$2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\big(Lu, du/dt\big)dt \le 2e^{c_{10}T}\|Lu\|_F\|u\|_E$, где $c_{10}=c_6+$ $+\max\{c_2, 2(c_4+c_5)\}$. В результате деления этих оценок на $\|u\|_E$ получаем энергетическое неравенство (10) для гладких решений $u\in D(L)$ и затем предельным переходом распространяем его на все сильные решения $u\in D(\overline{L})$ задачи Коши (1) – (2).

### 3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

На основании теоремы существования сильных решений для главной части уравнения в силу неравенств (4), (5), (8), (9) из [3] и ограниченности младшей части в силу неравенств (7) стандартным методом продолжения по параметру легко доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если выполняются условия A1 – A3 и B1 – B3, то для любых $f\in F$ существует сильное решение $u\in E$ задачи Коши* (1) – (2).

**Литература**


1. *Н. И. Гаврилова, Н. И. Юрчук* // Дифференц. уравнения.1981. Т.17, № 5. С.789-791.
2. *С. П. Ходос* // Сборник работ 63-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ. В 3-х частях, Ч 1. Мн., 2006. С. 58—61.
3. *С. П. Ходос* // Сборник работ 64-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ. В 3-х частях, Ч 1. Мн., 2007. С. 202—206.
4. *Ф. Е Ломовцев.* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873 – 886.


# РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ-ЛЭМБА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СРЕЗОВ ТРИГОНАЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК


**А. А. Царева**


Одной из фундаментальных проблем акустической физики и акустоэлектроники является исследование закономерностей распространения упругих волн в пьезоэлектрических пластинах. На их основе возможна разработка высокочувствительных биологических и химических датчиков, устройств обработки сигналов, характеризующихся широкой полосой пропускания. Настоящая работа посвящена исследованию волновых движений в пьезоэлектрических пластинах тригональной системы симметрии различным образом ориентированных относительно осей основной кристаллографической системы координат с применением функциональных возможностей систем компьютерной математики.

Определяющие уравнения движения для различных плоскостей симметрии без учета электромагнитных эффектов в квазистатическом приближении представим в следующем виде [1]:

$$\sum_{j,k,l=1}^{3}\left(c_{ijkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}+e_{kij}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\; i=\overline{1,3},$$
$$\sum_{j,k,l=1}^{3}\left(e_{jkl}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}-\varepsilon_{jk}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}\right)=0, \tag{1}$$

где $c_{ijkl}=\alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}c_{pqrs}^{(0)}$; $e_{kij}=\alpha_{kp}\alpha_{iq}\alpha_{jr}e_{pqr}^{(0)}$; $\varepsilon_{jk}=\alpha_{jp}\alpha_{kq}\varepsilon_{pq}^{(0)}$; $c_{pqrs}^{(0)}$, $e_{pqr}^{(0)}$ и $\varepsilon_{pq}^{(0)}$ - основные модули упругости , пьезоэлектрические модули и диэлектрические проницаемости тригонально анизотропной среды соответственно; $\alpha_{ip}$ - компоненты матрицы преобразования координат; $u_i$ - компоненты вектора перемещений; Ф - электрический потенциал, ρ - плотность материала.

Рассмотрим, плоскую гармоническую волну, распространяющуюся в пластинке толщины $2h$, срединной плоскостью которой является координатная плоскость $x_1 0 x_2$ [2]. Соответствующие решения системы (1) представим в виде:

$$u_i=w_i(x_3)\exp\left(I\left(k_1x_1+k_2x_2-\omega t\right)\right), i=\overline{1,3},$$
$$\Phi=w_4(x_3)\exp\left(I\left(k_1x_1+k_2x_2-\omega t\right)\right), \tag{2}$$

где $w_k(x_3)$ - неизвестные функции, $k=\overline{1,4}$, $k_1, k_2$ - компоненты волнового вектора, $\omega$ - круговая частота, $I$ - мнимая единица. После подстановки выражений (2) в систему (1) получим следующую систему связанных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{4}a_{ij}w_j(x_3)=0, i=\overline{1,4}. \tag{3}$$

