

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ RQ-СИСТЕМ С ВХОДЯЩИМ ММРР-ПОТОКОМ

Е. А. Фёдорова, А. А. Назаров

Томский государственный университет  
Томск, Россия  
E-mail: moiskate@mail.ru

В работе предлагается два численных алгоритма вычисления распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов в RQ-системе ММРР|M|1: рекуррентный алгоритм и «мегаматричный» метод. Проведен анализ сходимости предложенных алгоритмов.

*Ключевые слова:* RQ-система, источник повторных вызовов, рекуррентный алгоритм, «мегаматричный» метод.

## ВВЕДЕНИЕ

В реальных телекоммуникационных системах часто возникают ситуации повторных обращений необслуженных заявок к прибору, причем в таких системах нельзя выявить очередь в явном виде. Математическими моделями таких систем являются системы массового обслуживания с повторными вызовами или RQ-системы (Retrial queueing systems) [1, 2].

Существует большое количество работ, посвященных исследованию RQ-систем различной конфигурации. Однако аналитические формулы для исследуемых характеристик получены лишь для систем с входящим простейшим потоком. В данной работе же предложены численные алгоритмы вычисления распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов в RQ-системе ММРР|M|1.

## ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную RQ-систему ММРР|M|1.

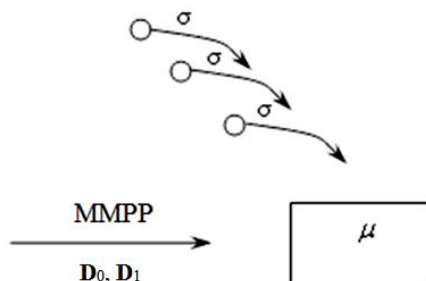


Рис. 1. RQ-система ММРР|M|1

На вход системы поступает ММРР-поток заявок (Markov Modulated Poisson Process), который является частным МАР-потока (Markovian Arrival Process) и описывается матрицами  $\mathbf{D}_0$  и  $\mathbf{D}_1$  [3].

Обозначим  $n(t)$  – цепь Маркова, управляющая ММРР-потоком. Матрица инфинитезимальных характеристик управляющего процесса  $n(t)$  равна  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$ . Матрица  $\mathbf{D}_1$  – диагональная матрица с элементами  $\rho\lambda_n$ , где  $\lambda_n$  – условные интенсивности ММРР-потока,  $\rho$  – параметр, характеризующий загрузку системы (определен ниже),  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Таким образом можно ввести матрицу  $\lambda = \text{diag}\{\lambda_n\}$ , для которой выполняется:  $\mathbf{D}_1 = \rho\lambda$ . Вектор-строка  $\mathbf{R}$  описывает стационарное распределение вероятностей состояний управляющего процесса  $n(t)$ . Очевидно, что тогда интенсивность входящего потока будет равна  $\lambda = \mathbf{R}\lambda\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  – единичный вектор столбец.

Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . Если поступившая заявка застаёт прибор свободным, то оно занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\sigma$ .

Пусть параметры системы таковы, что выполняется:  $\mathbf{R}\lambda\mathbf{E} = \mu$ , тогда загрузка системы определяется как  $\rho = \lambda/\mu = \lambda/\mathbf{R}\lambda\mathbf{E}$ .

Пусть  $i(t)$  – случайный процесс, характеризующий число заявок в ИПВ, а  $k(t)$  – определяет состояние прибора следующим образом:  $k(t) = \{1, \text{если прибор занят}; 0, \text{если прибор свободен}\}$ .

