О БЕЗАРБИТРАЖНЫХ МОДЕЛЯХ ДОХОДНОСТИ НЕЛЬСОНА – СИГЕЛЯ – СВЕНССОНА

Г. А. Медведев

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: MedvedevGA@Cosmostv.by

Показано, что требование выполнения условий отсутствия арбитража уточняет модель Нельсона – Сигеля – Свенссона в том смысле, что придает коэффициентам этой модели явный экономический смысл: свободный коэффициент должен быть функцией срока до погашения, а остальные коэффициенты должны зависеть от переменных состояния рынка, которые, в свою очередь, являются выборочными значениями случайных процессов в момент времени, для которого конструируется временная структура. Показано, что сама модель является представителем семейства аффинных моделей доходности и порождается двухмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля или четырехмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля – Свенссона.

Ключевые слова: временная структура, кривая доходности, факторная модель, аффинные безарбитражные модели, модели доходности Нельсона – Сигеля.

Временная структура процентных ставок доходности является одной из наиболее востребованных характеристик финансовых активов. При математическом моделировании временной структуры чаще всего используются безарбитражные аффинные модели, поскольку они подразумевают возможность получения решений в аналитическом виде. Для получения модели временной структуры обычно исходят от описания того, как эволюционирует состояние финансового рынка. Чаще всего принимается, что состояние рынка – это случайный процесс диффузионного типа.

Будем считать, что для n-факторной модели аффинной доходности предполагается, что вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t))\, dt + \sigma(X(t))\, dW(t) \tag{1}$$

с n-вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n\times m)$-матрицей волатильности $\sigma(x)$, и m-вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов.

В однофакторной модели за состояние рынка принимается краткосрочная процентная ставка $r(t)$, эволюционирующая как случайный процесс, обладающий свойством возвращения к стационарному среднему θ. В этом случае имеется три основных подхода для описания случайного процесса краткосрочных процентных ставок, разработанные американскими авторами:

1) модель Васичека [1], когда волатильность ставки $\sigma = \sqrt{2kD}$ – детерминированная константа (D – стационарная дисперсия процесса $r(t)$)

$$dr(t) = k\,(\theta - r(t))\,dt + \sqrt{2kD}\,dW(t); \tag{2}$$

2) модель CIR [2], в которой волатильность ставки – неотрицательный случайный процесс, пропорциональный квадратному корню процентной ставки

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{\frac{2kD}{\theta} r(t)}\,dW(t), \;\; r(0) > 0; \tag{3}$$

3) модель Даффи – Кана [3], в рамках которой волатильность процентной ставки – случайная, пропорциональная превышению процентной ставки над своей нижней (недостижимой) границей $r_{\inf}$:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sqrt{\frac{2kD}{\theta - r_{\inf}}(r(t) - r_{\inf})}\,dW(t), \quad r(0) > r_{\inf}. \tag{4}$$

Вообще говоря, модель Даффи – Кана более общая модель, по сравнению с первыми двумя, так как при нулевой нижней границе процентной ставки она превращается в модель CIR, а при удалении нижней границы процентной ставки на минус бесконечность (т.е. при $r_{\inf} \to -\infty$) модель становится моделью Васичека.

Временная структура процентных ставок доходности определяется как зависимость процентной ставки доходности (или цены) бескупонной облигации в некоторый текущий момент времени t от срока до погашения этой облигации.

Для моделей (2) – (4) цена бескупонной облигации $P(t, r; T)$ с датой погашения T при условии, что в момент t краткосрочная процентная ставка $r(t)$ приняла значение r, т.е. $r(t) = r$, вычисляется по формуле

$$P(t, r; T) \equiv P(t, r; t + \tau) = P(T, r; T)\,\exp\{A(\tau) - r\,B(\tau)\}, \tag{5}$$

где $\tau = T - t$ – срок до погашения облигации, обычно предполагается, что $P(T, r; T) = 1$, что не ограничивает общности анализа. Функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ обычно называются функциями временной структуры. При получении формулы (5) были учтены условия отсутствия арбитража. Для такой функции цены доходность до погашения (или просто доходность) $y(\tau, r)$ является аффинной функцией r и вычисляется формулой

$$y(\tau, r) = \frac{-\ln P(t, r; T)}{T - t} = \frac{rB(\tau) - A(\tau)}{\tau}. \tag{6}$$

Функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ вычисляются в явном аналитическом виде, хотя для их получения необходимо решать дифференциальные уравнения Риккати. Зависимость $y(\tau, r)$ от τ и определяет временную структуру доходности.