Здесь коэффициенты $a_{ij}$ определяются следующим образом:

$$a_{11}=\rho\omega^2-c_{11}k_1^2-2c_{16}k_1k_2-c_{66}k_2^2+2I\left(k_1c_{15}+k_2c_{56}\right)\partial_3+c_{55}\partial_3^2,$$

$$a_{22}=\rho\omega^2-c_{66}k_1^2-2k_1k_2c_{26}-c_{22}k_2^2+2I\left(k_2c_{24}+k_1c_{46}\right)\partial_3+c_{44}\partial_3^2,$$

$$a_{33} = \rho\omega^2 2 - c_{55}k_1^2 - 2k_1k_2c_{45} - k_2^2c_{44} + 2I\left(k_1c_{35} + k_2c_{34}\right)\partial_3 + c_{33}\partial_3^2,$$

$$a_{44} = \varepsilon_{11}\left(k_1^2 + k_2^2\right) - \varepsilon_{33}\partial_3^2,$$

$$a_{12} = a_{21} = I\left(k_1\left(c_{14} + c_{56}\right) + k_2\left(c_{25} + c_{46}\right)\right)\partial_3 +$$
$$+c_{45}\partial_3^2 - k_1{}^2c_{16} - k_1k_2\left(c_{12} + c_{66}\right) - k_2{}^2c_{26},$$

$$a_{13} = a_{31} = I\left(k_1\left(c_{13} + c_{55}\right) + k_2\left(c_{45} + c_{36}\right)\right)\partial_3 +$$
$$+c_{35}\partial_3^2 - k_1{}^2c_{15} - k_1k_2\left(c_{14} + c_{56}\right) - k_2{}^2c_{46},$$

$$a_{14} = a_{41} = I\left(k_1\left(e_{15} + e_{31}\right) + k_2\left(e_{25} + e_{36}\right)\right)\partial_3 +$$
$$+e_{35}\partial_3^2 - k_1{}^2e_{11} - k_1k_2\left(e_{16} + e_{21}\right) - k_2{}^2e_{26},$$

$$a_{23} = a_{32} = I\left(k_2\left(c_{23} + c_{44}\right) + k_1\left(c_{45} + c_{36}\right)\right)\partial_3 +$$
$$+c_{34}\partial_3^2 - k_1{}^2c_{56} - k_1k_2\left(c_{25} + c_{46}\right) - k_2{}^2c_{24},$$

$$a_{24} = a_{42} = I\left(k_1\left(e_{14} + e_{36}\right) + k_2\left(e_{24} + e_{32}\right)\right)\partial_3 +$$
$$+e_{34}\partial_3^2 - k_1{}^2e_{16} - k_1k_2\left(e_{12} + e_{26}\right) - k_2{}^2e_{22},$$

$$a_{34} = a_{43} = I\left(k_1\left(e_{13} + e_{35}\right) + k_2\left(e_{23} + e_{34}\right)\right)\partial_3 +$$
$$+e_{33}\partial_3^2 - k_1{}^2e_{15} - k_2{}^2e_{25} - k_1k_2\left(e_{14} + e_{25}\right). \qquad (4)$$

Неизвестную функцию $w_1\left(x_3\right)$ найдем из дифференциального уравнения:

$$b_0w_1\left(x_3\right) + \sum_{k=1}^{8} b_k \frac{\partial^k w_1\left(x_3\right)}{\partial x_3^k} = 0, \qquad (5)$$

где $b_0, b_j$ - коэффициенты, зависящие от констант упругости, пьезоэлектрических модулей, диэлектрических проницаемостей и компонент волнового вектора. Решение уравнения получим в следующем виде:

$$w_1\left(x_3\right) = \sum_{k=1}^{8} C_k e^{\lambda_k x_3}. \qquad (6)$$

Здесь $\lambda_k$ - корни характеристического уравнения однородного дифференциального уравнения (5), $C_k$ - неизвестные константы интегрирования.