Задача состоит в нахождении распределения вероятностей  $P(i)$  числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы, однако процесс  $i(t)$  не является марковским. Поэтому будем исследовать марковский многомерный процесс  $\{k(t), n(t), i(t)\}$  изменения состояний данной системы во времени. Обозначим  $P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i, t)$  – вероятность того, что прибор в момент времени  $t$  находится в состоянии  $k$ , управляющая ММРР-потоком цепь Маркова – в состоянии  $n$  и в источнике повторных вызовов находится  $i$  заявок. Для распределения вероятностей  $P(k, n, i, t)$  составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0, n, i, t)}{\partial t} = \mu P(1, n, i, t) - (\rho\lambda_n + i\sigma - q_{nn})P(0, n, i, t) + \sum_{v \neq n} P(0, v, i, t)q_{vn}, \\ \frac{\partial P(1, n, i, t)}{\partial t} = -(\rho\lambda_n + \mu - q_{nn})P(1, n, i, t) + \rho\lambda_n P(0, n, i, t) + \\ + \rho\lambda_n P(1, n, i-1, t) + \sigma(i+1) \cdot P(0, n, i+1, t) + \sum_{v \neq n} P(1, v, i, t) \cdot q_{vn}. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим векторы-строки

$$\mathbf{P}(k, i) = \{P(k, 1, i) \quad P(k, 2, i) \quad \dots \quad P(k, N, i)\},$$

где в стационарном режиме  $P(k, n, i) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, n, i, t)$ . Тогда в матричном виде система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(0, i)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - i\sigma \cdot \mathbf{I}) + \mu\mathbf{P}(1, i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(1, i)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0, i)\rho\lambda + \mathbf{P}(1, i-1)\rho\lambda + \sigma(i+1) \cdot \mathbf{P}(0, i+1) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2)$$

Далее предложим два численных алгоритма решения системы (2).

## РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ

Обозначим

$$\mathbf{P}(v,i) = \mathbf{P}(0,0) \cdot \mathbf{G}(v,i), \quad (3)$$

причем матрица  $\mathbf{G}(0,0) \equiv \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  - единичная матрица.

Тогда система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(0,0) \cdot \mathbf{G}(0,i)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - i\sigma \cdot \mathbf{I}) + \mu\mathbf{P}(0,0) \cdot \mathbf{G}(1,i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(0,0) \cdot \mathbf{G}(1,i)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0,0) \cdot \mathbf{G}(0,i)\rho\lambda + \mathbf{P}(0,0) \cdot \mathbf{G}(1,i-1)\rho\lambda + \\ + \sigma(i+1) \cdot \mathbf{P}(0,0) \cdot \mathbf{G}(0,i+1) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Так как  $\mathbf{P}(0,0) \neq \mathbf{0}$ , то справедлива следующая система уравнений для  $\mathbf{G}(v,i)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{G}(0,i)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - i\sigma \cdot \mathbf{I}) + \mu\mathbf{G}(1,i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}(1,i)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{G}(0,i)\rho\lambda + \mathbf{G}(1,i-1)\rho\lambda + \sigma(i+1) \cdot \mathbf{G}(0,i+1) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим отдельно случай, когда  $i = 0$ :

$$\begin{cases} (\mathbf{Q} - \rho\lambda) + \mu\mathbf{G}(1,0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}(1,0)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - \mu\mathbf{I}) + \rho\lambda + \sigma \cdot \mathbf{G}(0,1) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5)$$

В случае  $i = N$ , где  $N$  – максимальное число заявок в источнике повторных вызовов, система (4) имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(0,N)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - N\sigma \cdot \mathbf{I}) + \mu\mathbf{G}(1,N) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}(1,N)(\mathbf{Q} - \rho\lambda - \mu\mathbf{I}) + \mathbf{G}(0,N)\rho\lambda + \mathbf{G}(1,N-1)\rho\lambda = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда алгоритм вычисления распределение вероятностей числа заявок в ИПВ состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Используя уравнения (4) – (6) получим выражения для всех  $\mathbf{G}(v,i)$ , где  $v = 0, 1, i = 0, 1, \dots, N$ .

