СХОДИМОСТЬ К ПРЕДЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ В МОДЕЛЯХ РАСТУЩИХ СЛУЧАЙНЫХ СЕТЕЙ

Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова

ИПМ ДВО РАН, ДВФУ
Владивосток, Россия
E-mail: guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru

Построены асимптотики разностей между допредельными и предельными распределениями степеней узлов в моделях растущих случайных сетей. Скорости сходимости с точностью до логарифмичесих множителей являются степенными.

Ключевые слова: растущие случайные сети, асимптотика скорости сходимости, предельные распределения.

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью данной работы является оценка скорости сходимости к предельным распределениям в моделях растущих случайных сетей [1]. Одним из наиболее удобных методов вычисления предельного распределения степени узлов сети является континуальное приближение [2], [3]. Это приближение основано на гипотезе об асимптотическом поведении указанного распределения при стремлении к бесконечности числа шагов модели. В работе [4, с. 124] отмечено, что «проблема строгого формального описания статистического ансамбля случайных сетей с заданным распределением узлов по числу связей до сих пор является нерешенной». Отсутствие математического доказательства сходимости допредельных распределений к предельным делает полученные результаты уязвимыми.

В настоящей работе дано обоснование континуального подхода при вычислении предельных распределений в модели экспоненциального вида, в модели Барабаши и в модели Дороговцева. Последняя модель представляет особый интерес, т.к. с ее помощью удается описать интернетовские, социальные и биологические сети со значениями параметров, близкими к измеренным. Построены точные асимптотики разностей между предельными и допредельными распределениями степеней узлов при стремлении к бесконечности числа шагов модели. Скорости сходимости с точностью до логарифмических множителей являются степенными.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ

Рассмотрим модель экспоненциальной растущей сети, в которой вновь появляющаяся вершина соединяется с любой из уже существующих с равной вероятностью. Пусть на шаге 1 имеется вершина 1 и ребро, соединяющее эту вершину с собой (петля). На шаге 2 появляется вершина 2 и ребро, которое с вероятностью 1 соединяется с вершиной 1. На шаге $t + 1$ появляется новая вершина $t + 1$, которая соединяется с вероятностью $1/t$ с одной из вершин $1, \ldots, t$. Таким образом, строится случайная последовательность неориентированных графов. На шаге $t \geq 1$ можно определить степень k вершины s, равную количеству инцидентных ей ребер.

Обозначим $p(k,s,t)$ вероятность того, что на шаге t вершина s графа имеет степень k. Формально можно доопределить $p(k,s,t)=0$, $s>t$, $k>0$, и значит,

$$p(k-1,t+1,t)=p(k,t+1,t), \quad k>1. \tag{1}$$

В работе [2] получены следующие соотношения (δ_{ij} – индекс Кронекера):

$$p(k,t,t)=\delta_{k1}, \quad p(k,s,t+1)=\frac{p(k-1,s,t)+(t-1)p(k,s,t)}{t}, \quad k\geq 1, \quad t\geq 1. \tag{2}$$

Положим

$$P(k,t)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}p(k,s,t), \tag{3}$$

тогда имеет место рекуррентное соотношение

$$(t+1)P(k,t+1)=P(k-1,t)+(t-1)P(k,t), \quad k>1, \quad t\geq 1,$$

причем $P(1,1)=1$, $P(k,t)=0$, $k>t\geq 1$. Следовательно,

$$P(k,t+1)=\frac{tP(k-1,t)+t(t-1)P(k,t)}{(t+1)t}=$$

$$=\frac{tP(k-1,t)+(t-1)P(k-1,t-1)+(t-1)(t-2)P(k,t-1)}{(t+1)t}=\ldots=\frac{1}{t(t+1)}\sum_{j=1}^{t}jP(k-1,j). \tag{4}$$

