ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СВОЙСТВАХ СОСТОЯНИЙ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА С ИММИГРАЦИЕЙ

А. А. Имомов

Государственный Центр Тестирования при Кабинете Министров Республики Узбекистан, Институт Математики при Национальном Университете Узбекистана
Узбекистан
E-mail: imomov_azam@mail.ru

Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона с иммиграцией. Исследуем инвариантные свойства состояний рассматриваемого процесса.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, иммиграция, переходные вероятности, цепь Маркова, инвариантная мера.

Исследуем модель эволюции частиц, называемую ветвящимся процессом Гальтона – Ватсона с иммиграцией (ПГВИ), в котором размер популяции частиц X_n, $n \in \mathbf{N}_0$, образует однородную цепь Маркова с пространством возможных состояний $S \subseteq \mathbf{N}_0$. Рассматриваемый процесс обычно определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{nk} + \eta_n, \;\; n \in \mathbf{N},$$

где $\{\xi_{nk}\}$– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин интерпретируются как число непосредственных потомков k-й частицы $(n-1)$-го поколения, а независимые одинаково распределенные величины η_n, не зависящие от ξ_{nk}, как число иммигрантов в момент n частиц. Пусть $X_0 = 0$ и величины ξ_{nk} имеют общий закон распределения $p_k := \mathbf{P}\{\xi_{11} = k\}$, а с вероятностью $h_j := \mathbf{P}\{\eta_1 = j\}$ в каждый момент времени $n \in \mathbf{N}$ в популяцию поступают ровно $j \in \mathbf{N}_0$ частиц-иммигрантов извне. Вновь появившиеся частицы в дальнейшем претерпевают превращение по случайному закону $\{p_j\}$. Всюду мы предположим, что $p_0 > 0$ и $\sum_{j\in\mathbf{N}} h_j = 1$.

Обозначим через $p_{ij}^{(n)}$ переходные вероятности из состояния i в состояние j за n шагов в ПГВИ, то есть

$$p_{ij}^{(n)} := \mathbf{P}\{X_{k+n} = j | X_k = j\}$$

для любых $n, k \in \mathbf{N}_0$. Пусть

$$P_n^{(i)}(s) := \mathbf{E}_i s^{X_n} = \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} s^j \;.$$

Обозначив ПФ

$$G(s) := \sum_{j\in N_0} h_j s^j \quad \text{и} \quad F(s) := \sum_{j\in N_0} p_j s^j \;,$$

находим, что

$$P_{n+1}^{(i)}(s)=G(s)\cdot P_n^{(i)}(F(s)), \tag{1}$$

и, следовательно

$$P_{n+1}^{(i)}(s)=[F_n(s)]^i\prod_{k=0}^{n-1}G(F_k(s)), \tag{2}$$

где $F_n(s)$ – итерации ПФ $F(s)$. Из (2) видно, что вероятности $\{p_{ij}^{(n)}\}$ полностью определяются при помощи распределений вероятностей $\{p_j\}$ и $\{h_j\}$. Как и в обычном процессе без иммиграции, классификация состояний является одним из фундаментальных задач в теории ПГВИ. Обычное дифференцирование равенства (2) нам дает

$$\mathbf{E}_i X_n=\sum_{j\in S} jp_{ij}^{(n)}=\begin{cases}\left(\dfrac{\alpha}{A-1}+i\right)A^n-\dfrac{\alpha}{A-1}, & A\neq 1;\\ \alpha n+i\ , & A=1,\end{cases}$$

где $\alpha=G'(1)$. Как показывают полученная формула для $\mathbf{E}_i X_n$, классификация состояний цепи $\{X_n\}$ зависит от значения параметра $A=F'(1)$ – среднего числа непосредственных потомков одной частицы за одно поколение. Процесс $\{X_n\}$ называется докритическим, критическим и надкритическим, если $A<1$, $A=1$ и $A>1$, соответственно.

