

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И ИХ ПОТЕРЕЙ В ПУСТОЙ СИСТЕМЕ

А. А. Назаров, Н. М. Феропонтова

Томский государственный университет

Томск, Россия

E-mail: feropontova.natalia@gmail.com

В работе рассматривается бесконечнолинейная система массового обслуживания с отрицательными заявками и их потерей в пустой системе. Получено стационарное распределение числа положительных заявок в системе. Показано, что в условиях неограниченного роста интенсивностей входящих потоков стационарное распределение можно аппроксимировать геометрическим и гауссовским распределением в зависимости от значений параметров системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, отрицательные заявки, метод асимптотического анализа.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступают два потока: простейший поток положительных заявок с параметром λ^+ и простейший поток отрицательных заявок с параметром γ^- . Любая положительная заявка, приходящая в систему, сразу начинает обслуживание, выбирая любой из свободных приборов. Отрицательная заявка, приходящая в непустую систему, «убивает» любую положительную заявку, находящуюся в процессе обслуживания, и обе покидают систему. Отрицательная заявка, приходящая в пустую систему, покидает её, не вставая на обслуживающий прибор.

Пусть $i(t)$ – число положительных заявок в системе в момент времени t . В работе выполнено исследование этого случайного процесса.

1. ДОПРЕДЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Рассмотрим (рис. 1) указанную систему обслуживания.

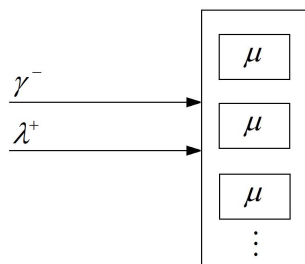


Рис. 1. Бесконечнолинейная СМО с отрицательными заявками

Так как процесс $i(t)$ является цепью Маркова, то распределение вероятностей

$$P_i(t) = P\{i(t) = i\}, \quad i = \overline{0, \infty},$$

в стационарном режиме $P_i(t) = P_i$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} -\lambda^+ P_0(t) + (\mu + \gamma^-) P_1(t) = 0, \\ \lambda^+ P_{i-1}(t) - (\lambda^+ + i\mu + \gamma^-) P_i(t) + [(i+1)\mu + \gamma^-] P_{i+1}(t) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что её решение имеет вид

$$P_i = P_0 \prod_{n=1}^i \frac{\lambda^+}{n\mu + \gamma^-}. \quad (1)$$

Из условия нормировки найдем вид начального распределения P_0 :

$$P_0 = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^i \frac{\lambda^+}{n\mu + \gamma^-} \right)^{-1}.$$

Таким образом, найдено стационарное распределение числа положительных заявок в рассматриваемой системе, представленное формулой (1).

Так как для более сложных математических моделей таких систем нахождение распределения вероятностей $P(i)$ вызывает определенные проблемы, то в этом случае целесообразно применить метод асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока. Метод реализуем для рассматриваемой марковской системы обслуживания, а также найдем область его применимости.

2. МЕТОД АССИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Введем характеристическую функцию

$$H(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_i} P_i, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Умножив все уравнения системы (1) на e^{ju_i} , просуммировав по всем i и преобразовав полученное выражение, получим:

$$j\mu H'(u) - H(u)(\gamma^- - \lambda^+ e^{ju}) = -\gamma^- P_0. \quad (2)$$

Теперь в условиях высокоинтенсивных входящих потоков исследуем нашу систему методом асимптотического анализа.

Предельное условие высокой интенсивности входящих потоков определим равенствами

$$\lambda^+ = \lambda N, \quad \gamma^- = \gamma N,$$

где λ, γ – некоторые конечные величины, а $N \rightarrow \infty$, тогда систему (2) перепишем в виде

$$j \frac{\mu}{N} H'(u) - H(u)(\gamma - \lambda e^{ju}) = -\gamma P_0. \quad (3)$$

Будем полагать, что выполнено неравенство

$$\lambda < \gamma, \quad (4)$$

тогда при $N \rightarrow \infty$ решение $H(u)$ системы (3) имеет вид

$$H(u) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - \lambda e^{ju}}.$$

Так как $H(0) = 1$, то

$$\gamma P_0 = \gamma - \lambda,$$

поэтому $H(u)$ имеет вид характеристической функции геометрического распределения

$$P(i) = (1 - \rho)(\rho)^i \quad (5)$$

с параметром $\rho = \frac{\lambda}{\gamma}$.

3. МЕТОД АССИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Геометрическая аппроксимация получена для достаточно больших значений N и при выполнении условия $\lambda < \gamma$.

Далее рассмотрим применение метода асимптотического анализа в предельном условии $N \rightarrow \infty$ и при других соотношениях между λ и γ , в частности при $\lambda \geq \gamma$.

