ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛА МОДУЛИРОВАННОГО MAP-ПОТОКА СОБЫТИЙ

Л. А. Нежельская

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: ludne@mail.ru

Изучается модулированный MAP-поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков событий в цифровых сетях интегрального обслуживания (ISDN). Приводится явный вид плотности вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока.

Ключевые слова: модулированный MAP-поток событий, инфинитезимальные характеристики, плотность вероятностей.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие компьютерной техники и информационных технологий во многом определило важную сферу приложений теории массового обслуживания − проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, телекоммуникационных сетей, которые называют цифровыми сетями интегрального обслуживания − Integrated Service Digital Networks (ISDN). Всё это послужило стимулом к созданию адекватных математических моделей реальных информационных потоков, функционирующих в ISDN, так называемых дважды стохастических потоков событий. В работе [1] дважды стохастический поток определяется как случайный поток событий с интенсивностью, представляющей собой случайный процесс. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму классу относятся потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Второй класс потоков в настоящее время принято называть MC(Markov chain)-потоками либо MAP(Markovian Arrival Process)-потоками событий. В [2] приведена классификация MC-потоков событий и установлена связь между MC-потоками и MAP-потоками событий.

Режим функционирования системы массового обслуживания непосредственно зависит от параметров MAP-потока и состояний, в которых находится поток. В реальных ситуациях параметры входящих потоков событий, как правило, неизвестны либо частично известны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого важной задачей является задача оценки в произвольный момент времени параметров потока по наблюдениям за этим потоком.

Для решения задачи оценивания параметров потока в первую очередь необходимо знание вероятностных свойств потока. В настоящей статье рассматривается модулированный МАР-поток событий и находится явный вид плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается модулированный МАР-поток событий с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии зависит от двух случайностей: 1) первая случайность распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(1)}(t) = 1 - e^{-\alpha_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i-го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью единица из i-го состояния в j-е, $i, j = 1, 2$ ($i \neq j$); 2) вторая случайность распределена по экспоненциальному закону $F_i^{(2)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$; в момент окончания i-го состояния процесс $\lambda(t)$ переходит с вероятностью $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$ в j-е состояние ($i \neq j$) с наступлением события либо с вероятностью $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$ переходит в j-е состояние ($i \neq j$) без наступления события, либо с вероятностью $P_1(\lambda_i|\lambda_i)$ переходит в i-е состояние с наступлением события. При этом $P_0(\lambda_j|\lambda_i) + P_1(\lambda_j|\lambda_i) + P_1(\lambda_i|\lambda_i) = 1$.

Первая и вторая случайности являются независимыми друг от друга. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ − марковский процесс. Матрицы инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ примут вид

$$D_0 = \begin{Vmatrix} -(\alpha_1+\lambda_1) & \alpha_1+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) \\ \alpha_2+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -(\alpha_2+\lambda_2) \end{Vmatrix}, \quad D_1 = \begin{Vmatrix} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 − интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 − интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком [3]. Заметим, что в приведённом определении модулированного МАР-потока событий в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока при переходе $\lambda(t)$ из первого (второго) состояния во второе (в первое). Отметим, что в реальных потоках событий, моделями которых являются модулированные МАР-потоки, событие потока (в момент окончания того или иного состояния процесса $\lambda(t)$) наступает с полной определённостью в первом или во втором состоянии процесса $\lambda(t)$. В данной статье при получении формулы для плотности вероятностей данное обстоятельство является несущественным, т.к. наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j, $i, j = 1, 2$, происходят мгновенно. Вариант возникающей ситуации приведён на рис. 1, где λ_1 и λ_2 − состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \ldots$ − моменты наступления событий потока.

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока $t_1, t_2, \ldots$. Рассматривается стационарный режим функционирования потока. В силу предпосылок в моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, т.е. модулированный МАР-поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k − момента наступления события потока, $k = 1, 2, \ldots$.