Вышеописанный процесс впервые рассмотрен Хиткотом [3] в 1965 году. В дальнейшем свойства состояний ПГВИ, а также задача существования и единственности инвариантной меры для цепи $\{X_n\}$ исследовались в работах Сенеты [8, 10, 11], Пэйкса [4–7] и многих других авторов. При этом предполагались выполнения моментных условий для ПФ $F(s)$ и $G(s)$. Сенетой исследованы свойства эргодичности ПГВИ $\{X_n\}$. Им было доказано, что в случаях $A\le 1$ существует единственная инвариантная мера $\{\mu_k,\ k\in S\}$, причем $\mu_0=1$. Хиткот [2] и Пэйкс [7] показали, что в надкритическом случае состояние *S* будет невозвратным. В критическом случае, если момент $\alpha:=G'(1)$ конечный, то *S* может быть невозвратным, нуль-возвратным или эргодичным. В этом случае, если дополнительно предполагать $2B:=F''(1)<\infty$, то свойства *S* зависят от значения параметра $\lambda=\alpha/B$: если $\lambda>1$ или $\lambda<1$, то *S* невозвратно или нуль-возвратно, соответственно. В случае, когда $\lambda=1$, Пэйкс [6] и Зубков [12] изучали необходимые и достаточные условия для нуль-возвратности *S*. Предельное распределение для состояний критического процесса $\{X_n\}$ впервые найдено Сенетой [9]. Им было доказано, что при условии $0<\lambda<\infty$ нормированный процесс X_n/n имеет предельное гамма распределение с функцией плотности

$$\frac{1}{B\Gamma(\lambda)}\left(\frac{x}{B}\right)^{\lambda-1}e^{-x/B},\ \ x>0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция Эйлера. Этот результат независимо от Сенеты установлен также Пэйксом [6].

Обозначив $P_n(s):=P_n^{(0)}(s)$, из (2) имеем

$$\frac{P_n^{(i)}(s)}{P_n(s)}\to q^i,\ \ n\to\infty, \tag{3}$$

так как $\sup_{0\le s<1}F_n(s)\to q$ (см. [1, с. 8]). В частности, если в (3) положим $s=0$, то $p_{i0}^{(n)}/p_{00}^{(n)}\to q^i$. С целью получить утверждение в общем случае для любого $j\in S$, напишем $P_{n+1}(s)=P_n(s)\cdot G(F_n(s))$ и, учитывая свойства ПФ, вычислим

$$\frac{\partial^j P_{n+1}(s)}{\partial s^j} = \frac{\partial^j P_n(s)}{\partial s^j} \cdot G'(F_n(s))F_n'(s) + D_{j,n}(s),$$

для всех $0 \le s \le 1$, где выражение $D_{j,n}(s)$ представляет собой степенной ряд с неотрицательными коэффициентами. Следовательно, полагая $s = 0$ в последних полученных соотношениях, имеем

$$\frac{p_{0j}^{(n+1)}}{p_{00}^{(n+1)}} \ge \frac{p_{0j}^{(n)} G'(F_n(s))F_n'(s)}{p_{00}^{(n)} G(F_n(0))} = \frac{p_{0j}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} \cdot \left.\frac{\partial \ln G(F_n(s))}{\partial s}\right|_{s=0}.$$

Очевидно, что $\ln' x = 1/x > 1$ для $x \in (0;1)$. Поэтому согласно свойству ПФ, правая часть последнего неравенства больше 1. Так что варианта $\left\{p_{0j}^{(n)} / p_{00}^{(n)}\right\}$ монотонно возрастает при $n \to \infty$. В наших условиях $p_{00}^{(n)} > 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и, следовательно, эта варианта, возрастая, сходится к конечному неотрицательному пределу:

$$\frac{p_{0j}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} \uparrow \upsilon_j < \infty, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Теперь рассмотрим отношение $p_{ij}^{(n)} / p_{00}^{(n)}$. Обозначив

$$U_n^{(i)}(s) := \sum_{j \in S} \frac{p_{ij}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} s^j,$$

для всех $0 \le s \le 1$, напишем следующие соотношения:

$$U_n^{(i)}(s) = [F_n(s)]^i \frac{P_n(s)}{P_n(0)} = [F_n(s)]^i U_n(s), \tag{5}$$

где

$$U_n(s) = \sum_{j \in S} \frac{p_{0j}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} s^j.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для всех $j \in S$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{ij}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} = q^i \upsilon_j < \infty. \tag{6}$$

Соответствующая ПФ

$$U(s) = \sum_{j \in S} \upsilon_j s^j$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sigma \cdot U(s) = G(s) U(F(s)) \tag{7}$$

в области ее сходимости, где $\sigma := G(q)$.

