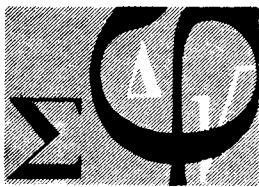


ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

2

1985



ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ КАПЛИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Возросший за последние 15—20 лет интерес к изучению равновесных форм свободной поверхности жидкости во многом обусловлен развитием вычислительной техники как средства исследования. Большинство практически интересных задач о равновесии имеет сложную постановку, требующую применения приближенных методов. В работах [1—3] развит итерационно-разностный подход к решению таких задач, оказавшийся в ряде трудных случаев эффективнее традиционных методов [4], например, в случае, когда жидкость подвергается действию не одной массовой силы, а нескольких (гравитационных, центробежных, магнитных и др.), при расчете двухсвязных равновесных поверхностей.

Применим итерационно-разностный метод для решения задачи о равновесии осесимметричных форм капли жидкости, находящейся на вращающейся плоскости в поле сил тяжести. Обозначим: V — объем капли; R_* — радиус капли; α — контактный угол; ω — угловая скорость вращения капли; ρ — плотность; σ — коэффициент поверхностного натяжения; g — ускорение свободного падения; S_* — длина равновесной линии. Форму поверхности будем искать в параметрическом виде $Z(S)$, $R(S)$, где Z и R — цилиндрические координаты; S — длина дуги равновесной линии, $0 \leq S \leq S_*$, $R(0)=0$, $Z(S_*)=0$, $R(S_*)=R_*$. Заметим, что объем капли можно вычислить как объем тела вращения по формуле

$$V = 2\pi \int_0^{S_*} Z R R' dS.$$

Введем обобщенные переменные:

$$s = \frac{S}{S_*}, \quad z = \frac{Z}{S_*}, \quad r = \frac{R}{S_*}. \quad (1)$$

Такой способ задания обобщенных переменных удобен тем, что позволяет проводить вычисления в постоянной области $0 \leq s \leq 1$.

Размерная постановка задачи имеется в [4]. Запишем ее в безразмерной форме в переменных (1):

$$(rz')' = rr' \left(\frac{Bo}{v^{2/3}} z - \frac{P}{v} r^2 + C \right), \quad (2)$$

$$r'' = -z' \left(\frac{Bo}{v^{2/3}} z - \frac{P}{v} r^2 - \frac{z'}{r} + C \right), \quad 0 < s < 1; \quad (3)$$

$$r(0)=0, \quad z(1)=0, \quad (4)$$

$$r'(0)=1, \quad z'(0)=0, \quad r'(1)=\cos \alpha, \quad z'(1)=-\sin \alpha, \quad (5)$$

где $z=z(s)$, $r=r(s)$, $0 \leq s \leq 1$, $'=d/ds$, $Bo=\rho g V^2/\sigma > 0$ — число Бонда, $P=\rho V \omega^2/2\sigma > 0$ — параметр, характеризующий отношение центробежных сил к капиллярным,

$$v = 2\pi \int_0^1 z r r' ds > 0. \quad (6)$$

$$C = -\frac{2 \sin \alpha}{r(1)} - \frac{Bo v^{1/3}}{\pi r^2(1)} + \frac{Pr^2(1)}{2v}. \quad (7)$$

Определяющими параметрами являются числа Bo , P и угол смачивания α .

На отрезке $0 \leq s \leq 1$ введем равномерную сетку с узлами $s_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = 1/N$ и построим разностную схему второго порядка аппроксимации для задачи (2)–(7). При этом условимся обозначать разностное решение так же, как и точное решение в узлах сетки: $z_i = z(s_i)$, $r_i = r(s_i)$.

Запишем уравнения (2), (3) в граничных узлах, раскрыв неопределенность z_0/r_0 по правилу Лопиталья. С учетом этих соотношений получим по обычной методике [5] краевые условия, аппроксимирующие (5) со вторым порядком: $r_{s,0} = 1$, $z_{s,0} - \frac{1}{4} h \left(\frac{Bo}{v^{2/3}} z_0 + C \right) = 0$, $r_{s,N} + \frac{1}{2} \times$

$\times h Q \sin \alpha = \cos \alpha$, $z_{s,N} + \frac{1}{2} h Q \cos \alpha = -\sin \alpha$, где $\xi_{s,i}$, $\xi_{s,i}^-$ — обозначения [5] для односторонних разностных производных. Производные z' и r' в уравнениях (2), (3) заменим на сетке центральными разностными производными $z_{s,i}^n$ и $r_{s,i}^n$, левую часть уравнений аппроксимируем с погрешностью $O(h^2)$ по известной формуле [5], а к интегралу (6) применим квадратурное правило трапеций. Чтобы не загромождать статью, окончательный вид разностной схемы приводить не станем. Ее легко составить из формул (8)–(14), в которых следует лишь убрать верхний индекс, соответствующий номеру итерации.