Обозначим $f_k(t)=P(k,t+1)-\Pi(k)$, $\Pi(k)=2^{-k}$, $k\geq 1$. В силу формулы (3)

$$P(1,t+1)=\frac{t+t(t-1)P(1,t)}{(t+1)t}=\frac{t+(t-1)+(t-1)(t-2)P(1,t-1)}{(t+1)t}=\ldots=\frac{1+\ldots+t}{(t+1)t}=\frac{1}{2}, \quad f_1(t)\equiv 0.$$

Теорема 1. При $k\geq 2$ и $t\to\infty$ выполняется следующее соотношение

$$f_k(t)\sim\frac{C_k\ln^{k-2}t}{t^2}, \quad C_k=\frac{1}{2(k-2)!}. \tag{5}$$

Доказательство. При $k=2$ из формулы (4) следует, что

$$P(2,t+1)=\frac{1}{t(t+1)}\left(1+\sum_{j=2}^{t}\frac{j}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2t(t+1)}, \quad t\geq 1. \tag{6}$$

Тогда $f_2(t)\sim\dfrac{1}{2t^2}$, $t\to\infty$. Следовательно, формула (5) верна.

Предположим, что формула (5) верна при заданном $k>2$, докажем ее при $k+1$. Из равенства (4) получаем

$$\begin{aligned}f_{k+1}(t)&=P(k+1,t+1)-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{t(t+1)}\sum_{j=1}^{t}jP(k,j)-\frac{1}{2^{k+1}}=\\&=\frac{1}{t(t+1)}\sum_{j=1}^{t}j\left(\frac{1}{2^k}+f_k(j-1)\right)-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{t(t+1)}\sum_{j=1}^{t}jf_k(j-1).\end{aligned} \tag{7}$$

Нетрудно показать, что $\sum_{j=1}^{t}jf_k(j-1)\sim C_k\sum_{j=2}^{t}\frac{j\ln^{k-2}(j-1)}{(j-1)^2}$, $t\to\infty$. В свою очередь,

$$C_k\sum_{j=2}^{t}\frac{j\ln^{k-2}(j-1)}{(j-1)^2}\sim\int_1^{t-1}\frac{(x+1)\ln^{k-2}x}{x^2}dx\sim\int_1^{t}\frac{\ln^{k-2}x}{x}dx=\frac{\ln^{k-1}t}{k-1},\ \ t\to\infty .$$

Таким образом, $\sum_{j=2}^{t} jf_k(j-1)\sim C_k\ln^{k-1}t$, $t\to\infty$. Отсюда и из формулы (7) вытекает утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Во всех трех разделах работы в основе континуального приближения лежит предельное соотношение (следует из формулы (6))

$$(t+1)(P(k,t+1)-P(k,t))=(t+1)(f_k(t)-f_r(t-1))\to 0,\ \ t\to\infty . \tag{8}$$

МОДЕЛЬ БАРАБАШИ – АЛЬБЕРТ

Рассмотрим модель растущей сети Барабаши [1], в которой вновь появляющаяся вершина соединяется с любой из уже существующих вершин с вероятностью, пропорциональной степени этой вершины. На начальном шаге $t=1$ имеется единственная вершина и петля, связанная с ней. Обозначим $p(k,s,t)$ вероятность того, что на шаге $t\geq 1$ с вершиной s соединено k ребер неориентированного графа сети Барабаши. Формально можно доопределить $p(k,s,t)=0$, $s>t$, и значит, выполнены равенства (1). В работе [2] получены следующие соотношения:

$$p(k,t,t)=\delta_{k1},\ \ p(k,s,t+1)=\frac{k-1}{2t}p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{k}{2t}\right)p(k,s,t).$$

Из формулы (3) при $t\geq 1$ следует, что

$$(t+1)P(k,t+1)=\frac{k-1}{2}P(k-1,t)+\left(t-\frac{k}{2}\right)P(k,t),\ \ k>1,$$

$$P(1,1)=1,\ \ P(0,t)\equiv 0,\ \ P(k,t)=0,\ \ k>t .$$

Тогда

$$P(1,t+1)=\frac{1}{t+1}\left[1+\sum_{j=1}^{t}\prod_{s=j}^{t}\left(1-\frac{1}{2s}\right)\right], \tag{9}$$

$$P(k,t+1)=\frac{k-1}{2(t+1)}\sum_{j=1}^{t}P(k-1,j)\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{k}{2s}\right),\ \ k\geq 2 . \tag{10}$$

