

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ $M|GI|N|_{\infty}$

Е. Ю. Лисовская, С. П. Моисеева

*Национальный исследовательский Томский государственный университет  
Томск, Россия  
E-mail: ekaterina\_lisovs@mail.ru*

Работа посвящена исследованию системы массового обслуживания  $M|GI|N|_{\infty}$ , которая описывает обслуживание клиентов в банковском офисе. Получены формулы для аппроксимации распределения вероятностей, которые позволят определить временные характеристики, такие как время ожидания заявок в очереди, оптимальное число обслуживающих приборов, среднее время обслуживания и другие.

*Ключевые слова:* теория массового обслуживания, распределение вероятностей, рекуррентный поток.

## ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания с простейшим пуассоновским входящим потоком, с ограниченным числом обслуживающих приборов и конечной или бесконечной очередью часто используются для описания различных экономических процессов [3], для моделирования работы call-центров (центров обработки вызовов) [1, 2].

Система  $M|GI|N|_{\infty}$ , рассматриваемая в данной работе, описывает обслуживание клиентов в банковском офисе, а именно исследования интенсивности поступления клиентов, времени обслуживания, времени ожидания в очереди.

Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов или становится в очередь в случае, когда все приборы заняты. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения  $A(x)$ , одинаковой для всех приборов.

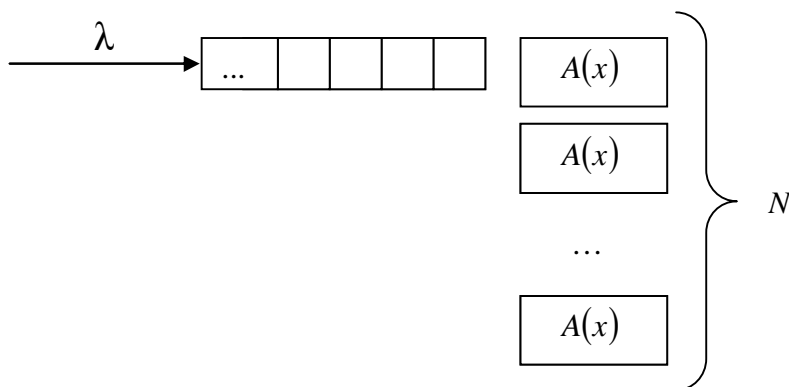


Рис. 1. Система  $M|GI|N|_{\infty}$

Известно, что для системы  $M|M|N|K$  получены формулы Эрланга [4]. Вместе с тем, для произвольного времени обслуживания и бесконечной очереди полученная задача тео-

решены, и представить аналитическое решение невозможно, поэтому ставится задача построения аппроксимации стационарного распределения вероятностей  $P(i)$ ,  $0 \leq i < \infty$ , числа заявок в рассматриваемой системе  $M|GI|N|_\infty$ .

## АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ $M|GI|N|_\infty$

Обозначим  $\pi_i$  – аппроксимация распределения вероятностей  $P(i)$ , которые будем определять в виде составного распределения

$$\pi_i = \begin{cases} C_1 P_1(i), & 0 \leq i \leq N \\ C_2 P_2(i - N + 1), & i \geq N \end{cases} \quad (1)$$

Вероятности  $P_1(i)$ ,  $0 \leq i \leq N$  – вероятности числа занятых приборов в  $N$ -линейной СМО ( $M|GI|N|0$ ) с потерями заявок, когда все приборы заняты. Тогда их можно определить формулами Эрланга [5]

$$P_1(i) = \frac{(\lambda a)^i}{i!} \Big/ \left( \sum_{i=0}^N \frac{(\lambda a)^i}{i!} \right), \quad (2)$$

где  $a = \int_0^\infty (1 - A(x)) dx$  – среднее время обслуживания.

Так как вероятности  $P_2(i)$  определяются для случая, когда все приборы заняты, то блок занятых приборов представляем как один прибор, который обслуживает случайное время с функцией распределения  $B(x)$ . Поэтому вероятности  $P_2(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , определим как вероятности числа заявок в однолинейной системе  $M|GI|1|_\infty$  с ожиданием.

В таком случае, воспользуемся формулой Поллачека – Хинчина для производящей функции:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_2(n) = (1 - \lambda b) \frac{(1 - x) B^*(\lambda - \lambda x)}{B^*(\lambda - \lambda x) - x}. \quad (3)$$

Для определения вида функции распределения  $B(x)$  рассмотрим выходящий поток обслуженных заявок в случае, когда все  $N$  приборов в системе заняты. На этом интервале занятости выходящий поток является суммой независимых рекуррентных потоков, определяемых одной и той же функцией распределения  $A(x)$ .

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим сумму  $N$  независимых рекуррентных потоков, с одинаковыми функциями распределения  $A(x)$ .

Пусть  $\tau$  – величина перескока [5] суммарного потока. Тогда очевидно, что  $\tau = \min \{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N \}$ , где  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  – независимые величины перескоков для суммируемых потоков.

