_j^p) = (d_{j0}^p \quad d_{j1}^p \quad \ldots \quad d_{jk-1}^p), \text{ где } d_{ji}^p = \begin{cases} 0, i \notin D_j^p, \\ 1, i \in D_j^p. \end{cases}$$

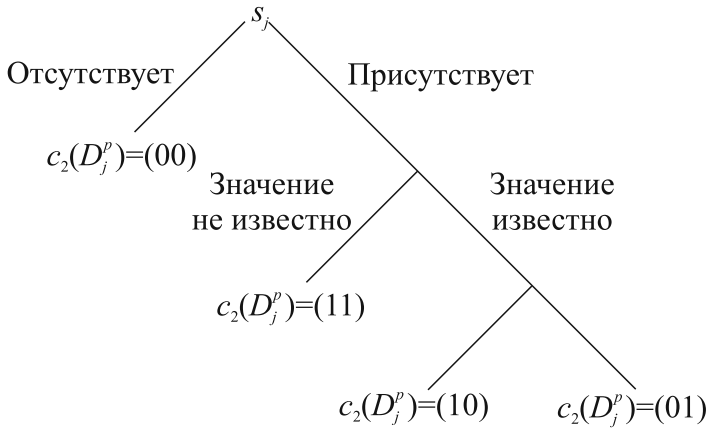
Чтобы закодировать объекты из X, применим c_k ко всем признакам всех объектов. Обозначим эту кодировку объектов через $c : (\rho(D))^n \to B_2^{nk}$:

$$c(p) = \left(c_k(D_1^p) \ \ldots \ c_k(D_n^p)\right).$$

В качестве примера на рисунке показано применение кодировки c_2.

Если все объекты из набора P закодированы с помощью c, обозначим этот набор $c(P)$.

[2] Данная кодировка предложена научным руководителем В. А. Образцовым.



Значения признака s_j в кодировке c_2

4. Эквивалентность прецедентной и логической моделей. В первой части статьи задача Z сформулирована с использованием прецедентной модели представления информации. Приведем постановку этой задачи, основанную на логической модели [4]:

Информация I_0 *задана через предикаты, характеризующие принадлежность объектов к классам* $X_1,...,X_l$: $\forall i\ P_i(x)\in\{0,1\}$, $X_i=\{x\,|\,P_i(x)=1\}$. *Требуется указать алгоритм A, определяющий выводимость объектов x из* P_i, $i=\overline{1,l}$.

Введем переменные $x_1,...,x_n$, соответствующие значениям признаков $s_1,...,s_n$, где $x_i\in D$. Произвольное множество объектов Y описывается формулой φ, состоящей из переменных $x_1,...,x_n$ и операций k-значной логики [5]. Как принято в логике, не будем проводить различие между функцией и ее значением. Поскольку φ определяет, принадлежит ли объект p множеству Y, то она должна принимать два значения, соответствующие ситуациям $p\in Y$ и $p\notin Y$. Пусть φ принимает значения

$$\varphi(p)=\begin{cases}k-1,\ p\in Y,\\ \quad 0,\ p\notin Y.\end{cases}$$

Пусть $x_1,x_2\in D$. Рассмотрим следующие операции k-значной логики [5]:

1) отрицание Лукашевича: $\sim x=k-1-x$;

2) обобщение конъюнкции: $x_1x_2=x_1\wedge x_2=\min(x_1,x_2)$;

3) обобщение дизъюнкции: $x_1\vee x_2=\max(x_1,x_2)$.

Пусть F_k – множество функций k-значной логики, используемых для описания классов, а $H=<F_k,\{\sim,\wedge,\vee\}>$ – алгебра этих функций. Обозначим через $C=<\rho(B_2^{nk}),\{\neg,\wedge,\vee\}>$ алгебру объектов, записанных в кодировке c, т. е. множеств nk-мерных двоичных векторов, а через $C^{norm}=<\rho\left(c(B_2^{nk})\right),\{\neg,\wedge,\vee\}>$ – алгебру нормализованных объектов, представленных в кодировке c. Рассмотрим соотношение алгебр G, C и H.

Теорема 1. 1) $G\cong C$;

2) $G^{norm}\cong C^{norm}\cong H$.

