РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ВЕБСТЕРА – АЛСОПА О СРЕДНИХ ЗАДЕРЖКАХ В СИСТЕМАХ С ПЕРЕНАЛАДКАМИ И ДООБСЛУЖИВАНИЕМ

Е. В. Пройдакова

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия
E-mail: pev_1@mail.ru

В работе изучается система управления независимыми и конфликтными потоками требований в классе циклических алгоритмов. Демонстрируется применение имитационного моделирования, в качестве метода решения проблемы Вебстера – Алсопа о средних задержках требований в такой системе.

Ключевые слова: циклическая система массового обслуживания, конфликтные потоки, средняя задержка требования, имитационное моделирование.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В работе рассматривается система управления независимыми и конфликтными потоками $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ требований в классе циклических алгоритмов. Конфликтность означает, что обслуживание каждого из потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени. У каждого потока есть основной этап обслуживания и переналадка. Обслуживающее устройство имеет $2m$ состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$. В состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ пропускается только поток Π_j с интенсивностью $\mu_j > 0$. В состоянии $\Gamma^{(2j)}$ обслуживается также только поток Π_j, но уже с интенсивностью $\mu'_j \geq \mu_j$. Интенсивности μ_j и μ'_j, $j = \overline{1, m}$ определяют среднее число заявок, обслуживающихся в единицу времени. Длительности $T_1, T_2, \ldots, T_{2m}$ состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$ являются управляющими параметрами. Входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ считаем пуассоновскими с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ соответственно. По потокам $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ разрешены неограниченные очереди $O_1, O_2, \ldots, O_m$. Независимые потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_m$ определяют выходные потоки системы при ее максимальной загрузке и эффективном функционировании.

Система обслуживания наблюдалась в дискретные моменты времени τ_i, $i = 0, 1, \ldots$ переключений состояний обслуживающего устройства или на промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Пусть $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, $l'_j = [\mu'_j T_{2j}]$ и $l_j \geq l'_j$. Определим при $j = 1, \ldots, m$ и $i = 0, 1, \ldots$ следующие случайные элементы: 1) $\eta_{j,i}$ – число требований потока Π_j, поступивших за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\eta_{j,i} \in X = \{0, 1, \ldots\}$; 2) $\xi_{j,i}$ – максимально возможное число заявок, которое может обслужиться за время $[\tau_i, \tau_{i+1})$ по потоку Π_j, $\xi_{j,i} \in \{0, l'_j, l_j\}$; 3) Γ_i – состояние обслуживающего устройства на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}\}$; 4) $æ_{j,i}$ – длина очереди по потоку Π_j в момент времени τ_i, $æ_{j,i} \in X$; 5) $\overline{\xi}_{j,i}$ – число реально обслуженных заявок потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\overline{\xi}_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$; 6) $\overline{\xi}_{j,-1}$ – число реально обслуженных требований потока Π_j за время $[0, \tau_0)$, $\overline{\xi}_{j,-1} \in Y_j$.

Заявки из очередей отбираются группами, согласно экстремальной стратегии обслуживания, то есть выполняется соотношение $\overline{\xi}_{j,i} = \min\{æ_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}$. В силу независимости входных потоков, потоков насыщения и циклического переключения состояний обслуживающего устройства, можно рассматривать процесс обслуживания требований отдельно для каждого потока. В [1–2] изучались вероятностные свойства векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$, которая описывает поведение циклической системы по потоку Π_j. В частности были получены условия существования стационарного распределения для такой последовательности.

Теорема. Для существования стационарного распределения случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, æ_{j,i}, \overline{\xi}_{j,i-1}); i \geq 0\}$ необходимо и достаточно одновременное выполнение m неравенств: $\lambda_j \mathrm{T} - l_j - l'_j < 0,\ j = \overline{1, m}$.