Доходность до погашения $y(\tau, r)$ – это *средняя* характеристика за временной период длительностью τ. В то же самое время практиков интересует вопрос, какой будет *краткосрочная* ставка доходности в конце этого периода. Такую ставку называют мгновенной форвардной ставкой $f(\tau, r)$ и она функционально связана с доходностью до погашения $y(\tau, r)$ соотношениями

$$y(\tau, r) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(s, r)ds, \quad f(\tau, r) = y(\tau, r) + \tau\frac{\partial y(\tau, r)}{\partial \tau}. \tag{7}$$

В рамках безарбитражных аффинных моделей форвардная ставка $f(\tau, r)$ вычисляется по формуле

$$f(\tau, r) = \frac{-\partial \ln P(t, r; T)}{\partial T} = r\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}. \tag{8}$$

Обычно аналитические свойства функции $f(\tau, r)$ оказываются более простыми, чем свойства $y(\tau, r)$. Обе эти функции – кривая доходности $y(\tau, r)$ и форвардная кривая $f(\tau, r)$ одинаково интересны для финансовых аналитиков.

Оказывается, что в зависимости от состояния рынка (для однофакторной модели это значения r) функция $y(\tau, r)$ может принадлежать только к одному из четырех типов кривых: монотонно возрастающая до некоторого конечного предельного значения («нормальная» кривая доходности), монотонно убывающая до некоторого конечного предельного значения («перевернутая» кривая доходности), кривая доходности с максимумом («сгорбленная» (*humped*) кривая), плоская кривая доходности (*flat yield curve*).

Такая классификация кривых подтверждается на реальных финансовых рынках. Вместе с тем реальные рыночные доходности, хотя и имеют такой функциональный вид, но по величине часто довольно сильно отличаются от получаемых на основе приведенных моделей. Поэтому существуют разнообразные модификации описанных выше моделей, в частности считается, что увеличение размерности, т.е. переход к двухфакторным, трехфакторным и т.д. моделям, может повысить их точность описания рыночных доходностей. В многомерном случае, когда состояние финансового рынка определяется вектором $X(t)$, эволюция которого описывается диффузионным процессом (1), формулы (6) и (8) для кривой доходности и форвардной кривой преобразуются к виду

$$y(\tau, r) = \frac{xB(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, r) = x\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}, \tag{9}$$

при условии, что в момент t вектор состояния финансового рынка $X(t)$ оказался равным x, т.е. $X(t) = x$; в этом случае $B(\tau)$ – вектор, а $A(\tau)$ остается скалярной функцией.

Однако увеличение размерности существенно увеличивает количество параметров моделей, но точность моделей увеличивает слабо.

В связи с этим появился другой способ усовершенствования модели временной структуры доходности, основанный на небольшом разнообразии типов кривых доходности. Поскольку их всего четыре, возникла идея – ввести несколько эталонных функциональных зависимостей и из них строить комбинации, аппроксимирующие кривые доходности. Нельсон и Сигель [4] предложили в качестве таких эталонных функций для конструирования форвардной кривой три простых функции: $\alpha_1(\tau) = 1$, $\alpha_2(\tau) = \exp(-\gamma\tau)$, $\alpha_3(\tau) = \gamma\tau\exp(-\gamma\tau)$. Функция $\alpha_1(\tau)$ предназначалась для аппроксимации долгосрочного участка кривой, функция $\alpha_2(\tau)$ – для аппроксимации краткосрочного участка и функция $\alpha_3(\tau)$ должна была аппроксимировать среднесрочные доходности. Использование такого подхода приводит к следующему результату

$$f(\tau, r) = \beta_1 + \beta_2 \exp(-\gamma\tau) + \beta_3 \gamma\tau \exp(-\gamma\tau). \tag{10}$$

Как видно, функция $f(\tau, r)$ определяется очень просто, но для ее окончательной идентификации необходимо найти четыре параметра $\gamma > 0$, $\beta_1 > 0$, β_2 и β_3. С помощью соотношений (7) легко получить и функцию $y(\tau, r)$ в виде

$$y(\tau, r) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau} \right). \tag{11}$$