Замечание 2. В дальнейшем нам понадобится отношение $\frac{\Gamma(1-A+t)}{\Gamma(-1-A)}$, которое будем понимать как $\lim_{\delta\to+0}\frac{\Gamma(-1-A+t-\delta)}{\Gamma(-1-A-\delta)}$, если A, t – натуральные числа. Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Лемма. При $A>0$ справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{t}\prod_{s=j}^{t}\left(1-\frac{A}{s}\right)=\frac{t-A}{1+A}+\frac{V(t)}{(1+A)^2\Gamma(-1-A)},\ \ V(t)=\frac{\Gamma(1-A+t)}{\Gamma(t+1)}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{t}\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{A}{s}\right)=\frac{t+A}{1+A}+\frac{V(t)}{(1+A)\Gamma(1-A)}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть сначала $A>0$ не является натуральным числом. Обозначим $S(t)=\sum_{j=1}^{t}\prod_{s=j}^{t}\left(1-\frac{A}{s}\right)$, тогда $S(1)=1-A=\frac{1-A}{1+A}+\frac{V(1)}{(1+A)^2\Gamma(-1-A)}$. Следовательно, формула (11) при $t=1$ доказана. Предположим, что эта формула верна при заданном $t>1$, докажем ее при $t+1$:

$$S(t+1)=\sum_{j=1}^{t+1}\prod_{s=j}^{t+1}\left(1-\frac{A}{s}\right)=\frac{t+1-A}{t+1}\big(S(t)+1\big)=$$

$$=\frac{t+1-A}{t+1}\left(\frac{t-A}{1+A}+\frac{V(t)}{(1+A)^2\Gamma(-1-A)}\right)=\frac{t+1-A}{t+1}+\frac{V(t+1)}{(1+A)^2\Gamma(-1-A)}.$$

Соотношение (12) доказывается аналогично. Для натуральных A правые части равенств (11), (12) понимаются в том смысле, который содержит замечание 2. Лемма 3 доказана.

Обозначим

$$f_k(t)=P(k,t+1)-\Pi(k),\ \ \Pi(k)=\frac{4}{k(k+1)(k+2)},\ \ k\geq 1. \tag{13}$$

Теорема 2. При $k\geq 1$ и $t\to\infty$ выполняется соотношение

$$f_k(t)\sim\frac{t^{-3/2}}{3\sqrt{\pi}}. \tag{14}$$

Доказательство. Из формулы Стирлинга следует, что

$$V(t)=\frac{\Gamma(1-A+t)}{\Gamma(t+1)}\sim t^{-A},\ \ t\to\infty. \tag{15}$$

Пусть $k=1$, тогда соотношение (14) вытекает из формул (9), (11), (15) при $A=1/2$:

$$f_1(t)=\frac{1}{t+1}\left(1+\frac{t-1/2}{3/2}+\frac{V(t)}{(3/2)^2\,\Gamma(-3/2)}\right)-\frac{2}{3}\sim\frac{4t^{-1/2}}{9\Gamma(-3/2)t}=\frac{t^{-3/2}}{3\sqrt{\pi}},\ t\to\infty.$$

Предположим, что соотношение (14) выполняется при $k-1>0$ и докажем его справедливость при *k*. Будем искать $f_k(t)$ в виде $f_k(t)=a_k(t)+b_k(t)$, где

$$a_k(t)=\frac{k-1}{2(t+1)}\sum_{j=1}^{t}\Pi(k-1)\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{k}{2s}\right)-\Pi(k),\ \ b_k(t)=\frac{k-1}{2(t+1)}\sum_{j=1}^{t}f_{k-1}(j-1)\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{k}{2s}\right).$$