ПРОБЛЕМА ВЕБСТЕРА – АЛСОПА

Основным критерием качества управления потоками является среднее время ожидания начала обслуживания произвольной заявки в стационарном режиме работы системы или средняя задержка требования. Для вычисления средних задержек транспорта на регулируемом по циклическому алгоритму перекрестке при постоянных интенсивностях обслуживания машин, инженеры-транспортники, как правило, используют приближенную формулу Вебстера – Алсопа [3]:

$$\tilde{\mathrm{M}}\gamma_j = \frac{T(1-a_j)^2}{2(1-a_j\rho_j)} + \frac{\rho_j^2}{2\lambda_j(1-\rho_j)} - 0{,}65\left(\frac{\mathrm{T}}{\lambda_j^2}\right)^{1/3}\rho_j^{(2+5a_j)}, \tag{1}$$

где $\tilde{\mathrm{M}}\gamma_j$ – средняя задержка на перекрестке машины j-го потока, Т – продолжительность периода работы светофора, λ_j – интенсивность j-го потока, T_{2j-1} – длительность зеленого света для j-го потока, μ_j – интенсивность обслуживания машин j-го потока в соответствующую зеленую фазу светофора, $a_j = \mathrm{T}_{2j-1}\mathrm{T}^{-1}$, $\rho_j = \lambda_j \mathrm{T}(\mu_j \mathrm{T}_{2j-1})^{-1}$.

Первый член формулы (1) определяет среднюю задержку машины j-го потока на перекрестке при непрерывном прибытии автомобилей с интенсивностью λ_j и при непрерывном обслуживании машин в зеленую фазу с интенсивностью μ_j. Второй член учитывает среднюю задержку машины на перекрестке в случае, когда машины прибывают по закону Пуассона с параметром λ_j и покидают перекресток в течение всего периода Т через постоянные интервалы длительностью $\mathrm{T}(\mu_j \mathrm{T}_{2j-1})^{-1}$. Третий член является корректирующим, он учитывает погрешность при расчете задержки по первым двум составляющим в сравнении с ее экспериментальным значением.

Формула Вебстера – Алсопа была найдена в 1958 году эмпирическим путем. В 1966 году была получена аналитическая формула [4] для определения средней задержки в случае постоянной длительности обслуживания требований. При небольших значениях интенсивностей транспортных потоков средние задержки, полученные по формуле (1), хорошо соответствует аналитическим вычислениям. Однако, при больших интенсивностях потоков значения средних задержек, получаемых по формуле Вебстера – Алсопа, существенно больше средних наблюдаемых задержек в реальных системах. Более того, это отличие нельзя обосновать точностью вычислений, полученных разными методами [5]. Для выяснения причин данного отличия применим метод имитационного моделирования.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для циклической управляющей системы была создана соответствующая имитационная модель. В качестве примера рассмотрим случай $m = 2$. При моделировании принимались во внимание условия существования стационарного режима функционирования системы: $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 < 0$, $\lambda_2 T - l_2 - l'_2 < 0$. В начале работы имитационной модели задавались следующие входные параметры: 1) длительности T_1, T_2, T_3, T_4; 2) интенсивности входных потоков λ_1 и λ_2; 3) интенсивности обслуживания μ_1, μ_2 и μ'_1, μ'_2.

Моделирование включало в себя два этапа. На первом этапе определялся момент перехода системы в квазистационарный (близкий к стационарному) режим функционирования. На втором этапе моделировалась работа системы в квазистационарном режиме для нахождения численных оценок характеристик системы. В частности были найдены оценки $\tilde{M}\gamma_1$ и $\tilde{M}\gamma_2$ среднего времени ожидания начала обслуживания требования по первому и второму потокам и оценка γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольного требования, где $\gamma^* = (\lambda_1 \tilde{M}\gamma_1 + \lambda_2 \tilde{M}\gamma_2) / (\lambda_1 + \lambda_2)$. При моделировании также учитывались физические ограничения на параметры системы: $T_2 \geq 4$, $T_4 \geq 4$, $T_1 \geq T_2$, $T_3 \geq T_4$ и $T \geq 60$. Ниже, в качестве примера приведены фрагменты полученных результатов. Более подробно численные результаты представлены, например, в [6].