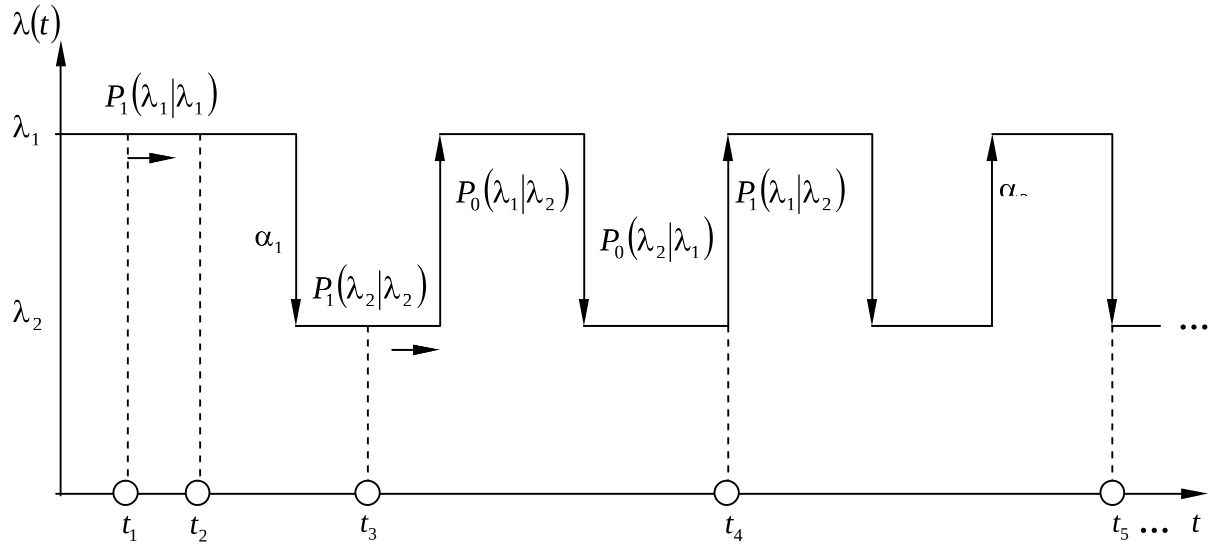

Рис. 1. Модулированный MAP-поток событий

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ − значение длительности k-го интервала между соседними событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$ для любого k. В силу этого момент времени t_k наступления события без ограничения общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

Задача заключается в нахождении явного вида $p(\tau)$.

ВЫВОД ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ $p(\tau)$

Введём в рассмотрение вероятности $p_{ij}(\tau)$ того, что на интервале $(0,\tau)$ нет событий модулированного MAP-потока и в момент времени τ значение процесса $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$, $i, j = 1, 2$. Тогда для указанных вероятностей справедливы следующие системы дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{cases} p'_{11}(\tau) = -(\alpha_1 + \lambda_1)p_{11}(\tau) + (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2))p_{12}(\tau), \\ p'_{12}(\tau) = (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1))p_{11}(\tau) - (\alpha_2 + \lambda_2)p_{12}(\tau), \\ p_{11}(0) = 1, p_{12}(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'_{22}(\tau) = -(\alpha_2 + \lambda_2)p_{22}(\tau) + (\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1))p_{21}(\tau), \\ p'_{21}(\tau) = (\alpha_2 + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2))p_{22}(\tau) - (\alpha_1 + \lambda_1)p_{21}(\tau), \\ p_{22}(0) = 1, p_{21}(0) = 0. \end{cases}$$

Решая записанные системы, находим вероятности $p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в виде

$$p_{11}(\tau) = \frac{1}{z_2 - z_1}\left[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2\tau}\right],$$

$$p_{12}(\tau) = \frac{\alpha_1 + \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}{z_2 - z_1}\left[e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}\right],$$

$$p_{22}(\tau)=\frac{1}{z_2-z_1}\left[(\lambda_1+\alpha_1-z_1)e^{-z_1\tau}-(\lambda_1+\alpha_1-z_2)e^{-z_2\tau}\right],$$

$$p_{21}(\tau)=\frac{\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1\mid\lambda_2)}{z_2-z_1}\left[e^{-z_1\tau}-e^{-z_2\tau}\right],$$

$$z_1=\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2)-\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2\mid\lambda_1))(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1\mid\lambda_2))}\right],$$

$$z_2=\frac{1}{2}\left[(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2)+\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2\mid\lambda_1))(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1\mid\lambda_2))}\right],$$

$$0<z_1<z_2. \tag{1}$$

С учётом определения модулированного MAP-потока введём вероятность $p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_1)+o(\Delta\tau)$ − совместную вероятность того, что без наступления событий потока на интервале $(0,\tau)$ процесс $\lambda(\tau)$ перешёл на этом интервале из первого состояния в первое и на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$ произошло окончание первого состояния процесса $\lambda(\tau)$, и процесс $\lambda(\tau)$ на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$ перешёл из первого состояния в первое с наступлением события потока. Аналогичные совместные вероятности примут вид

$$p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_2)+o(\Delta\tau);\quad p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_2)+o(\Delta\tau);$$
$$p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_1)+o(\Delta\tau);\quad p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_1)+o(\Delta\tau);$$
$$p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1|\lambda_2)+o(\Delta\tau);\quad p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_2)+o(\Delta\tau);$$
$$p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2|\lambda_1)+o(\Delta\tau).$$

Тогда соответствующие плотности вероятностей запишутся в виде

$$\tilde p_{11}^{(1)}(\tau)=\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{11}(\tau);\quad \tilde p_{11}^{(2)}(\tau)=\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau);$$
$$\tilde p_{12}^{(1)}(\tau)=\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{12}(\tau);\quad \tilde p_{12}^{(2)}(\tau)=\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau);$$
$$\tilde p_{21}^{(1)}(\tau)=\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{21}(\tau);\quad \tilde p_{21}^{(2)}(\tau)=\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau);$$
$$\tilde p_{22}^{(1)}(\tau)=\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{22}(\tau);\quad \tilde p_{22}^{(2)}(\tau)=\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau).$$