Чтобы увеличить гибкость и улучшить приспособляемость модели к эмпирическим данным, Свенссон [5] добавил к трем эталонным функциям Нельсона – Сигеля четвертую функцию $\alpha_5(\tau) = \delta\tau\exp(-\delta\tau)$, $\delta > 0$, такую же как и $\alpha_3(\tau)$, но с другим параметром $\delta \neq \gamma$. Так что

$$f(\tau, r) = \beta_1 + \beta_2 \exp(-\gamma\tau) + \beta_3 \gamma\tau \exp(-\gamma\tau) + \beta_4 \exp(-\delta\tau) + \beta_5 \delta\tau \exp(-\delta\tau), \tag{12}$$

и число параметров модели увеличилось на два и достигло шести. В равенстве (12) для общности введена еще одна функция $\alpha_4(\tau) = \exp(-\delta\tau)$, но если положить $\beta_4 = 0$, получится представление Свенссона.

В июне 1996 года в Банке международных расчетов (БМР, Базель) было принято соглашение, чтобы центральные банки Европы представляли свои данные в БМР для расчетов бескупонных кривых доходности и оценки параметров моделей. Выяснилось, что большинство банков Европы используют для моделирования кривых доходности подход Нельсона – Сигеля (Италия и Финляндия) или его модификацию Свенссона (Бельгия, Германия, Испания, Норвегия, Франция, Швейцария и Швеция) [6]. Это, в частности, подчеркивает важность анализа этого подхода.

К сожалению, подход Нельсона – Сигеля – Свенссона (NSS) не дает рекомендаций, как определять параметры модели и никак не объясняет, является ли такая модель безарбитражной. Имеет смысл модифицировать эту модель с целью ввести ее в класс безарбитражных, заметим вначале, что аффинные безарбитражные доходности (6), (8) и (9) обладают следующими общими предельными свойствами [7]:

$$\lim_{\tau\to 0} y_{БА}(\tau, r) = \lim_{\tau\to 0} f_{БА}(\tau, r) = x^{\mathrm{T}}\phi = r, \quad \lim_{\tau\to\infty} y_{БА}(\tau, r) = \lim_{\tau\to\infty} f_{БА}(\tau, r) = y_\infty.$$

Здесь обозначено $B'(0) = \phi$, y_∞ – предельная долгосрочная доходность, определяемая только параметрами модели и не зависящая от состояния рынка x. Поскольку это общие свойства доходности, ими должны обладать и доходности модели Нельсона – Сигеля (NS):

$$\lim_{\tau\to 0} y_{NS}(\tau, r) = \lim_{\tau\to 0} f_{NS}(\tau, r) = \beta_1 + \beta_2, \quad \lim_{\tau\to\infty} y_{NS}(\tau, r) = \lim_{\tau\to\infty} f_{NS}(\tau, r) = \beta_1.$$

Таким образом, смысл параметров β_1 и β_2 в модели Нельсона – Сигеля проясняется: $\beta_1 = y_\infty$, $\beta_2 = r - y_\infty$. Вообще говоря, второе равенство противоречит общепринятому представлению о кривой доходности, так как по смыслу при $\tau \to 0$ доходность ценных бумаг должна стремиться к краткосрочной ставке r.

Сравнивая (10) – (12) с (9), можно заключить, что доходности модели NSS аналогичны аффинным безарбитражным доходностям в случае четырехфакторной модели, когда состояние рынка описывается четырехмерным вектором $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t))$. В этом случае можно считать, что состояние рынка описывается вектором ($X_1(t) = \beta_2$, $X_2(t) = \beta_3$, $X_3(t) = \beta_4$, $X_4(t) = \beta_5$), и следующим образом сопоставить детали этих моделей:

$$\beta_1\alpha_1(\tau) \leftrightarrow -\frac{dA(\tau)}{d\tau},\ \alpha_2(\tau) \leftrightarrow \frac{dB_1(\tau)}{d\tau},\ \alpha_3(\tau) \leftrightarrow \frac{dB_2(\tau)}{d\tau},\ \alpha_4(\tau) \leftrightarrow \frac{dB_3(\tau)}{d\tau},\ \alpha_5(\tau) \leftrightarrow \frac{dB_4(\tau)}{d\tau}.$$

Это означает, что параметры β_2, β_3, β_4 и β_5 не являются константами, а являются значениями случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, $X_4(t)$ в момент времени t, для которого определяется временная структура. Функция $\beta_1\alpha_1(\tau)$ тоже не константа, а детерминированная функция τ.