Таблица 1

Значения оценки γ^* для различных периодов T при $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu'_1 = \mu'_2 = 1{,}3$, $\lambda_1 = 0{,}7$ и $\lambda_2 = 0{,}1$

T	T_1	T_3	$\tilde{M}\gamma_1$	$\tilde{M}\gamma_2$	γ^*
120	104	8	4,629	89,839	15,281
	100	12	6,723	54,528	12,698
	94	18	10,106	46,209	14,619
	90	22	12,731	42,708	16,479
100	86	6	4,533	83,168	14,363
	80	12	7,638	41,445	11,864
	70	22	17,511	30,995	19,197
	66	26	47,520	28,064	45,088
80	68	4	4,184	65,967	11,907
	64	8	6,409	35,056	10,002
	60	12	9,216	30,289	11,851
	56	16	13,356	25,492	14,873
60	48	4	5,761	40,054	10,108
	46	**6**	**6,671**	**26,071**	**9,096**
	44	8	8,204	23,326	10,095
	42	10	13,132	19,449	13,922

Из таблицы 1 следует, что при указанных параметрах минимум оценки γ^* равен 9,096 и он достигается при значениях $T = 60$, $T_1 = 4$, $T_3 = 48$, которые и являются квазиоптимальными (близкими к оптимальным) по критерию $\gamma^* \to \min$.

Ранее в данной статье рассматривалась система, в которой значение интенсивности потоков насыщения предполагалось равным постоянной величине в течение всего периода времени, пока обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$. Пусть теперь в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ длительности T_{2j-1} изменяется числовое значение интенсивности потоков насыщения. Рассмотрим простейший случай, когда интенсивность μ_j последовательно принимает значения $\mu_{j,1}$ и $\mu_{j,2}$, то есть имеет кусочно-постоянный вид. Данное обстоятельство позволяет представить состояние обслуживающего устройства $\Gamma^{(2j-1)}$ в виде объединения двух виртуальных состояний $\Gamma^{(2j-1)} = \{\Gamma_1^{(2j-1)}, \Gamma_2^{(2j-1)}\}$, следовательно, оно будет являться укрупненным состоянием [7]. В обоих состояниях $\Gamma_1^{(2j-1)}$ и $\Gamma_2^{(2j-1)}$ обслуживаются требования j-го потока, но с разными интенсивностями $\mu_{j,1}$ и $\mu_{j,2}$. Длительности состояний $\Gamma_1^{(2j-1)}$ и $\Gamma_2^{(2j-1)}$ равны $T_{2j-1,1}$ и $T_{2j-1,2}$ единиц времени соответственно, причем выполняется соотношение $T_{2j-1} = T_{2j-1,1} + T_{2j-1,2}$. Алгоритм смены состояний обслуживающего устройства остается циклическим. В силу этого для новой модели можно применять те же методы исследований, что и в предыдущем случае, только с увеличением числа состояний обслуживающего устройства.

При имитационном моделировании в качестве примера также рассмотрим случай двух входных конфликтных потоков ($m = 2$). Пусть для первого потока ($j = 1$) интенсивность обслуживания требований в состоянии $\Gamma^{(1)}$ имеет кусочно-постоянный вид, а для второго потока остается постоянной. В этом случае число состояний обслуживающего устройства становится равным 5. Смена состояний осуществляется по следующему алгоритму: $\Gamma_1^{(1)} \to \Gamma_2^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \Gamma^{(3)} \to \Gamma^{(4)} \to \Gamma_1^{(1)} \to \ldots$ Величины $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$ и $T_{1,1}$, $T_{1,2}$ будем варьировать так, чтобы при этом средняя интенсивность обслуживания требований первого потока на интервале T_1 оставалась постоянной и равной μ_1.

Как и в предыдущей модели, из физических соображений фиксируем следующие параметры $T_2 = T_4 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu'_1 = \mu'_2 = 1{,}3$. Изучим, как влияет непостоянная интенсивность обслуживания требований по первому направлению на представленные в таблице 1 значений оценки γ^*, полученные при постоянных интенсивностях обслуживания. В таблице 2 приведены фрагменты результатов для оценки γ^* в случае непостоянной интенсивности обслуживания требований первого потока.