На следующем рисунке представлено описание функции, вычисляющей  $\mathbf{G}(v,i)$ .

$$\text{solveMMPP}(N, Q, \lambda, \mu, \sigma, \rho) := \left| \begin{array}{l} \mathbf{G}_{(0,0)} \leftarrow \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{(1,0)} \leftarrow \frac{-\mathbf{Q} + \rho \cdot \lambda}{\mu} \\ \mathbf{G}_{(0,1)} \leftarrow \frac{\mathbf{G}_{(1,0)} \cdot (\rho \cdot \lambda + \mu \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q}) - \rho \cdot \lambda}{\sigma} \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } i \leq N - 1 \\ \left| \begin{array}{l} \mathbf{G}_{(1,i)} \leftarrow \mathbf{G}_{(0,i)} \cdot \frac{\rho \cdot \lambda + i \cdot \sigma \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q}}{\mu} \\ \mathbf{G}_{(0,i+1)} \leftarrow \frac{\mathbf{G}_{(1,i)} \cdot (\rho \cdot \lambda + \mu \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q}) - \mathbf{G}_{(0,i)} \cdot \rho \cdot \lambda - \mathbf{G}_{(1,i-1)} \cdot \rho \cdot \lambda}{\sigma \cdot (i+1)} \\ i \leftarrow i+1 \end{array} \right. \\ \mathbf{G}_{(1,N)} \leftarrow \mathbf{G}_{(0,N)} \cdot \frac{\rho \cdot \lambda + \sigma \cdot N \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q}}{\mu} \\ \mathbf{G} \end{array} \right.$$

Рис. 2. Процедура вычисления  $\mathbf{G}(v,i)$

Шаг 2. Из условия  $\sum_{i=0}^{\infty} \{P(0,i) + P(1,i)\} = R$  найдем  $P(0,0)$ .

Так как  $P(0,0) \sum_{i=0}^{\infty} \{G(0,i) + G(1,i)\} = P(0,0)G = R$ , тогда  $P(0,0) = RG^{-1}$ .

Шаг 3. По формуле (3) вычисляем все  $P(v,i)$ , где  $v = 0, 1, i = 0, 1, \dots, N$ .

Описанный рекуррентный алгоритм вычисления распределение вероятностей числа заявок в ИПВ был реализован в среде MathCAD.

Однако недостатком рекуррентных алгоритмов является то, что при больших значениях  $N$  погрешность вычислений имеет свойство накапливаться и оказывает сильное воздействие на результаты.

Проведем анализ сходимости предлагаемого рекуррентного метода и вычислим его погрешность для различных значений параметров. Для этого сравним полученное распределение в частном случае (когда на вход системы поступает простейший поток) с допредельным распределением, полученным в [4]. В качестве критерия близости распределений будем использовать расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \max_{0 \leq i < \infty} \left| \sum_{v=0}^i D(v) - \sum_{v=0}^i P(v) \right|.$$

Таблица 1

Погрешность рекуррентного алгоритма

Параметры системы	$\sigma = 10, \rho = 0.5$	$\sigma = 1, \rho = 0.5$	$\sigma = 10, \rho = 0.7$	$\sigma = 1, \rho = 0.7$	$\sigma = 10, \rho = 0.9$	$\sigma = 1, \rho = 0.9$	$\sigma = 10, \rho = 0.95$	$\sigma = 1, \rho = 0.95$
N	10	10	15	20	30	35	45	48
$\Delta$	$10^{-14}$	$10^{-12}$	$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	0.457	0.916

Как видно из таблицы, при увеличении  $N$  погрешность вычислений увеличивается, а последние два столбца таблицы говорят о том, что результат алгоритма вообще не сходится к решению. Приемлемые результаты рекуррентный алгоритм дает при значениях  $N \leq 35$ , что и будем считать границей области его применения.

## МЕГАМАТРИЧНЫЙ МЕТОД

Как было показано выше, использование рекуррентного алгоритма невозможно при  $N > 30$ , поэтому рассмотрим еще один метод решения системы (2), применимый при больших значениях  $N$ .