Следовательно, в силу формул (12), (13) при $A=k/2$ имеем

$$a_k(t)=\frac{4}{k(k+1)}\left[\frac{1}{2(t+1)}\sum_{j=1}^{t}\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{k}{2s}\right)-\frac{1}{k+2}\right]=$$

$$=\frac{4}{k(k+1)}\left[\frac{1}{2(t+1)}\left(\frac{t+1}{1+k/2}+\frac{V(t)}{(1+k/2)\Gamma(1-k/2)}\right)-\frac{1}{k+2}\right]=$$

$$=\frac{4V(t)}{2(t+1)k(k+1)(1+k/2)\Gamma(1-k/2)}\sim\frac{\Pi(k)t^{-1-k/2}}{\Gamma(1-k/2)}=o\left(t^{-3/2}\right),\ \ t\to\infty.$$

В свою очередь, в силу предположения индукции $f_{k-1}(t)\sim\frac{t^{-3/2}}{3\sqrt{\pi}}, t\to\infty$, свойств гамма-функции и формулы (15) при $A=k/2$ имеем

$$b_k(t)=\frac{k-1}{2(t+1)}\sum_{j=1}^{t}f_{k-1}(j-1)\frac{V(t)}{V(j)}\sim\frac{k-1}{2(t+1)}\int_1^t\frac{x^{k/2}}{3\sqrt{\pi}x^{3/2}t^{k/2}}dx\sim\frac{t^{-3/2}}{3\sqrt{\pi}},\ \ t\to\infty.$$

Отсюда следует справедливость асимптотического соотношения (14) при произвольном k. Теорема доказана.

МОДЕЛЬ ДОРОГОВЦЕВА

Рассмотрим модель растущей сети Дороговцева, в которой из вновь появляющейся вершины направляется в существующие вершины ориентированное ребро с вероятностью, пропорциональной степени этой вершины плюс a. Здесь $a>0$ является параметром модели. Обозначим $p(k,s,t)$ вероятность того, что на шаге $t\geq 1$ с вершиной s, $1\leq s\leq t$, соединено k ребер ориентированного графа, что является в этой модели степенью вершины s. Для $k\geq 0$ в работе [2] получены следующие соотношения:

$$p(k,s,t+1)=\frac{k-1+a}{t(1+a)}\,p(k-1,s,t)+\left(1-\frac{k+a}{t(1+a)}\right)p(k,s,t),\ \ t>0,$$

$$p(0,1,1)=0,\ \ p(1,1,1)=1,\ \ p(-1,s,t)\equiv 0,\ \ t\geq 1,\ \ p(k,t,t)=\delta_{k0},\ \ t>0.$$

Из формулы (3) следует, что

$$P(k,t+1)=\frac{1}{(t+1)(a+1)}\left[P(k,t)((a+1)t-k-a)+P(k-1,t)(k-1-a)+(1+a)\delta_{k0}\right],$$

$$P(0,1)=0,\ \ P(1,1)=1,\ \ P(-1,t)=0.$$

Нетрудно получить равенства

$$P(0,t+1)=\frac{1}{t+1}\left[1+\sum_{j=2}^{t}\prod_{s=j}^{t}\left(1-\frac{a}{s(a+1)}\right)\right], \tag{16}$$

$$P(k,t+1)=\frac{k-1+a}{(t+1)(a+1)}\sum_{j=1}^{t}P(k-1,j)\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{k+a}{(a+1)s}\right),\ \ k>0. \tag{17}$$

Обозначим

$$A_k=\frac{k+a}{a+1},\ \ \Pi(k)=(1+a)\frac{\Gamma(1+2a)\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2+2a)},\ \ f_k(t)=P(k,t+1)-\Pi(k),\ \ k\geq 1.$$

Теорема 3. При $k\geq 0$ выполняются соотношения

$$f_k(t)\sim C_k t^{-1-A_0},\ \ t\to\infty,\ \ C_0=\frac{-1}{(1+A_0)\Gamma(1-A_0)},\ \ C_k=\frac{C_{k-1}(k-1+a)}{(a+1)(A_k-A_0)}. \tag{18}$$

