В неравенстве (13) берем точную верхнюю грань по всем $\tau \in [0,T]$ и с помощью ценки (14) выводим неравенство

$$T\delta_0 \left(1+|\mu|^2\right)^2 \left(1-|\mu|^2\right)^{-2} \|u\|_E^2 \le 2(\gamma-4)^{-1} \delta_0^{-1} \sigma \|Lu\|_F^2 ,$$

которое с гладких решений $u \in D(L)$ распространяем предельным переходом на все сильные решения $u \in D(\overline{L})$. Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Чесалин В.И., Юрчук Н.И.* // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1973. № 6. С. 30—35.
2. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференциальные уравнения 1992. Т.28. № 5. С.873 —885.

ПОЛНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

С. П. Ходос

Сингулярные гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка изучались в случае постоянных областей определения в [1] и переменных областей определения и главной части уравнения в [2, 3]. В настоящей работе изучается корректность в сильном смысле уравнения с младшей частью и переменными областями определения операторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть H – гильбертово пространство, норму и скалярное произведение в котором обозначим $|\cdot|$ и $(\cdot,\cdot)$ соответственно. На ограниченном интервале $]0,T[$ вещественной прямой рассматривается сингулярное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{B(t)}{t}\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) + B_1(t)\frac{du(t)}{dt} + A_1(t)u(t) = f(t),\ t \in]0,T[, \quad (1)$$

с однородными начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = 0, \qquad (2)$$

где $f(t)$ и $u(t)$ –абстрактные функции переменной t со значениями в H, $A(t)$, $B(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D\big(A(t)\big), D\big(B(t)\big)$, $t\in[0,T]$, соответственно.

Предполагаем, что операторы $A(t)$, $B(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t)$ уравнения удовлетворяют следующим требованиям.

А1. При каждом $t\in[0,T]$ операторы $A(t)$ самосопряжены в H и

$$\big(A(t)u,u\big)\ge c_1|u|^2 \quad \forall u\in D\big(A(t)\big), c_1>0. \tag{3}$$

А2. Обратные операторы $A^{-1}(t)\in \mathcal{B}\,\big([0,T],\mathcal{L}\,(H)\big)$ к операторам $A(t)$ сильно непрерывны по $t\in[0,T]$ в H и при всех $t\in[0,T]$ имеют в H ограниченную сильную производную $dA^{-1}(t)\big/dt\in \mathcal{B}\,\big([0,T],\mathcal{L}\,(H)\big)$ и

$$-\Big(\big(dA^{-1}(t)/dt\big)g,g\Big)\le c_2\Big(A^{-1}(t)g,g\Big)\ \forall g\in H,\quad c_2\ge 0. \tag{4}$$

А3. При почти всех $t\in\,]0,T[$ операторы $dA^{-1}(t)\big/dt$ имеют в H ограниченную сильную производную $d^2A^{-1}(t)/dt^2\in L_\infty\big(]0,T[,\mathcal{L}\,(H)\big)$ и

$$\left|\Big(\Big(d^2A^{-1}(t)/dt^2\Big)g,v\Big)\right|\le c_3|g|\Big(A^{-1}(t)v,v\Big)^{1/2}\quad \forall g,v\in H,\quad c_3\ge 0. \tag{5}$$

В1. При каждом $t\in[0,T]$ для операторов $B(t)$ выполняется оценка

$$-\operatorname{Re}\big(B(t)u,u\big)\le c_4t|u|^2\quad \forall u\in D\big(A(t)\big), c_4\ge 0. \tag{6}$$

В2. При почти всех t справедливы неравенства

$$\big|B_1(t)u\big|\le c_5|u|,\quad \big|A_1(t)u\big|\le c_6\big|A^{1/2}(t)u\big|\quad \forall u\in D\big(A(t)\big),\quad c_5,c_6>0, \tag{7}$$

где $A^{1/2}(t)$ – квадратный корень операторов $A(t)$.

В3. При каждом $t\in[0,T]$ операторы $B(t)$ подчинены операторам $A^{1/2}(t)$ и верно неравенство

$$-\operatorname{Re}\Big(B(t)u,A(t)u\Big)\le c_7t\Big(A(t)u,u\Big)\quad \forall u\in D\big(A(t)\big),\quad c_7\ge 0. \tag{8}$$

В H при всех $t\in[0,T]$ ограничены операторы $B(t)\big(dA^{-1}(t)/dt\big)\in \mathcal{B}\,\big(]0,T[,\mathcal{L}\,(H)\big)$ и выполняется неравенство

$$\Big|\Big(B(t)\big(dA^{-1}(t)/dt\big)g,h\Big)\Big|\le c_8t|g|\Big(A^{-1}(t)h,h\Big)^{1/2}\quad \forall g,h\in H,\quad c_8\ge 0. \tag{9}$$

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Выведем энергетическое неравенство в гильбертовом пространстве сильных решений E, которое получается замыканием множества

$$D(L)=\left\{u\in \mathrm{H}: u(t)\in D(A(t)), \frac{du(t)}{dt}\in D(B(t)), u(t)\in D\left(B^*(t)\right), \forall t\in[0,T];\right.$$

$$\left.\frac{du(t)}{dt},\ \frac{d^2u(t)}{dt^2},\ \frac{B(t)}{t}\frac{du}{dt},\ \frac{B^*(t)}{t}u,\ A(t)u\in \mathrm{H};\ u(0)=\frac{du(0)}{dt}=0\right\},$$