Для решения полученной нелинейной разностной задачи построим итерационный процесс по неявной схеме метода установления, обеспечивая устойчивость прогонки на каждой итерации:

$$z_{s,0}^{n+1} - \frac{1}{4} h \left(\frac{Bo}{(v^n)^{2/3}} z_0^{n+1} + C^n \right) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \left(\frac{r_{i-1}^n + r_i^n}{2} z_{s,i}^{n+1} \right)_{s,i} - \frac{Bo}{(v^n)^{2/3}} r_i^n [(r_{s,i}^n)^2 + z_i^{n+1} + (r_{s,i}^n)^2 - z_i^n] + \\ + r_i^n r_{s,i}^n \left[\frac{P}{v^n} (r_i^n)^2 - C^n \right], \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (9)$$

$$z_{s,N-1}^{n+1} + \frac{1}{2} h Q^n \cos \alpha = -\sin \alpha, \quad z_N^{n+1} = 0; \quad (10)$$

$$r_0^{n+1} = 0, \quad r_{s,i}^{n+1} = 1, \quad (11)$$

$$\frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} = (r_s^{n+1})_{s,i} + z_{s,i}^{n+1} \left[\frac{Bo}{(v^n)^{2/3}} r_i^{n+1} - \frac{P}{v^n} (r_i^n)^2 - \right. \\ \left. - \frac{z_{s,i}^{n+1}}{r_i^n} + C^n \right], \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (12)$$

$$r_{s,N}^{n+1} + \frac{1}{2} h Q^n \sin \alpha = \cos \alpha; \quad (13)$$

$$v^{n+1} = 2\pi \sum_{i=1}^{N-1} z_i^{n+1} r_i^{n+1} r_{s,i}^{n+1} h, \quad C^{n+1} = -\frac{2 \sin \alpha}{r_N^{n+1}} - \frac{Bo (v^{n+1})^{1/3}}{\pi (r_N^{n+1})^2} + \\ + \frac{P (r_N^{n+1})^2}{2v^{n+1}}, \quad Q^{n+1} = -\frac{P}{v^{n+1}} (r_N^{n+1})^2 + \frac{\sin \alpha}{r_N^{n+1}} + C^{n+1}. \quad (14)$$

Здесь τ — итерационный параметр; n — номер итерации, $\xi^\pm = \frac{1}{2} (\xi \pm |\xi|)$.

На $n+1$ -ой итерации сначала прогонкой решается задача (8)–(10) и определяются z_i^{n+1} при всех i , затем аналогично вычисляются все r_i^{n+1} из решения задачи (11)–(13); найденные приближения используются в формулах (14), откуда находятся v^{n+1} , C^{n+1} , Q^{n+1} .

Угол смачивания и число Бонда варьировались в диапазонах: $20^\circ \leq \alpha \leq 170^\circ$, $0 \leq \text{Bo} \leq 10^4$. Сетка строилась с шагом $h=1/100$. Параметр τ выбирался из интервала 10^{-1} – 10^{-4} .

Bo	$\alpha=45^\circ$				$\alpha=90^\circ$				$\alpha=135^\circ$			
	P	$\frac{v}{R_*^3}$	Z_0/R_*	знак k_0	P	$\frac{V}{R_*^3}$	Z_0/R_*	знак k_0	P	$\frac{V}{R_*^3}$	Z_0/R_*	знак k_0
0	0	0,69	0,41	—	0	2,09	1	—	0	11,26	2,42	—
	1	0,5	0,26	—	4	1,11	0,47	—	7	2,64	0,8	—
	1,25	0,42	0,19	+	4,5	0,93	0,36	+	8	1,83	0,52	+
	1,38	0,34	0,12	+	4,75	0,76	0,24	+	8,21	1,54	0,41	+
	1,44	авост			4,8	авост			8,28	авост		
5	0	0,5	0,26	—	0	1,31	0,62	—	0	2,97	1,04	—
	1	0,32	0,12	+	2	1,04	0,46	—	4	2,04	0,69	—
	1,13	0,27	0,08	+	4	0,64	0,19	+	6	1,51	0,47	+
	1,19	авост			4,13	0,58	0,14	+	7,13	1,03	0,23	+
		—			4,19	авост			7,19	авост		
10	0	0,39	0,19	—	0	1,01	0,46	—	0	1,98	0,73	—
	1	0,23	0,06	+	2	0,8	0,38	+	2	1,7	0,61	—
	1,06	0,2	0,04	+	3,75	0,49	0,11	+	4	1,4	0,47	+
	1,12	авост			3,88	авост			6,63	0,76	0,13	+
		—				—			6,69	авост		
100	0	0,12	0,037	—	0	0,27	0,094	—	0	0,42	0,14	—
	0,5	0,083	0,023	+	1	0,24	0,075	+	4	0,29	0,068	+
	0,88	0,054	0,0078	+	3,19	0,12	0,01	+	5,63	0,17	0,0088	+
	0,94	авост			3,25	авост			5,69	авост		