Стохастическое дифференциальное уравнение для $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t))$ имеет вид (1). Чтобы остаться в рамках аффинной структуры, компоненты уравнения (1) должны быть определены следующим образом [8]:

$$\mu(x) = K(\theta - x),\ \ \sigma(x)\sigma(x)^{\mathrm{T}} = \alpha + \sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i,\ \ \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^{4}\eta_i x_i. \qquad (13)$$

Здесь K, α и β_i – (4×4)-матрицы; θ, ξ и η_i – 4-вектора, x_i – компоненты вектора x, функция $\lambda(x)$ определяет рыночную цену риска. Это приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $A(\tau)$ и составляющих вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), B_3(\tau), B_4(\tau))$:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^{\mathrm{T}} B(\tau) + B(\tau)^{\mathrm{T}} \alpha\, B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \tag{14}$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^{\mathrm{T}} (\eta_i + K_i) - B(\tau)^{\mathrm{T}} \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \tag{15}$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i-й столбец матрицы K, $1 \le i \le 4$.

Для того чтобы модель NSS была также аффинной безарбитражной моделью, решения уравнений (15) $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$, $B_3(\tau)$, $B_4(\tau)$ должны быть соответствующим образом согласованы с функциями $\alpha_2(\tau)$, $\alpha_3(\tau)$, $\alpha_4(\tau)$, $\alpha_5(\tau)$.

По определению функции $\alpha_2(\tau)$, $\alpha_3(\tau)$, $\alpha_4(\tau)$, $\alpha_5(\tau)$ представляют из себя либо экспоненты, либо их комбинации. Такие решения уравнения (15) могут быть только тогда, когда уравнения (15) являются линейными. Следовательно, нелинейные слагаемые в уравнениях (15) должны отсутствовать, т.е. $\beta_i = 0$, $1 \le i \le 4$. А это означает, что согласно представлению (13) матрица волатильности $\sigma(x)$ не должна зависеть от состояний рынка x, т.е. волатильности должны быть детерминированными константами. Отсюда также следует, что функция рыночной цены риска $\lambda(x)$ должна быть вектором, состоящим из констант, т.е. согласно представлению (13) $\eta_i = 0$, $1 \le i \le 4$. Все это значительно упрощает задачу определения вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), B_3(\tau), B_4(\tau))$, так как вместо уравнений (15) получается линейная система дифференциальных уравнений

$$B'(\tau) = \phi - K^{\mathrm{T}} B(\tau), \quad B(0) = 0. \tag{16}$$

Определим матрицу K в виде

$$K = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Тогда решение системы (16) будет следующим

$$B_1(\tau) = \phi_1 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma}, \quad B_2(\tau) = (\phi_1 + \phi_2) \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \phi_1 \tau e^{-\gamma\tau}, \tag{18}$$

$$B_3(\tau) = \phi_3 \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta}, \quad B_4(\tau) = (\phi_3 + \phi_4) \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta} - \phi_3 \tau e^{-\delta\tau}.$$

Это означает, что безарбитражные кривые доходности $y_{\text{БА}}(\tau, r)$ и $f_{\text{БА}}(\tau, r)$ согласно соотношениям (9) определяются формулами

$$y_{\text{БА}}(\tau, r) = x_1\phi_1 \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + x_2(\phi_1 + \phi_2) \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - x_2\phi_1 e^{-\gamma\tau} +$$

$$+ x_3\phi_3 \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} + x_4(\phi_3 + \phi_4) \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - x_4\phi_3 e^{-\delta\tau} - \frac{A(\tau)}{\tau} =$$

$$= (x_1\phi_1 + x_2(\phi_1 + \phi_2)) \frac{1 - e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - x_2\phi_1 e^{-\gamma\tau} + (x_3\phi_3 + x_4(\phi_3 + \phi_4)) \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta\tau} - x_4\phi_3 e^{-\delta\tau} - \frac{A(\tau)}{\tau}. \tag{19}$$