Доказательство. 1. Покажем, что c – взаимно однозначное отображение множества $\rho(X)$ в множество $\rho(B_2^{nk})$, сохраняющее основные операции [6]. Пусть $P\neq Q\ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ \exists p\in P\ \exists q\in Q\ p\neq q\ \Rightarrow\ \exists j\ D_j^p\neq D_j^q$. Предположим, что $D_j^p\setminus D_j^q\neq\varnothing$. Тогда $\exists i\in D_j^p\setminus D_j^q\ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ c_k(D_j^p)\neq c_k(D_j^q)\ \Rightarrow\ c(p)\neq c(q)\ \Rightarrow\ c(P)\neq c(Q)$. Так как $|X|=\left|(\rho(D))^n\right|=\left|B_2^{nk}\right|=2^{nk}$, то c отображает $\rho(X)$ в $\rho(B_2^{nk})$ взаимно однозначно. Непосредственная проверка доказывает, что c сохраняет операцию умножения объектов и основные операции над наборами. Поэтому $G\cong C$.

2. Так как $G^{norm}\subset G$, а $G\cong C$, то $G^{norm}\cong C^{norm}$, $C^{norm}\subset C$. Занумеруем все нормализованные объекты. Введем отображения $z_1:\rho\left(c(X^{norm})\right)\to B_2^{k^n}$ и $z_2:F_k\to B_2^{k^n}$, ставящие в соответствие набору $P\in\rho\left(c(X^{norm})\right)$ и формуле $\varphi\in F_k$ векторы:

$$z_1(P)=(z_{11}\ \ldots\ z_{1k^n}),\ z_2(\varphi)=(z_2(\varphi(p_1))\ \ \ldots\ \ z_2(\varphi(p_{k^n}))),$$

где $z_{1j}=\begin{cases}1,\ p_j\in P,\\0,\ p_j\notin P,\end{cases}$ $z_2\left(\varphi(p_j)\right)=\begin{cases}1,\ \varphi(p_j)=k-1,\\0,\ \varphi(p_j)\neq k-1.\end{cases}$

Если $P\neq Q$ и $\varphi\neq\psi$, то соответственно $z_1(P)\neq z_1(Q)$ и $z_2(\varphi)\neq z_2(\psi)$. Так как $\left|\rho\left(c(X^{norm})\right)\right|=\left|F_k\right|=\left|B_2^{k^n}\right|=2^{k^n}$, то z_1 и z_2 взаимно однозначны. Непосредственная проверка доказывает, что z_1 и z_2 сохраняют основные операции алгебр C^{norm} и H соответственно. Так как z_2 взаимно однозначно, то существует $(z_2)^{-1}$. Пусть $z_0=(z_2)^{-1}\circ z_1$, тогда $z_0:\rho\left(c(X^{norm})\right)\to F_k$ является изоморфизмом, что и требовалось.

Из доказанной теоремы следует, что $c(X)=B_2^{nk}$, поэтому $C=<\rho\left(c(X)\right),\{\neg,\wedge,\vee\}>$. Таким образом, показано, что использование кодировки c правомерно при исследовании как нормализованных, так и ненормализованных объектов. Отсюда следует также эквивалентность прецедентного и логического способов представления информации I_0.

5. Метод объектных резолюций. Некоторые обобщения метода резолюций для многозначной логики предложены в [7, 8]. Далее в работе будет рассмотрен метод резолюций, исходными данными для которого являются объекты из X.

Объект r называется *объектной резольвентой*, построенной по объектам p и q, если значения признаков r удовлетворяют условию:

$$D_j^r=\begin{cases}D_j^p\bigcup D_j^q,\ j=h,\\D_j^p\bigcap D_j^q,\ j\neq h,\end{cases}$$

где h – номер произвольного признака $s_h\in S$.

Операцию построения объектной резольвенты обозначим $r=Or_h(p,q)$.

Пусть $L(p)$ – формула, описывающая объект p. Если объект p не нормализован, то $p=\bigvee\limits_{p'\in Norm(p)}p'$. По свойству 1 $p'=\bigwedge\limits_{j=1}^{n}p_j$, где p_j – объекты-признаки. Тогда по теореме 1

$$L(p)=\bigvee_{p'\in Norm(p)}L(p')=\bigvee_{p'\in Norm(p)}\bigwedge_{j=1}^{n}x_j^{d_j^{p'}},\ \text{где}\ x_j^{d_j^{p'}}=\begin{cases}k-1,\ x_j=d_j^{p'},\\0,\ x_j\neq d_j^{p'}.\end{cases}$$

Покажем, что выполнение операции $Or_h(p,q)$ эквивалентно выводу формулы $L(r)$ из формул $L(p)$ и $L(q)$ в алгебре k-значной логики.