Обозначим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u) = F(w, \varepsilon), \quad P_0 = \varepsilon \pi(\varepsilon)$$

и с учетом введенных обозначений перепишем уравнение (3):

$$j\mu \frac{\partial F(w, \varepsilon)}{\partial w} - F(w, \varepsilon)(\gamma - \lambda e^{jw\varepsilon}) = -\varepsilon \gamma \pi(\varepsilon).$$

Отсюда, устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим уравнение для функции $F(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(w, \varepsilon)$,

$$j\mu F'(w) = F(w)(\gamma - \lambda),$$

решение которого имеет вид

$$F(w, \varepsilon) = \exp\left\{jw \frac{\lambda - \gamma}{\mu}\right\}, \quad (6)$$

что является формулой для характеристической функции детерминированной величины $\frac{\lambda - \gamma}{\mu}$.

Запишем характеристическую функцию $H(u)$ в виде

$$H(u) = H_2(u) \exp\left\{juN \frac{\lambda - \gamma}{\mu}\right\},$$

подставляя которую в (3), получим

$$j \frac{\mu}{N} H_2'(u) - \lambda H_2(u)(1 - e^{ju}) = -\gamma P_0 \exp\left\{-juN \frac{\lambda - \gamma}{\mu}\right\}. \quad (7)$$

Обозначим

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u) = F_2(w, \varepsilon), \quad P_0 = \varepsilon^2 \pi_2(\varepsilon).$$

Тогда уравнение (7) перепишется в виде

$$j\mu\varepsilon \frac{\partial F_2(w, \varepsilon)}{\partial w} - \lambda F_2(w, \varepsilon)(1 - e^{jw\varepsilon}) = -\gamma\varepsilon^2 \pi_2(\varepsilon) \exp\left\{-j \frac{w}{\varepsilon} \frac{\lambda - \gamma}{\mu}\right\}.$$

Поделим левую и правую части этого уравнения на ε и, полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получим уравнение

$$\mu F_2'(w) + \lambda F_2(w)w = 0,$$

решение $F_2(w)$ которого имеет вид

$$F_2(w) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu} \frac{w^2}{2}\right\},$$

или

$$H_2(u) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu} N \frac{u^2}{2}\right\}.$$

Теперь характеристическая функция $H(u)$ принимает вид

$$H(u) = \exp\left\{juN \frac{\lambda - \gamma}{\mu} - \frac{u^2}{2} \frac{\lambda}{\mu} N\right\}. \quad (8)$$

Функция (8) является характеристической функцией гауссовского распределения с математическим ожиданием $N \frac{\lambda - \gamma}{\mu}$ и дисперсией $N \frac{\lambda}{\mu}$. Следовательно, мы можем записать гауссовскую аппроксимацию для распределения вероятностей $P(i)$

$$P(i) = C \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\lambda}{\mu} N}} \exp\left\{-\frac{\left(i - N \frac{\lambda - \gamma}{\mu}\right)^2}{2 \frac{\lambda}{\mu} N}\right\}.$$

Стоит заметить, что ограничений на параметры для последнего случая не налагается в отличие от случая геометрической аппроксимации. И на этапе численного моделирования будет выявлена зависимость между выбираемой для аппроксимации модели и параметрами системы.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АППРОКСИМАЦИЙ

Для оценки качества полученных аппроксимаций, а именно для сравнения с допредельным распределением геометрической и гауссовской аппроксимаций воспользуемся расстоянием Колмогорова, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_{1,2} = \max_{0 < i < \infty} \left| \sum_{n=0}^i (P_n - P_n^{1,2}) \right|,$$

где P_n^1 – геометрическая аппроксимация, P_n^2 – гауссовская аппроксимация, а P_n – допредельное распределение.

Геометрическая аппроксимация.

Данная асимптотика применима в случае $\lambda < \gamma$, и ниже приведена таблица 1 расстояний Колмогорова между геометрическим распределением и допредельным распределением для одинаковых значений параметров. Величина N , несущая в себе смысл увеличения интенсивности входящего потока, в приведенной таблице изменяется по вертикали. Величина отношений параметров входящих потоков положительных и отрицательных заявок изменяется по горизонтали.

Таблица 1

$N \backslash \lambda/\gamma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
10	0,0011	0,0048	0,012	0,023	0,047	0,086	0,152	0,265	0,477	0,659
20	0,0006	0,0025	0,006	0,013	0,027	0,051	0,099	0,191	0,390	0,587
30	0,0004	0,0016	0,004	0,009	0,019	0,037	0,074	0,152	0,339	0,539
40	0,0003	0,0012	0,003	0,007	0,014	0,029	0,059	0,128	0,302	0,503
50	0,0002	0,0010	0,003	0,005	0,012	0,024	0,050	0,111	0,276	0,474
100	0,0001	0,0005	0,001	0,003	0,006	0,013	0,028	0,068	0,197	0,383

В таблице выделена область значений параметров, в которой расстояния Колмогорова $\Delta_1 \leq 0,03$.

На рисунках 2 и 3 представлены графики допредельного и геометрического распределений для параметров из областей, где расстояние Колмогорова меньше и больше 0,03.