При расчетах выяснилось, что рост параметра вращения P приводит к внезапному переполнению разрядной сетки машинной памяти. Значения P , соответствующие наступлению авоста, уточнялись методом деления отрезка пополам, пока погрешность не становилась менее 3 %. Сравнение с известными результатами теории при $\text{Bo}=0$, $\alpha=90^\circ$ [4] показало, что кризис вычислительного процесса происходит при том же критическом $P=P_{\text{кр}}=4,77$, что и разрушение равновесных форм вследствие осесимметричных возмущений. Учитывая выводы работы [3], возникновение вычислительной неустойчивости при разрушении равновесных осесимметричных форм можно считать не случайным. Представляется разумным предположить, что этому способствует примененная итерационная процедура, моделирующая подходящий нестационарный процесс.

Основные характеристики равновесных форм для различных Bo , P и α представлены в таблице. Здесь $Z_0=Z(0)$ — высота капли на оси симметрии, k_0 — кривизна свободной поверхности на оси симметрии.

В случае выпуклой поверхности кривизна k_0 имеет знак $(-)$, а в случае вогнутой — знак $(+)$. Две последние строки в каждом из четырех фрагментов таблицы соответствуют наибольшему докритическому и наименьшему закритическому значениям P , полученным при вычислениях. В случае $P=0$ решение задачи известно [4, 6]. Полученные численные результаты с ним полностью согласуются.

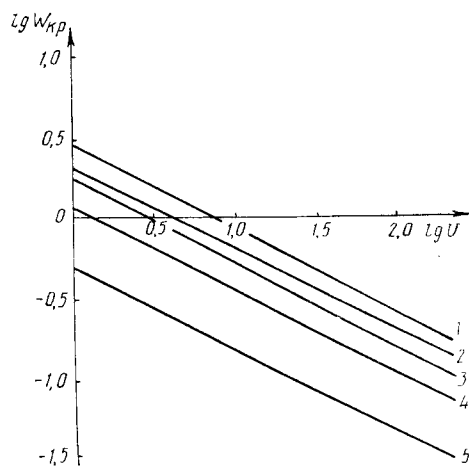


Рис. 1: 1 — $\alpha = 135^\circ$; 2 — 90° ; 3 — 70° ; 4 — 45° ; 5 — 20°

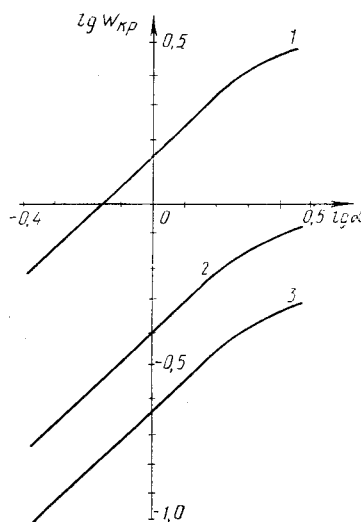


Рис. 2: 1 — $Bo = 1$; 2 — 5; 3 — 10

На рис. 1, 2 приведены графики логарифмической зависимости критической величины безразмерной угловой скорости вращения $W_{кр} = \sqrt{P_{кр}/Bo^{3/2}}$, рассчитанные по признаку авоста, от безразмерного объема капли $U = Vo^{3/2}$ и от угла смачивания α . Как видим, при всех α величина $lg W_{кр}$ уменьшается с ростом $lg U$ по одному линейному закону. В области $\pi/9 \leq \alpha \leq 3\pi/4$ близка к линейной также зависимость $lg W_{кр}$ от $lg \alpha$ при любых U . Причем рост угла смачивания оказывает стабилизирующее влияние на равновесие вращающейся капли. Зависимость $W_{кр}$ от безразмерного объема U и угла смачивания α хорошо описывается приближенной формулой

$$W_{кр} = 1,37 \frac{\alpha^{0,9035}}{U^{0,5287}}, \quad = 1,37 \left(\frac{\pi \alpha}{180} \right)^{0,835} / U^{0,526}$$

максимальная погрешность которой при $1 \leq Bo \leq 100$ и $\pi/9 \leq \alpha \leq 3\pi/4$ не превышает 5 %.