Поэтому

$$P\{\tau > x\} = 1 - \frac{1}{b} \int_0^x (1 - B(z)) dz = P\{\min\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\} > x\} = \\ = P\{\tau_1 > x\} P\{\tau_2 > x\} \dots P\{\tau_N > x\} = \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz\right)^N.$$

Следовательно, для суммарного потока имеем

$$1 - \frac{1}{b} \int_0^x (1 - B(z)) dz = \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz\right)^N,$$

тогда, дифференцируя по  $x$ , получим

$$B(x) = 1 - Nb \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz\right)^{N-1} \frac{1}{a} (1 - A(x)).$$

Так как  $\frac{1}{b} = N \frac{1}{a}$  [5], то для системы  $M|GI|N|\infty$  функция распределения длин интервалов суммарного потока имеет вид:

$$B(x) = 1 - (1 - A(x)) \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz\right)^{N-1}, \quad (4)$$

а ее плотность распределения имеет вид

$$b(x) = \left\{ A'(x) \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz\right) + \frac{N-1}{a} (1 - A(x))^2 \right\} \left(1 - \frac{1}{a} \int_0^x (1 - A(z)) dz\right)^{N-2}.$$

## РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЛАЧЕКА – ХИНЧИНА

Вероятности  $P_2(i)$  можно найти с помощью обратного преобразования Фурье или раскладывая функцию (3) в ряд по степеням  $x$ .

Для нахождения вероятностей  $P_2(i)$  вторым способом запишем следующее разложение

$$B^*(\lambda - \lambda x) = \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda x)z} dB(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} e^{-\lambda x z} dB(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda x z)^n}{n!} dB(z) = \sum_{n=0}^\infty x^n \int_0^\infty e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^n}{n!} dB(z).$$

Обозначив

$$\beta_n = \int_0^\infty e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^n}{n!} dB(z),$$

получаем разложение вида

$$B^*(\lambda - \lambda x) = \sum_{n=0}^\infty x^n \beta_n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
(1-x)B^*(\lambda-\lambda x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \beta_n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \beta_n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n \beta_{n-1} = \\
&= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\beta_n - \beta_{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n b_n,
\end{aligned}$$

где  $b_0 = \beta_0$ ,  $b_n = \beta_n - \beta_{n-1}$ .

Знаменатель выражения (3) запишем в виде

$$(B^*(\lambda-\lambda x) - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \alpha_n. \quad (5)$$

Для нахождения  $\alpha_n$  перепишем (5) в виде:

$$\begin{aligned}
1 &= (B^*(\lambda-\lambda x) - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \alpha_n \sum_{n=0}^{\infty} x^n \beta_n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \alpha_n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} - \sum_{n=1}^{\infty} x^n \alpha_{n-1} = \alpha_0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} - \alpha_{n-1}.
\end{aligned}$$

Приравнявая в этом выражении коэффициенты при одинаковых степенях, получаем рекуррентные формулы:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta_0}, \quad \alpha_n = \frac{1}{\beta_0} \left[ \alpha_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_{n-k} \right]. \quad (6)$$

Учитывая разложение, для функции  $G(x)$  можно записать выражение

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_2(n) = (1-\lambda b) \frac{(1-x)B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x) - x} = (1-\lambda b) \sum_{i=0}^{\infty} x^i b_i \sum_{i=0}^{\infty} x^i \alpha_i = \\
&= (1-\lambda b) \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{k=0}^i \alpha_k b_{i-k}.
\end{aligned}$$

Откуда

$$P_2(i) = (1-\lambda b) \sum_{k=0}^i \alpha_k b_{i-k}.$$

## НАХОЖДЕНИЕ КОНСТАНТ

Значение величин  $C_1$  и  $C_2$  найдем из условия нормировка и условия «сшивания», которые можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1, \\ C_1 P_1(N) = C_2 P_2(1), \end{cases}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = C_1 \sum_{i=0}^N P_1(i) + C_2 \sum_{i=N+1}^{\infty} P_2(i-N+1) = C_1 + C_2 \sum_{n=2}^{\infty} P_2(n) = \\
&= C_1 + C_2 (1 - (P_2(0) + P_2(1))),
\end{aligned}$$

получаем

$$C_1 = \frac{P_2(1)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))},$$

$$C_2 = \frac{P_1(N)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))}.$$

Таким образом, (1) принимает вид:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{P_2(1)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))} P_1(i), & 0 \leq i \leq N; \\ \frac{P_1(N)}{P_2(1) + P_1(N)(1 - (P_2(0) + P_2(N)))} P_2(i - N + 1), & i \geq N. \end{cases} \quad (7)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получены формулы для аппроксимации распределения вероятностей числа заявок в системе  $M|GI|N|_{\infty}$  вида (1). Нетрудно показать, что для экспоненциально распределенного времени обслуживания полученные формулы примут известный вид [4].

Полученное распределение в дальнейшем позволяет определить временные характеристики, такие как время ожидания заявок в очереди, оптимальное число обслуживающих приборов, среднее время обслуживания и другие.

*Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России № 1.511.2014/К.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown, L.* Statistical Analysis of a Telephone Call Center: A Queueing-Science Perspective. / L. Brown, N. Gans, A. Mandelbaum et al. // Journal of the American Statistical Association. 2005. 100 p.
2. *Jouini, O.* Call Centers with Delay Information: Models and Insights / O. Jouini, Z. Akşin, Y. Dallery // Manufacturing & Service Operations Management, 13. 2011. P. 534–548.
3. *Дуплякин, В. М.* Моделирование системы массового обслуживания торгового предприятия / В. М. Дуплякин, Ю. В. Скогарева // Вестник ОГУ. 2009. № 1. С. 67–72.
4. *Клейнрок, Л.* Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. пер с англ. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. М. : Машиностроение, 1979. 432 с.
5. *Назаров, А. А.* Теория массового обслуживания : учеб. пособие. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск : Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.