$$f_{\text{БА}}(\tau, r) = x_1\phi_1 e^{-\gamma\tau} + x_2\phi_2 e^{-\gamma\tau} + x_2\phi_1\gamma\tau e^{-\gamma\tau} + x_3\phi_3 e^{-\delta\tau} + x_4\phi_4 e^{-\delta\tau} + x_4\phi_3\delta\tau e^{-\delta\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} =$$

$$= (x_1\phi_1 + x_2\phi_2) e^{-\gamma\tau} + x_2\phi_1 \gamma\tau e^{-\gamma\tau} + (x_3\phi_3 + x_4\phi_4) e^{-\delta\tau} + x_4\phi_3\delta\tau e^{-\delta\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}. \tag{20}$$

В этих выражениях функция $A(\tau)$ в явном виде не представлена, так как она имеет громоздкий вид, хотя ее вычисление по формуле (14) не представляет труда, когда функции

$\{B_i(\tau)\}$ определены, поскольку формула (14) не является уравнением, а для определения $A(\tau)$ достаточно проинтегрировать правую часть равенства (14).

Заметим, что предельные значения функций $\{B_i(\tau)\}$ при $\tau \to \infty$ конечны:

$$\lim_{\tau\to\infty} B_1(\tau) = \phi_1/\gamma,\quad \lim_{\tau\to\infty} B_2(\tau) = (\phi_1 + \phi_2)/\gamma,\quad \lim_{\tau\to\infty} B_3(\tau) = \phi_3/\delta,\quad \lim_{\tau\to\infty} B_4(\tau) = (\phi_3 + \phi_4)/\delta.$$

Это позволяет с помощью (9) и (14) найти предельные долгосрочные доходности в явной форме

$$y_\infty = \lim_{\tau\to\infty} y_{\text{БА}}(\tau, r) = \lim_{\tau\to\infty} f_{\text{БА}}(\tau, r) = -\lim_{\tau\to\infty} \frac{dA(\tau)}{d\tau} = (\sigma\lambda - K\theta)^{\mathrm{T}} B(\infty) + B(\infty)^{\mathrm{T}}\sigma\sigma^{\mathrm{T}} B(\infty)/2.$$

Напомним, что компоненты вектора ϕ определяют весовые коэффициенты влияния компонент вектора состояния рынка $X(t)$ на величину доходности (через краткосрочную ставку r). Если $\phi_3 = \phi_4 = 0$, компоненты $X_3(t)$ и $X_4(t)$ не влияют на доходность, и рассмотренная модель NSS превращается в обычную модель Нельсона – Сигеля (NS). Аффинная безарбитражная модель в этом случае предусматривает представления

$$f_{\text{БА}}(\tau, r) = -\frac{dA(\tau)}{d\tau} + (x_1\phi_1 + x_2\phi_2)\, e^{-\gamma\tau} + x_2\, \phi_1\gamma\tau\, e^{-\gamma\tau}. \tag{21}$$

$$y_{\text{БА}}(\tau, r) = -\frac{A(\tau)}{\tau} + (x_1\phi_1 + x_2(\phi_1 + \phi_2))\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - x_2\phi_1 e^{-\gamma\tau} =$$

$$= -\frac{A(\tau)}{\tau} + (x_1\phi_1 + x_2\phi_2)\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} + x_2\phi_1\left(\frac{1-e^{-\gamma\tau}}{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}\right). \tag{22}$$

Сравнение представлений (10) с (21) и (11) с (22) показывает, что безарбитражная модель Нельсона – Сигеля является обычной аффинной безарбитражной моделью, коэффициенты β_1, β_2, β_3 которой определяются следующим образом

$$\beta_1 = -\frac{dA(\tau)}{d\tau},\quad \beta_2 = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 = r,\quad \beta_3 = x_2\phi_1. \tag{23}$$

В отличие от определения этих коэффициентов Нельсоном и Сигелем β_1, β_2 и β_3 не являются константами: β_1 – функция τ, а β_2 и β_3 – функции переменных состояния рынка $x_1 = X_1(t)$ и $x_2 = X_2(t)$ в момент t, для которого конструируется временная структура, и поэтому являются, по существу, реализациями случайных величин. Заметим, что по определению коэффициент β_2 равен значению краткосрочной процентной ставки в указанный момент t, $\beta_2 = r(t) = r$. Поскольку для получения аффинной безарбитражной модели NS в уравнении (1) функция дрейфа $\mu(x)$ должна быть линейной относительно x, а матрица волатильности $\sigma(x)$ – постоянной (не зависящей от x), то уравнение (1) порождает случайный процесс с нормальным распределением, так что коэффициенты β_2 и β_3 в аффинной безарбитражной модели NS – нормально распределенные случайные величины, коррелированные между собой.