Доказательство. Утверждение (6) немедленно следует из (4) и (5), с учетом того, что $\sup_{0 \le s < 1} F_n(s) \to q$ при $n \to \infty$.

Чтобы доказать справедливость уравнения (7), комбинируем соотношения (1) и (5) с очевидным соотношением $P_{n+1}(s) = P_n(s) \cdot G(F_n(s))$ и имеем следующее:

$$U_{n+1}^{(i)}(s) = [F_{n+1}(s)]^i U_{n+1}(s) = [F_n(F(s))]^i \frac{P_{n+1}(s)}{P_{n+1}(0)} =$$

$$= [F_n(F(s))]^i \frac{G(s) \cdot P_n(F(s))}{G(F_n(s)) \cdot P_n(0)} = \frac{G(s)}{G(F_n(0))} U_n^{(i)}(F(s)).$$

Отсюда, переходя к пределу, получаем искомое. □

Как степенной ряд ПФ $U(s)$ представляет собой непрерывную функцию в области $0 \le s < 1$. Согласно свойствам ПФ она сходится для всех $s \in [0;1-\varepsilon]$ и для любого произвольно малого положительного числа $\varepsilon > 0$.

Последовательное применение итерации в уравнении (7), приводит нас к следующему соотношению:

$$\sigma^n U(s) = P_n(s) U(F_n(s)). \tag{8}$$

На языке переходных вероятностей уравнение (1.3.8) пишется в виде

$$\sigma^n \cdot \upsilon_j = \sum_{i \in S} \upsilon_i p_{ij}^{(n)}. \tag{9}$$

Равенство (9) указывает на то, что множество неотрицательных чисел $\{\upsilon_j, j \in S\}$ представляет собой инвариантную меру для ПГВИ $\{X_n\}$.

Введем в рассмотрение множество $\mathbf{S} = \{j \in \mathbf{N} : p_{0j}^{(n)} > 0\}$. В силу условия $p_{00}^{(n)} > 0$ и равенства (9), все $\upsilon_j < \infty$ и $\upsilon_j > 0$ для $j \in \mathbf{S}$. А также $\upsilon_0 = 1$. Тогда по определению процесса $\{X_n\}$ и, согласно равенству (8), имеем соотношения

$$\sigma^n = \sigma^n \upsilon_0 = \sum_{i \in S} \upsilon_i p_{i0}^{(n)} = \sum_{i \in S} \upsilon_i p_{i0}^{(n)} = \sum_{i \in S} \upsilon_i P_{i0}(n) p_{00}^{(n)} = \sum_{i \in S} \upsilon_i P_{10}^{i}(n) p_{00}^{(n)} = P_n(0) U(F_n(0)),$$

где $P_{10}(n) = F_n(0)$. Так что

$$U(F_n(0)) = \frac{\sigma^n}{p_{00}^{(n)}}, \tag{10}$$

для любых $n \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим случай $A \ne 1$. В силу непрерывности $U(s)$, из (10) получим

$$\frac{\sigma^n}{p_{00}^{(n)}} \to U(q) < \infty, \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Здесь мы учитывали то, что $F_n(0) \to q$. Собирая, теперь вместе соотношений (3), (6) и (11) напишем следующую теорему.