С помощью соотношения (3) найдем выражения для оставшихся неизвестных функций $w_2(x_3), w_3(x_3)$ и $w_4(x_3)$ из следующих дифференциальных уравнений:

$$Pw_2(x_3) = \left(a_{13}(a_{14}a_{23} + a_{12}a_{34}) - a_{13}^2 a_{24} - a_{12}a_{14}a_{33} + a_{11}(a_{24}a_{33} - a_{23}a_{34})\right) w_1(x_3),$$

$$Pw_3(x_3) = \left(a_{12}a_{14}a_{23} + a_{13}(a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22}) - a_{12}^2 a_{34} + a_{11}(a_{22}a_{34} - a_{23}a_{24})\right) w_1(x_3),$$

$$\begin{aligned} Pw_4(x_3) &= \left(a_{13}^2 a_{22} - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{12}^2 a_{33} + a_{11}\left(a_{23}^2 - a_{22}a_{33}\right)\right) w_1(x_3), \\ P &= a_{14}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2\right) + a_{13}(a_{23}a_{24} - a_{22}a_{34}) + a_{12}(a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33}) \end{aligned} \tag{7}$$

Неизвестные константы интегрирования найдем из условий равенства нулю механических напряжений $T_{33}$, $T_{13}$ и $T_{23}$ на плоскостях $x_3 = \pm h$, а также из условия непрерывности электрического потенциала $\Phi$ и нормальной компоненты электрической индукции $D_3$.

Условие равенства нулю механических напряжений на свободной поверхности $x_3 = 0$ кристалла записывается в виде [1]:

$$T_{i3} = \sum_{k,l=1}^{3} c_{i3kl}\partial_k u_l + \sum_{k=1}^{3} e_{ki3}\partial_k \Phi = 0, \quad i = \overline{1,3}, \tag{8}$$

Из электрических граничных условий следует непрерывность электрического потенциала $\Phi$ и нормальной компоненты электрической индукции

$$D_3 = \sum_{k,l=1}^{3} \left(e_{3kl}\partial_k u_l - \varepsilon_{3kl}\partial_k \Phi\right). \tag{9}$$

Отсюда с учетом решений ((2),(6)) получим дисперсионное уравнение для нахождения скоростей распространения волн Лэмба. Численное решение дисперсионного уравнения проведено для ниобата лития, получены зависимости скоростей распространения волн Лэмба от угла наклона нормали к волновому фронту для различных ориентаций пластин, выполнена генерация дифференциальных уравнений динамического равновесия, компонент тензора напряжений и электрической индукции для различных срезов тригонально анизотропных пластинок.

Для упрощения вычислений и преобразований были введены безразмерные:

перемещения (вдоль осей $Ox_1, Ox_2, Ox_3$) и пьезоэлектрические модули:

$$U_i(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{u_i(x_1,x_2,x_3,t)}{h},\ i=\overline{1,3}$$
$$K_{ijk}=\frac{e_{ijk}}{\sqrt{c_{2323}\varepsilon_{11}}},\ i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}, k=\overline{1,3}, \tag{10}$$

потенциал, модули упругости, плотность:

$$\Phi(x_1,x_2,x_3)=\frac{\sqrt{\varepsilon_{11}}\Phi(x_1,x_2,x_3)}{h},\ i=\overline{1,3}$$
$$A_{ijkl}=\frac{c_{ijkl}}{c_{2323}},\ i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}, k=\overline{1,3}, l=\overline{1,3}, \tag{11}$$
$$\rho_0=\rho\frac{c_2^{\ 2}}{c_{2323}}$$

диэлектрические проницаемости:

$$s_{22}=\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}},\ s_{33}=\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}. \tag{12}$$

где $h$ – это толщина пластинки, а $c_2$ – это величина, имеющая размерность скорости.

**Литература**


1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах/ Э. Дьелесан, Д. Руайе – М..: Наука, 1982. – 424 с.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах/ И.А. Викторов – М.:Наука, 1981. – 287 с.


# МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ


**А.С.Циунчик**


Нелинейные уравнения Шредингера широко используются для описания нелинейных волновых процессов различной физической природы [1,2]. В большинстве практически значимых случаев аналитическое решение подобных задач найти не удается, и их исчерпывающий анализ требует применения приближенных численных методов.

Для исследования эффективности численных алгоритмов традиционно используется модельная задача для уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (НУШ):