Рассмотрим, к чему приводит модификация модели NS, предложенная Свенссоном. В этом случае $\phi_3 \neq 0$, $\phi_4 \neq 0$ и кривые доходности определяются выражениями (19) и (20). Сравнение представлений (12) и (19) дает следующую интерпретацию коэффициентов модели NSS

$$\beta_1 = -\frac{dA(\tau)}{d\tau},\quad \beta_2 = x_1\phi_1 + x_2\phi_2,\quad \beta_3 = x_2\phi_1,\quad \beta_4 = x_3\phi_3 + x_4\phi_4,\quad \beta_5 = x_4\phi_3. \tag{24}$$

Отличие от модели NS в том, что здесь $\beta_2 \neq r$, но $\beta_2 + \beta_4 = r$.

Таким образом, аффинная безарбитражная модель Нельсона – Сигеля – Свенссона оказывается частным случаем четырехмерной аффинной безарбитражной модели с постоянной матрицей волатильности и матрицей K коэффициентов влияния, имеющей вид (17). Соответственно, модель Нельсона – Сигеля – это частный случай двухмерной аффинной безарбитражной модели с постоянной матрицей волатильности и матрицей K коэффициентов влияния, имеющей вид

$$K = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Другими словами, модели NS и NSS – это частные случаи многомерной модели Васичека (2), если под этим понимать многомерную модель с постоянной матрицей волатильности и линейным дрейфом. Можно предположить, что матрицы (17) и (25) служат признаками моделей NS и NSS. Тогда можно предположить, что если в модели (1), (13) матрица K определена в виде (17) или (25), то кривые доходности будут иметь временную структуру NS или NSS. Так ли это?

Рассмотрим для примера двухмерную модель CIR (3) с матрицей коэффициентов влияния (25). Для этого зададим матрицы и вектора в соотношениях (13) следующим образом

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1\sqrt{x_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2\sqrt{x_2} \end{pmatrix},\ \lambda(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1\lambda_1\sqrt{x_1} \\ \sigma_2\lambda_2\sqrt{x_2} \end{pmatrix}.$$

Здесь для краткости обозначено $\sigma_i = \sqrt{2k_i D_i / \theta_i}$, $i = 1, 2$. Это дает в выражениях (13)

$$\alpha = 0,\ \beta_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},\ \xi = 0,\ \eta_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2^2\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (14) – (15) принимают вид

$$A'(\tau) = B(\tau)^{\mathrm{T}} K\theta,\quad A(0) = 0,$$
$$B_1'(\tau) = \phi_1 - (\sigma_1^2\lambda_1 + \gamma)B_1(\tau) - \sigma_1^2 B_1(\tau)^2/2,\quad B_1(0) = 0,$$
$$B_2'(\tau) = \phi_2 + \gamma B_1(\tau) - (\sigma_2^2\lambda_2 + \gamma)B_2(\tau) - \sigma_2^2 B_2(\tau)^2/2,\quad B_2(0) = 0,$$

В этом случае уравнения получились нелинейными. Второе и третье уравнения – это уравнения Риккати. Причем уравнение для $B_1(\tau)$ – уравнение с постоянными коэффициентами и может быть решено в явной аналитической форме. Уравнение для $B_2(\tau)$ – уравнение Риккати с переменным свободным коэффициентом и в явной аналитической форме не решается.