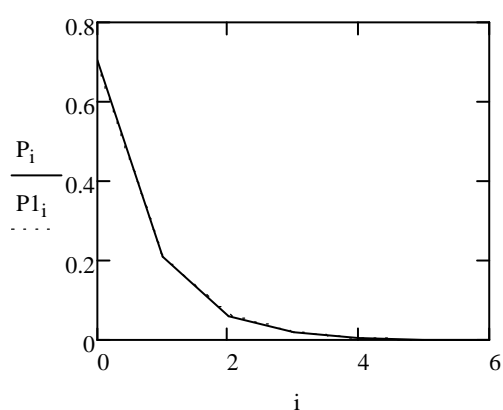


Рис. 2. Графики допредельного и геом. распределений с $\frac{\lambda}{\gamma} = 0,3$ и $N = 30$

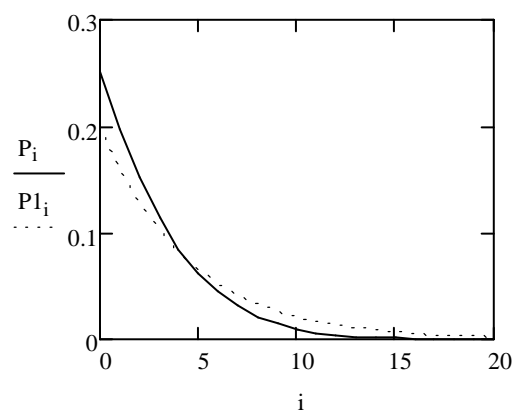


Рис. 3. Графики допредельного и геом. распределений с $\frac{\lambda}{\gamma} = 0,8$ и $N = 30$

Приведенные примеры демонстрируют сформулированные выводы о применимости данной аппроксимации в конкретных областях параметров.

Гауссовская аппроксимация.

Данная аппроксимация возможна для всех значений параметров. В таблице 2 также указаны расстояния Колмогорова для разных случаев аналогично таблице 1. В ней выделена область, в которой $\Delta_2 \leq 0,03$, а именно область значений параметров $\frac{\lambda}{\gamma} \geq 0,85$.

Гауссовская аппроксимация нецелесообразна при $\frac{\lambda}{\gamma} < 0,8$.

Аналогично случаю геометрической аппроксимации на рисунках 4 и 5 представлены графики допредельного и гауссовского распределений для параметров из областей, где расстояние Колмогорова меньше и больше 0,03.

Таблица 2

$N \backslash \lambda/\gamma$	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	1	1,2	1,5
10	0,040	0,032	0,026	0,022	0,019	0,018	0,019	0,027
20	0,038	0,030	0,023	0,017	0,015	0,014	0,016	0,020
30	0,038	0,029	0,021	0,015	0,012	0,012	0,015	0,016
40	0,038	0,028	0,020	0,014	0,011	0,010	0,013	0,013
50	0,039	0,028	0,020	0,013	0,010	0,009	0,012	0,011
100	0,040	0,029	0,019	0,011	0,007	0,007	0,009	0,007

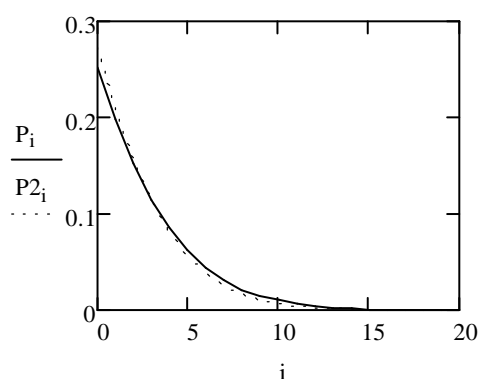


Рис. 4. Графики допредельного и норм. распределений с $\frac{\lambda}{\gamma} = 0,8$ и $N = 30$

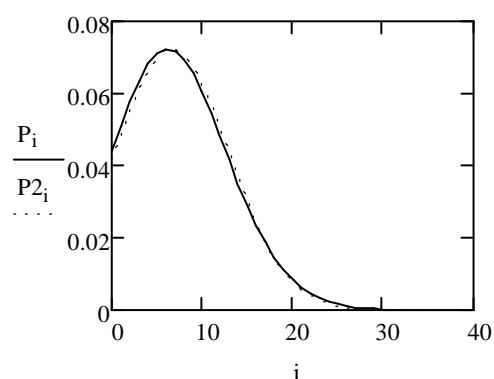


Рис. 5. Графики допредельного и норм. распределений с $\frac{\lambda}{\gamma} = 1,2$ и $N = 30$

Как видно из Таблиц 1, 2, полученные в предельном условии геометрическая и гауссовская аппроксимации охватывают практически весь спектр значений параметров λ и γ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе было проведено исследование бесконечнолинейной СМО с отрицательными заявками, интенсивности и обслуживание в которой имеют пуассоновское распределение. Найдено стационарное распределение числа заявок, также получены асимптотические результаты – геометрическая и гауссовская аппроксимации, применимые для разных значений параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров, А. А. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. 2-е изд., испр. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск : Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.
2. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.