Очевидно, что плотности вероятностей $\tilde p_{ij}(\tau)$ того, что без наступления событий потока на интервале $(0,\tau)$ и наступления события в момент τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдёт на этом интервале из состояния i в состояние j ($i, j = 1, 2$), запишутся в виде

$$\tilde p_{11}(\tau)=\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{11}(\tau)+\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{12}(\tau);$$
$$\tilde p_{12}(\tau)=\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{12}(\tau)+\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{11}(\tau);$$
$$\tilde p_{21}(\tau)=\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)p_{21}(\tau)+\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)p_{22}(\tau);$$
$$\tilde p_{22}(\tau)=\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)p_{22}(\tau)+\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)p_{21}(\tau). \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), получаем выражения для плотностей вероятностей $\tilde p_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в явном виде.

Так как τ − произвольный момент времени, то вероятности p_{ij} − вероятности перехода процесса $\lambda(\tau)$ из состояния i в состояние j ($i, j = 1, 2$) за время, которое пройдёт от момента $\tau = 0$ до момента наступления очередного события потока, определятся в виде

$$p_{11}=\int_0^\infty \tilde{p}_{11}(\tau)d\tau=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\int_0^\infty p_{12}(\tau)d\tau;$$
$$p_{12}=\int_0^\infty \tilde{p}_{12}(\tau)d\tau=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\int_0^\infty p_{12}(\tau)d\tau+\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau;$$
$$p_{21}=\int_0^\infty \tilde{p}_{21}(\tau)d\tau=\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau;$$
$$p_{22}=\int_0^\infty \tilde{p}_{22}(\tau)d\tau=\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau+\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau. \qquad (3)$$

Подставляя (1) в (3), находим

$$p_{11}=(z_1z_2)^{-1}\left[\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\right];$$
$$p_{12}=(z_1z_2)^{-1}\left[\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\right];$$
$$p_{21}=(z_1z_2)^{-1}\left[\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))\right];$$
$$p_{22}=(z_1z_2)^{-1}\left[\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))\right];$$
$$z_1z_2=(\lambda_1+\alpha_1)(\lambda_2+\alpha_2)-(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2)). \qquad (4)$$

Введём в рассмотрение вероятность $\pi_i(0)$ − условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1, 2$ ($\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$). Тогда, так как $\{\lambda(t_k)\}$ есть вложенная цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0)$ справедливы следующие уравнения

$$\pi_1(0)=p_{11}\pi_1(0)+p_{21}\pi_2(0), \qquad \pi_2(0)=p_{12}\pi_1(0)+p_{22}\pi_2(0), \qquad (5)$$

где переходные вероятности p_{ij} ($i, j = 1, 2$) определены формулами (4).

Подставляя (4) в (5), получаем

$$\pi_1(0)=\{\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))\}\{\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+$$
$$+\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\}^{-1},$$

$$\pi_2(0)=\{\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\}\{\lambda_1P_1(\lambda_2|\lambda_1)(\lambda_2+\alpha_2)+$$
$$+\lambda_2P_1(\lambda_1|\lambda_2)(\lambda_1+\alpha_1)+\lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2))+\lambda_2P_1(\lambda_2|\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1))\}^{-1}. \qquad (6)$$

Плотность вероятностей $p(\tau)$ длительности интервала между соседними событиями в модулированном MAP-потоке примет вид

$$p(\tau)=\sum_{i=1}^{2}\pi_i(0)\sum_{j=1}^{2}\tilde{p}_{ij}(\tau), \quad \tau\ge 0. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) сначала (2), затем (1) и (6) и проделывая достаточно трудоёмкие преобразования, получаем явный вид плотности вероятностей $p(\tau)$:

$$p(\tau)=\gamma z_1e^{-z_1\tau}+(1-\gamma)z_2e^{-z_2\tau}, \quad \tau\ge 0,$$
$$\gamma=\frac{1}{z_2-z_1}\{z_2-\lambda_1\pi_1(0)[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)]-\lambda_2\pi_2(0)[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)]\}, \qquad (8)$$

где z_1 и z_2 определены в (1); $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$ определены в (6). Положив в z_1 и z_2 параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получаем плотность вероятностей $p(\tau)$ для MAP-потока [4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют тем или иным статистическим методом решить задачу оценивания параметров модулированного MAP-потока событий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kingman, J. F. C.* On doubly stochastic Poisson process / J. F. C. Kingman // Proc. of Cambridge Phylosophical Society. 1964. V. 60. № 4. P. 923–930.

2. *Нежельская, Л. А.* О связи MC-потоков и MAP-потоков событий / А. М. Горцев, Л. А. Нежельская // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 13–21.

3. *Дудин, А. Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок. Мн. : Изд-во БГУ, 2000. 175 с.

4. *Горцев, А. М.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов MAP-потока событий и условия его рекуррентности / А. М. Горцев, А. А. Соловьёв // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3 (20). С. 32–41.