Обозначим для краткости $g = \sqrt{(\gamma + \sigma_1^2\lambda_1)^2 + 2\phi_1\sigma_1^2}$. Тогда решение уравнения для $B_1(\tau)$ записывается в виде

$$B_1(\tau) = \frac{2\phi_1}{\gamma + \sigma_1^2\lambda_1 + g + \dfrac{2g}{e^{g\tau} - 1}}, \qquad (26)$$

что существенно отличается от функции $B_1(\tau)$ в модели NS (18). То же самое можно сказать и о функции $B_2(\tau)$, которая находится только численно. Аналогичные результаты справедливы и для двухмерной модели Даффи – Кана (4), в которой функция $B_1(\tau)$ тоже имеет вид (26), но ее параметры g и σ_1 определяются иначе:

$$g_{\text{ДК}} = \sqrt{(\gamma + \sigma_{1,\text{ДК}}^2\lambda_1)^2 + 2\phi_1\sigma_{1,\text{ДК}}^2},\quad \sigma_{1,\text{ДК}} = \sqrt{2k_1 D_1 / (\theta_1 - x_{1,\inf})}.$$

Получается, что модель NS – безарбитражная только тогда, когда в уравнении (1) функция дрейфа $\mu(x)$ линейна относительно x, а матрица волатильности $\sigma(x)$ не зависит от x.

Таким образом, требование выполнения условий осутствия арбитража уточняет модель Нельсона – Сигеля – Свенссона в том смысле, что придает коэффициентам этой модели явный экономический смысл: свободный коэффициент должен быть функцией срока до погашения τ, а остальные коэффициенты должны зависеть от переменных состояния рынка $\{x_i\}$, которые, в свою очередь, являются выборочными значениями случайных процессов $\{X_i(t)\}$ в момент t, для которого конструируется временная структура, т.е. случайными величинами. Заметим, что описание случайных процессов $\{X_i(t)\}$ производится при вероятностной мере P, т.е. с учетом рыночных цен риска $\lambda(x)$. Сама модель является представителем семейства аффинных моделей доходности и порождается двухмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля или четырехмерной моделью краткосрочной процентной ставки для модели Нельсона – Сигеля – Свенссона. Случайные процессы $\{X_i(t)\}$, лежащие в основе NS- и NSS-моделей, порождаются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями, в связи с чем переменные состояния рынка $\{x_i\}$ имеют нормальное распределение и могут с положительной вероятностью принимать отрицательные значения, что является определенным недостатком моделей NS и NSS.

Отметим, что зависимость коэффициентов NS-модели от текущего времени обсуждалась в [9]. Связь NS-модели с аффинными безарбитражными моделями, основанными на трехфакторном случайном процессе при нейтральной к риску Q-мере, рассмотрена в [10]. Применение аффинной безарбитражной NS-модели к реальным задачам динамики обменного курса валют описано в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vasiček, O. A.* An Equilibrium characterization of the term structure / O. A. Vasiček // J. of Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.

2. *Cox, J. C.* A Theory of the term structure of interest rate / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // Econometrica. 1985. V. 53. P. 385–467.

3. *Duffie, D.* A yield-factor model of interest rates / D. Duffie, R. Kan // Mathematical Finance. 1996. V. 6. P. 379–406.

4. *Nelson, C. R.* Parsimonious modeling of yield curves / C. R. Nelson, A. F. Siegel // Journal of Business. 1987. V. 60. P. 473–489.

5. *Svensson, L.* Estimating forward interest rates with the extended Nelson–Siegel method / Lars E. O. Svensson // Quarterly Review. Sveriges Riksbank. 1995. No. 3. P. 13–26.

6. *Bank for International Settlements.* Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation // BIS papers. 2005. № 25. P. 1–55.

7. *Siegel, A. F.* Long-term behavior of yield curves / A. F. Siegel, C. R. Nelson // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1988. V. 23. P. 105–110.

8. *Медведев, Г. А.* О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека / Г. А. Медведев // Вестник ТГУ. УВТиИ. 2012. № 1(18). С. 102–111.

9. *Diebold, F.* Forecasting the term structure of government bond yields / F. Diebold, C. Li // Journal of Econometrics. 2006. № 130. P. 337–364.

10. *Christensen, J.* The affine arbitrage-free class of Nelson–Siegel term structure models / J. Christensen, F. Diebold, G. Rudebusch // PIER Working Paper. 2008. № 08-030. P. 1–38.

11. *Yu, Y.* Modeling a two-currency affine arbitrage-free Nelson–Siegel term structure model / Y. Yu // M. Litt. in Finance. 2012. P. 1–52.