Теорема 2. Пусть $r=Or_h(p,q)$, тогда $L(r)$ логически следует из $L(p)\vee L(q)$.

Доказательство. Пусть $L(p)=\bigvee\limits_{p'\in Norm(p)}\bigwedge\limits_{j=1}^{n}x_j^{d_j^{p'}}$, $L(q)=\bigvee\limits_{q'\in Norm(q)}\bigwedge\limits_{j=1}^{n}x_j^{d_j^{q'}}$. Тогда

$$L(r)=\bigvee_{r'\in Norm(r)}L(r')=\bigvee_{r'\in Norm(r)}\bigwedge_{j=1}^{n}x_j^{d_j^{r'}},\ \text{где}\ d_j^{r'}\in\begin{cases}\{d_h^{p'},d_h^{q'}\},\ j=h,\\\{d_j^{p'}\}\bigcap\{d_j^{q'}\},\ j\neq h.\end{cases}$$

Пусть $L(r)=L_p\vee L_q$, где $L_p=\bigvee\limits_{\substack{r'\in Norm(r)\\d_h^{r'}=d_h^{p'}}}L(r')$, $L_q=\bigvee\limits_{\substack{r'\in Norm(r)\\d_h^{r'}=d_h^{q'}}}L(r')$.

По определению операций $Or_h(p,q)$ и умножения объектов

$$\exists p'\in Norm(p)\ \ d_j^{r'}=\begin{cases}d_h^{p'},\ j=h\\d_j^{p'},\ j\neq h\end{cases}=d_j^{p'}\ \Rightarrow\ r'=p'\ \Rightarrow\ L(p)=L(p')\vee(\bigvee_{\substack{p''\in Norm(p)\\p''\neq p'}}L(p'')).$$

Из $L(p)$ следует $L(p')$, а значит, и L_p. Аналогично доказывается, что из $L(q)$ следует L_q. Тогда из $L(p)\vee L(q)$ следует $L(r)=L_p\vee L_q$, что и требовалось.

Опишем алгоритм применения метода объектных резолюций в задаче Z_k. Зафиксируем номер i класса X_i и определим принадлежность x этому классу. Пусть $X_i^0=X^0\bigcap X_i$.

Алгоритм объектных резолюций A_1:

Шаг 1. Введем множество $Y=X_i^0$.

Шаг 2. Если $x \in Y$, то переходим к шагу 6, иначе – к шагу 3.

Шаг 3. Выбираем из Y нерассмотренную тройку (p,q,h), где p и q – объекты, h – номер признака. Если все такие тройки уже рассматривались, то переходим к шагу 6.

Шаг 4. Вычисляем $r = Or_h(p,q)$.

Шаг 5. Добавляем к Y объект r: $Y := Y \bigcup \{r\}$. Возвращаемся на шаг 2.

Шаг 6. Алгоритм завершает работу.

Если алгоритм закончил работу из-за получения x, то $x \in X_i$. В противном случае с помощью алгоритма A_1 нельзя сделать никаких выводов о принадлежности x классу X_i.

6. Сравнение алгоритмов. Опишем общую схему комбинированного алгоритма A_C, объединяющего алгоритмы A_1 и A_2.

Схема алгоритма A_C:

Шаг 1. Для всех $i = \overline{1,l}$ применим алгоритм A_1 к объекту x и классу X_i.

Шаг 2. Если найден такой класс X_i, что $x \in X_i$, то переходим к шагу 4.

Шаг 3. Применим алгоритм A_2 к объекту x.

Шаг 4. Алгоритм завершает работу.

Поскольку для алгоритма A_2 требуется, чтобы значения признаков были заданы однозначно, то на вход алгоритма A_C подаются объекты, представленные в кодировке c.

Сравним алгоритмы A_1, A_2 и A_C. По результатам их работы построим векторы $\left(P_1^A(x),\ldots,P_l^A(x)\right)$, где $A \in \{A_1, A_2, A_C\}$, $P_i^{A_1}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_i, \\ -1, x \notin X_i. \end{cases}$ $P_i^{A_2}(x) \in [0,1]$, $P_i^{A_C}(x) \in [0,1]$.