В [4] показано, что при $Bo=0$, $\alpha=90^\circ$ наиболее опасными являются неосесимметричные возмущения, вызывающие неустойчивость уже при $P=2,62$, т. е. когда поверхность еще выпукла. Очевидно, такая ситуация возможна и при других Bo и α . Учитывая, что в настоящей работе применялась математическая модель, допускающая только осесимметричные возмущения, проведенный анализ устойчивости следует, по-видимому, считать предварительным. Однако он дает полезные качественные оценки о влиянии параметров задачи на устойчивость равновесных форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полевиков В. К.— В сб.: Материалы 3-ей Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. М., 1983, с. 196.
2. Полевиков В. К., Будник А. М.— В сб.: Магнитные жидкости: Научные и прикладные исследования. Минск, 1983.
3. Берковский Б. М., Полевиков В. К.— Магнитная гидродинамика, 1983, № 4.
4. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости.— М., 1976.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
6. Bashforth F., Adams J. C. An attempt to test theories of capillary action.— Cambridge, 1883.

УДК 62-50:519.2

В. И. МАЛЮГИН

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С СУЩЕСТВЕННО ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

1. Постановка задачи. Одной из наиболее распространенных в приложениях оценок многомерной плотности вероятностей является оценка Розенблатта — Парзена с многомерным гауссовским ядром, имеющая вид [1]:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_N(x/X_i, h^2 H), \quad (1)$$

где $A = \{X_i : X_i \in R^N, i = \overline{1, n}\}$ — случайная выборка наблюдений из распределения вероятностей с неизвестной плотностью $f(x)$; $n_N(x|a, B)$ — N -мерная гауссовская плотность со средним a и ковариационной матрицей B ; $h = h(n)$ — коэффициент размытости, удовлетворяющий при $n \rightarrow \infty$ условиям:

$$h \rightarrow 0, nh^N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Пусть $X = (x_1, \dots, x_N)^T \in R^N$ — случайный вектор с существенно зависимыми компонентами [2]: $T(X) = x_1 - \varphi(\bar{X}) = \xi$. Здесь ξ — гауссовская случайная величина с нулевым средним и достаточно малой дисперсией σ^2 ; $\bar{X} = (x_2, \dots, x_N)^T$ — не зависящий от ξ случайный вектор, равномерно распределенный в параллелепипеде $G \subset R^{N-1}$; $\varphi(\bar{X})$ — неизвестная, достаточно гладкая в области G функция. Таким образом, плотность вероятностей $f(x)$ случайного вектора X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\text{mes}_{N-1} G} I_G(\bar{x}) n_1(T(x)/0, \sigma^2), \quad (3)$$

где $\text{mes}_{N-1} G$, $I_G(\bar{x})$ — мера Лебега ($N-1$ -мерный объем) и индикаторная функция области G соответственно. Очевидно, $\text{mes}_{N-1} G = \prod_{j=2}^N \text{mes}_1 G_j$, где $\text{mes}_1 G_j$ — длина интервала, на котором определена компонента x_j вектора X . Для плотности вида (3) характерно то, что при $\sigma^2 \rightarrow 0$ она «концентрируется вблизи» $N-1$ -мерной гиперповерхности Γ , определяемой уравнением $T(x) = 0$.

В настоящей статье исследуется проблема выбора матрицы H , $|H| > 0$, возникающая при построении оценки (1) по выборке A ограниченного объема [3]. Предлагается в качестве H использовать не фиксированную матрицу [4], а специальным образом построенные статистики. Для оценки (1) с оцениваемой по выборке матрицей H предлагается способ построения коэффициентов размытости.

2. Меры точности оценки плотности. Введем обозначения: $S, S^{(i, m)} = (s_{jk}^{(i, m)})$ — соответственно фиксированная и выборочная (по выборке $A_i = \{X_j, j = \overline{1, n}, j \neq i\}$ объема $m = n-1$) ковариационные матрицы, причем