где $B^*(t)$ – сопряженные операторы в H к операторам $B(t)$, по эрмитовой норме $\|u\|_E=\left[\int_0^T\left(|du/dt|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)dt\right]^{1/2}$, и в банаховом пространстве правых частей уравнения F, которое получается замыканием множества по норме

$$\|f\|_F=\sup_{v\in H}\left\{\left|\int_0^T (T-t)(f,v)dt\Big/\|v\|_0\right|\right\},\ \ \|v\|_0=\left(\int_0^T |v|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Задача Коши (1)–(2) эквивалентна линейному неограниченному оператору $L: E\supset D(L)\to F$ с областью определения $D(L)$. Можно доказать, что если имеет место условие А1 и область $D(L)$ плотна в $\mathcal{H}$, то он допускает сильное замыкание $\overline{L}: E\supset D(\overline{L})\to F$.

Теорема 1. *Если выполняются условия A1, A2, B1, B2 и множество* $D(L)$ *плотно в* $\mathcal{H}=L_2(]0,T[,H)$, *то имеет место неравенство*

$$\|u\|_E\le c_9\left\|\overline{L}u\right\|_F\ \forall u\in D\left(\overline{L}\right),\quad c_9=2Exp\left(c_6T+\max\{c_2,2(c_4+c_5)\}T\right). \quad (10)$$

Доказательство. Воспользуемся сглаживающими операторами $A_\varepsilon^{-1}=\left(I-\varepsilon A(t)\right)^{-1}, \varepsilon>0$, из [4] со следующими свойствами.

a) Равномерно по t операторы $A_\varepsilon^{-1}g\to g\ \forall g\in H$ при $\varepsilon\to 0$ в H.

b) При почти всех $t\in\left]0,T\right[$ в H существует сильная производная $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt\in L_\infty\left(]0,T[,\mathrm{L}\ (H)\right)$ и

$$\frac{d\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\right)}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}=-A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon>0. \quad (11)$$

Интегрируя по частям один раз по t, для $\forall c \geq 0$ и $\forall u \geq D(L)$ находим

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u\right)dt =$$
$$= 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{du}{dt}\right)dt + \int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\Phi_\varepsilon(u,u)dt, \quad (12)$$

где в силу равенства (11) и неравенства (4) форма $\Phi_\varepsilon(u,u)$ оценивается

$$\Phi_\varepsilon(u,u) = \left(\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt}u, u\right) - c\left(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u\right) \leq$$
$$\leq c_2\left(A_\varepsilon^{-1}(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)A(t)u\right) - c\left(A(t)u, A_\varepsilon^{-1}(t)u\right). \quad (13)$$

Из равенства (12) в силу оценки (13), и свойства b) при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt \leq$$
$$\leq 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt + (c_2 - c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt. \quad (14)$$

Интегрируя по частям один раз по t, для $\forall c \geq 0$ и $\forall u \in D(L)$ имеем

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt = 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{du}{dt}\right)dt - c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt.$$

Сложим это равенство с неравенством (14) и придем к неравенству

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)dt \leq 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(Lu, \frac{du}{dt}\right)dt -$$
$$-2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{B(t)}{t}\frac{du}{dt} + B_1(t)\frac{du}{dt} + A_1(t)u, \frac{du}{dt}\right)dt -$$
$$-c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt + (c_2 - c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt.$$

Здесь левая часть оценивается снизу через $\|u\|_E^2$, а его правая часть в силу неравенства (4), согласно [2], и неравенств (7) оценивается сверху через

$2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(Lu, du/dt\right)dt \le 2e^{c_{10}T}\left\|Lu\right\|_F\left\|u\right\|_E$, где $c_{10} = c_6 +$ $+\max\left\{c_2, 2(c_4 + c_5)\right\}$. В результате деления этих оценок на $\left\|u\right\|_E$ получаем энергетическое неравенство (10) для гладких решений $u \in D\left(L\right)$ и затем предельным переходом распространяем его на все сильные решения $u \in D\left(\overline{L}\right)$ задачи Коши (1) – (2).

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

На основании теоремы существования сильных решений для главной части уравнения в силу неравенств (4), (5), (8), (9) из [3] и ограниченности младшей части в силу неравенств (7) стандартным методом продолжения по параметру легко доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия А1 – А3 и В1 – В3, то для любых $f \in F$ существует сильное решение $u \in E$ задачи Коши* (1) – (2).

Литература

1. *Н. И. Гаврилова, Н. И. Юрчук* // Дифференц. уравнения.1981. Т.17, № 5. С.789-791.
2. *С. П. Ходос* // Сборник работ 63-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ. В 3-х частях, Ч 1. Мн., 2006. С. 58—61.
3. *С. П. Ходос* // Сборник работ 64-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ. В 3-х частях, Ч 1. Мн., 2007. С. 202—206.
4. *Ф. Е Ломовцев.* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873 – 886.

РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ-ЛЭМБА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СРЕЗОВ ТРИГОНАЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

А. А. Царева

Одной из фундаментальных проблем акустической физики и акустоэлектроники является исследование закономерностей распространения упругих волн в пьезоэлектрических пластинах. На их основе возможна разработка высокочувствительных биологических и химических датчиков, устройств обработки сигналов, характеризующихся широкой полосой пропускания. Настоящая работа посвящена исследованию волновых движений в пьезоэлектрических пластинах тригональной системы симметрии различным образом ориентированных относительно осей основ-