Введем такой функционал качества, значения которого легко интерпретировались бы в терминах близости $P_i(x)$ и $P_i^A(x)$. Рассмотрим следующий функционал для произвольного алгоритма A, решающего задачу Z_k на множестве $X' \subseteq X$:

$$\Phi_A(X') = 1 - \frac{1}{l}\frac{1}{|X'|}\sum_{i=1}^{l}\sum_{x\in X'}\left(\left|P_i(x) - P_i^A(x)\right|\right).$$

Покажем, что на множестве X алгоритм A_C работает не хуже, чем A_1 и A_2.

Теорема 3. $\Phi_{A_C}(X) \geq \max\{\Phi_{A_1}(X), \Phi_{A_2}(X)\}$.

Доказательство. Пусть $Y = \bigcup_{i=1}^{l}\{x \mid P_i^{A_1}(x) = 1\}$, $Z = X \setminus Y$. Покажем, что для произвольного алгоритма A верно равенство $|X|\Phi_A(X) = |Y|\Phi_A(Y) + |X \setminus Y|\Phi_A(X \setminus Y)$.

$$|X|\Phi_A(X) = |X| - \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\sum_{x\in X}(\left|P_i(x) - P_i^A(x)\right|) = |Y| - \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\sum_{x\in Y}(\left|P_i(x) - P_i^A(x)\right|) +$$

$$+ |X \setminus Y| - \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\sum_{x\in X\setminus Y}(\left|P_i(x) - P_i^A(x)\right|) = |Y|\Phi_A(Y) + |X \setminus Y|\Phi_A(X \setminus Y).$$

Если $x \in Y$, то $P_i^{A_C}(x) = P_i^{A_1}(x) = 1 \Rightarrow \Phi_{A_C}(Y) = \Phi_{A_1}(Y) = 1 \geq \Phi_{A_2}(Y)$. Если же $x \in Z$, то $P_i^{A_1}(x) = -1$ и $P_i^{A_C}(x) = P_i^{A_2}(x) \Rightarrow \Phi_{A_C}(Z) = \Phi_{A_2}(Z) \geq 0 \geq \Phi_{A_1}(Z)$. Отсюда $|X|\Phi_{A_C}(X) = |Y|\Phi_{A_C}(Y) + |Z|\Phi_{A_C}(Z) \geq |Y|\Phi_{A_1}(Y) + |Z|\Phi_{A_1}(Z) = |X|\Phi_{A_1}(X)$. Тогда $\Phi_{A_C}(X) \geq \Phi_{A_1}(X)$. Аналогично получаем, что $\Phi_{A_C}(X) \geq \Phi_{A_2}(X)$. Отсюда $\Phi_{A_C}(X) \geq \max\{\Phi_{A_1}(X), \Phi_{A_2}(X)\}$.

Таким образом, цель, поставленная в данной работе, достигнута. Во-первых, для задачи Z_k показана эквивалентность прецедентной и логической моделей представления информации. Во-вторых, разработан комбинированный алгоритм, который объединяет метод объектных резолюций с семейством алгоритмов распознавания, и показано, что он работает не хуже любого из алгоритмов, образующих комбинацию. Отметим, что полученные результаты почти без модификации распространяются и на задачу Z_2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Джарратано Дж., Райли Г. Экспертные системы: принципы разработки и программирование. М., 2007.

2. Краснопрошин В. В., Образцов В. А. Распознавание с обучением как задача выбора // Цифровая обработка изображений. Минск, 1998. С. 80–94.

3. Шут О. В. Метод решения задач распознавания на основе логической и прецедентной моделей // Информатика. 2012. № 3. С. 35–50.

4. Краснопрошин В. В., Образцов В. А. Проблема принятия решений по прецедентности: разрешимость и выбор алгоритмов // Выбраныя навуковыя працы Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2001. Т. 6: Матэматыка. С. 285–312.

5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М., 1986.

6. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., 1970.

7. Baaz M., Fermuller C. G. Resolution-based Theorem Proving for Many-valued Logic // J. of Symbolic Computation. 1995. 19 (4). P. 353–391.

8. Hähnle R. Automated Theorem Proving in Multiple Valued Logics // Proc. ISMIS’93. Trondheim (Norway), 1993. P. 49–58.

Поступила в редакцию 06.06.13.

Ольга Викторовна Шут – аспирант кафедры информационных систем управления. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем управления В. А. Образцов.