Теорема 2. Если $A \ne 1$, то для всех $i, j \in S$,

$$\sigma^{-n} P_n^{(i)}(s) \to q^i \frac{U(s)}{U(q)}, \quad n \to \infty,$$

и для переходных вероятностей справедливо соотношение

$$\sigma^{-n} p_{ij}^{(n)} \to \frac{q^i \upsilon_j}{\sum_{k \in S} \upsilon_k q^k}, \quad n \to \infty.$$

Замечание. В докритическом случае ($A < 1$), если среднее число иммигрирующих частиц $\alpha = G'(1)$ конечно, то $\{\upsilon_j, \ j \in S\}$ представляет собой инвариантное распределение с конечным среднем значением

$$U'(s \uparrow 1) = \sum_{j \in S} j \upsilon_j = \frac{U(1)\alpha}{1 - A}. \tag{12}$$

Чтобы убедиться в конечности $\sum_{j \in S} \upsilon_j$, напишем соотношения

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{G(F_k(s)) - G(F_k(0))}{G(F_k(s))} < \ln U_n(s) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{G(F_k(s)) - G(F_k(0))}{G(F_k(0))}.$$

Здесь мы воспользовались неравенствами

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a},$$

которые справедливы для $0 < b < a$. Далее, используя теоремы о среднем, учитывая при этом свойства монотонности ПФ и их производных, имеем

$$G(F_k(s)) - G(F_k(0)) = \tilde{\alpha}(F_k(s)) - (F_k(0)),$$

где $h_1 < \tilde{\alpha} < \alpha$. Из полученных соотношений, делаем вывод о том, что

$$\ln U(s) = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{h}_0} \sum_{k=0}^{\infty} [F_k(s) - F_k(0)],$$

где $h_0 < \tilde{h}_0 < 1$. В свою очередь, $F_k(s) - F_k(0) \sim [A(0) - A(s)]A^k$ при $k \to \infty$, где

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{1}{q-s} + \frac{\delta}{2},$$

где $\delta > 0$ (см. [13]). Таким образом, $U(s \uparrow 1) < \infty$.

Продифференцировав, теперь уравнения (7), находим

$$U'(s) = G'(s)U(F(s)) + G(s)U'(F(s)F'(s)).$$

Полагая здесь $s \uparrow 1$, получим (11). □

Теорема 3. Пусть $A \neq 1$. Тогда для решения уравнения (7) выполняется свойство

$$U(1-t) = L(t),$$

где $L(t)$ – медленно меняющаяся функция при $t \downarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Athreya, K. B.* Branching processes / K. B. Athreya, P. E. Ney New York : Springer, 1972.

2. *Heatcote, C. R.* Corrections and comments on the paper “A branching process allowing immigration” / C. R. Heatcote // Journal of the Royal Statistical Society. 1966. B 28. P. 213–217.

3. *Heatcote, C. R.* A branching process allowing immigration / C. R. Heatcote // Journal of the Royal Statistical Society. 1965. B 27. P. 138–143.

4. *Pakes, A. G.* Limit for the simple branching process allowing immigration, I. The case of finite offspring mean / A. G. Pakes // Adv. Appl. Prob. 1979. V. 11. P. 31–62.

5. *Pakes, A. G.* Futher results on the critical Galton-Watson process with immigration / A. G. Pakes // J. Austral. Math. Soc. 1972. V 13(3). P. 277–290.

6. *Pakes, A. G.* On the critical Galton-Watson process with immigration. / A. G. Pakes // J. Austral. Math. Soc. 1971. V. 12. P. 476–482.

7. *Pakes, A. G.* Branching processes with immigration / A. G. Pakes // J. Appl. Prob. 1971. V 8(1). P. 32–42.

8. *Seneta, E.* On the invariant measures for simple branching process / E. Seneta // J. Appl. Prob. 1971. V. 8. P. 43–51.

9. *Seneta, E.* An explicit - limit theorem for the critical Galton-Watson process with immigration / E. Seneta // J. Roy. Statist. Soc. 1970. B 32(1). P. 149–152.

10. *Seneta, E.* Functional equations and the Galton-Watson process / E. Seneta // Adv. Appl. Prob. 1969, 1. P. 1–42.

11. *Seneta, E.* The stationary distribution of a branching process allowing immigration: A remark on the critical case / E. Seneta // J. Roy. Statist. Soc. 1968. B. 30(1). P. 176–179.

12. *Зубков, А. М.* Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией / А. М. Зубков // ТВП. 1972. Т. 17(1). С. 179–188.

13. *Имомов, А. А.* Несколько замечаний об асимптотических свойствах процессов Гальтона-Ватсона / А. А. Имомов, А. Мейлиев // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: Материалы межд. конф. Мн., 2015.