Таблица 2

Оценка γ^* в случае непостоянной интенсивности обслуживания требований первого потока при $\lambda_1 = 0{,}7$ и $\lambda_2 = 0{,}1$ и квазиоптимальных значениях T_1 и T_3

T	$T_{1,1}$	$T_{1,2}$	T_3	$\mu_{1,1}$	$\mu_{1,2}$	γ^*
120	30	70	12	1,667	0,715	12,459
	38	62	12	1,316	0,807	11,869
	40	60	12	1,250	0,834	10,081
	46	54	12	1,087	0,926	11,984
100	26	54	12	1,539	0,741	11,562
	30	50	12	1,333	0,800	9,708
	34	46	12	1,177	0,870	10,882
	40	40	12	1,000	1,000	11,778
80	18	46	8	1,778	0,696	10,127
	20	44	8	1,600	0,728	9,542
	24	40	8	1,334	0,801	8,206
	32	32	8	1,000	1,000	9,998
60	12	34	6	1,917	0,677	8,688
	16	**30**	**6**	**1,623**	**0,668**	**7,409**
	20	26	6	1,150	0,885	8,684
	23	23	6	1,000	1,000	9,205

Из таблицы 2 очевидно, что наличие зависимости интенсивности обслуживания от времени даже по одному направлению приводит к заметному уменьшению оценки γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольного требования. Например, при $\lambda_1 = 0{,}7$ и $\lambda_2 = 0{,}1$ и периоде $T = 60$ на квазиоптимальных параметрах, возможно уменьшение значения оценки γ^* с 9,096 до 7,409. При этом интервал времени $T_1 = 46$ разбивается на два участка $T_{1,1} = 16$ и $T_{1,2} = 30$, а интенсивности обслуживания требований выбираются соответственно $\mu_{1,1} = 1{,}623$ и $\mu_{1,2} = 0{,}668$. Аналогично, варьируя параметры $T_{1,1}$, $T_{1,2}$ и $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,1}$ можно добиться заметного уменьшения значения оценки γ^* для произвольных интенсивностей λ_1, λ_2 и периода T. Таким образом, в случае транспортной системы, можно минимизировать задержки машин на перекрестке за счет выбора функциональных зависимостей $\mu_j = \mu_j(t)$, например, увеличивая интенсивности переезда в начале включения соответствующей зеленой фазы светофора.

Результаты имитационного моделирования позволяют сделать вывод, что описанное выше отличие средних задержек может быть вызвано эффектом неучтенных в формуле Вебстера – Алсопа зависимостей интенсивностей обслуживания требований от времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке госбюджетной темы № 01201456585 «Математическое моделирование и анализ стохастических эволюционных и процессов принятия решений» и государственной программы «Поддержка ведущих университетов РФ в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пройдакова, Е. В.* Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением / Е. В. Пройдакова, М. А. Федоткин // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия Математика. 2006. Вып. 1(4). С. 92–102.

2. *Пройдакова, Е. В.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками / Е. В. Пройдакова, М. А. Федоткин // Автоматика и телемеханика. 2008. № 06. С. 96–107.

3. *Allsop, R. F.* Delay-minimizing settings for fixed-time traffic signals at a single road junction / R. F. Allsop // J. Inst. Math. Applies. 1971. V. 8. № 2. P. 164–185.

4. *Неймарк, Ю. И.* О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке / Ю. И. Неймарк, М. А. Федоткин // Автоматика и телемеханика. 1966. Т. 27. № 3. С. 78–87.

5. *Федоткин М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. М. : Наука, 1996. Вып. 6. С. 51–70.

6. *Пройдакова, Е. В.* Численное исследование циклической и приоритетной систем управления конфликтными потоками требований / Е. В. Пройдакова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2013. № 3(1). С. 199–205.

7. *Кемени, Джон Дж.* Конечные цепи Маркова / Джон Дж. Кемени, Дж. Лори Снелл. М. : Наука, 1970.