Доказательство. В силу формул (11), (15), (16) при $A=A_0$

$$f_0(t)=\frac{1}{t+1}\left[1+\frac{t-A_0}{1+A_0}+\frac{V(t)}{\Gamma(-1-A_0)(1+A_0)^2}-\frac{V(t)}{\Gamma(1-A_0)}\right]-\frac{1+a}{1+2a}=$$

$$=\frac{V(t)}{(t+1)\Gamma(-1-A_0)(1+A_0)^2}\sim C_0 t^{-1-A_0},\ \ t\to\infty.$$

При $k>0$ ищем $f_k(t)=P(k,t+1)-\Pi(k)$ в виде $f_k(t)=a_k(t)+b_k(t)$,

$$a_k(t)=\frac{k-1+a}{(t+1)(a+1)}\sum_{j=1}^{t}\Pi(k-1)\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{A_k}{s}\right)-\Pi(k),$$

$$b_k(t)=\frac{k-1+a}{(t+1)(a+1)}\sum_{j=1}^{t}f_{k-1}(j-1)\prod_{s=j+1}^{t}\left(1-\frac{A_k}{s}\right).$$

Тогда в силу (15) при $t\to\infty$ и $A=A_k$

$$a_k(t) = \frac{(k-1+a)\Pi(k-1)\Gamma(1-A_k+t)}{(t+1)(a+1)\Gamma(1-A_k)(1+A_k)^2\Gamma(1+t)} \sim \frac{(k-1+a)\Pi(k-1)t^{-1-A_k}}{(a+1)\Gamma(1-A_k)(1+A_k)^2} = o\left(t^{-1-A_0}\right).$$

Из предположения индукции $f_{k-1}(t) \sim C_{k-1}t^{-1-A_0}$, неравенства $A_k > A_0$ и формулы (15) при $A = A_k$

$$b_k(t) = \frac{(k-1+a)V(t)}{(t+1)(a+1)} \sum_{j=1}^{t} \frac{f_{k-1}(j-1)}{V(j)} \sim \frac{(k-1+a)\Gamma(t+1-A_k)}{(t+1)(a+1)\Gamma(t+1)} \sum_{j=1}^{t} \frac{C_{k-1}j^{-1-A_0}\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-A_k)} \sim$$

$$\sim \frac{(k-1+a)C_{k-1}t^{-A_k}}{(t+1)(a+1)} \sum_{j=1}^{t} j^{-1-A_0-A_k} \sim \frac{(k-1+a)C_{k-1}t^{-A_k}}{(t+1)(a+1)} \int_1^t x^{-1-A_0-A_k}dx \sim C_k t^{-1-A_0}, \quad t \to \infty .$$

Тем самым асимптотическое соотношение (18) доказано при произвольном k. Теорема доказана.

Замечание 3. Обращение к модели Дороговцева [2] связано с ее широким использованием в современных моделях растущих случайных сетей. При малых a модель Дороговцева дает сравнительно простое и удобное описание сети Интернета с помощью степенного распределения степени узлов сети

$$\Pi(k) \sim Dk^{-(2+a)}, \quad D = \frac{(1+a)\Gamma(1+2a)}{\Gamma(a)}, \quad k \to \infty ,$$

с параметром $(2+a)$, близким к двум [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barabasi, L. A.* Emergence of scaling in random networks / L. A. Barabasi, R. Albert // Science. 1999. V. 286. P.509–5122.

2. *Dorogovtsev, S. N.* Evolution of Networks / S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes // Adv. Phys. 2002. V. 51. № 4. P.1079–1187.

3. *Гинзбург, С. Л.* Влияние структуры сложной сети на свойства динамических процессов на ней / С. Л. Гинзбург, А. В. Накин, Н. Е. Савицкая // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. № 12. С.873–878.

4. *Евин, И. А.* Введение в теорию сложных сетей / И. А. Евин // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 2. С.121–141.

5. *Райгородский, А. М.* Модели случайных графов и их применение / А. М. Райгородский // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 4. С.130–140.