Представим систему линейных уравнений (2) для всех  $i = 0, 1, \dots, N$  в виде матричного уравнения  $PG = 0$ , при этом элементы матрицы  $G$  сами являются матрицами. Матрица  $G$  имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} Q - \rho\lambda & \rho\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu I & Q - \rho\lambda - \mu I & 0 & \rho\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma I & Q - \rho\lambda - \sigma I & \rho\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu I & Q - \rho\lambda - \mu I & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q - \rho\lambda - i\sigma I & \rho\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu I & Q - \rho\lambda - \mu I & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & Q - \rho\lambda - (N-1)\sigma I & \rho\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu I & Q - \rho\lambda - \mu I & 0 & \rho\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma NI & Q - \rho\lambda - N\sigma I & \rho\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mu I & Q - \rho\lambda - \mu I \end{pmatrix}$$

Добавляем к матричному уравнению  $\mathbf{P}\mathbf{G} = \mathbf{0}$  условие нормировки  $\sum_{i=0}^N \{\mathbf{P}(0, i) + \mathbf{P}(1, i)\} = \mathbf{R}$  и решаем матричное уравнение любым из известных методов.

Исследуем сходимость предлагаемого мегаматричного метода и вычислим его погрешность для различных значений параметров. Для этого сравним полученное распределение в частном случае (когда на вход системы поступает простейший поток) с допредельным распределением, полученным в [4]. В качестве критерия близости распределений будем использовать расстояние Колмогорова.

Таблица 2

**Погрешность мегаматричного алгоритма**

Параметры системы	$\sigma = 10,$ $\rho = 0.9$	$\sigma = 1,$ $\rho = 0.9$	$\sigma = 10,$ $\rho = 0.95$	$\sigma = 0.5,$ $\rho = 0.9$	$\sigma = 1,$ $\rho = 0.95$	$\sigma = 0.5,$ $\rho = 0.95$
N	50	80	90	120	130	150
$\Delta$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$

Как видно из таблицы, при увеличении  $N$  погрешность вычислений не увеличивается. Однако при значениях  $N > 150$  возникают проблемы с реализацией вычислений на компьютере, связанные с обращением матрицы большой размерности.

Подсчитаем размерность матрицы  $\mathbf{G}$  для некоторого численного примера. Пусть процесс  $n(t)$  принимает 3 значения, т.е. матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\boldsymbol{\lambda}$  размера  $3 \times 3$ . Максимальное значение  $N$  заявок в источнике повторных вызовов выбираем таким, что вероятностями  $P(k, i)$  для всех  $i > N$  можно пренебречь. Пусть для некоторой комбинации параметров  $\mu, \sigma, \rho$  имеем значение  $N = 150$ . Таким образом, получаем, что размерность матрицы  $\mathbf{G}$  равна  $2 \times 3 \times 150 = 900$ .

Таким образом, и предлагаемый мегаматричный алгоритм имеет границы применения ( $N \leq 150$ ). Поэтому необходимы разработки аналитических методов вычисления распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, на работу которых не влияет размерность системы, например, метод асимптотического анализа [5] или другие приближенные методы [6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Falin, G. I. Retrial queues / G. I. Falin, J. G. C. Templeton. London : Chapman & Hall, 1997. 328 p.
2. Artalejo, J. R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Springer, 2008. 320 p.
3. Lucantoni, D. M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process / D. M. Lucantoni // Stochastic Models, 7. 1991. P. 1–46.
4. Гарайшина, И. Р. Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / И. Р. Гарайшина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров. Томск : Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.
5. Моисеева, Е. А. Исследование RQ-системы MMPP|GI|1 методом асимптотического анализа / Е. А. Моисеева, А. А. Назаров // Вестник ТГУ. УВТиИ. 2013. Т. 25, № 4. С. 84–94.
6. Фёдорова, Е. А. Квазигеометрическая и гамма аппроксимации в RQ-системе MMPP|M|1. / Е. А. Фёдорова, А. А. Назаров // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2014): Материалы XIII Международной научно-практической имени А.Ф. Терпугова (20–22 ноября 2014 г.). Томск, 2014. Ч. 2. С. 207–212.

*Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 1.511.2014/К.*