НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ДОМИНАНТНО-ПОРОГОВОГО ГРАФА

О.В. Максимович

В данной работе для доминантно-пороговых графов вводится новый тип декомпозиции – нормальная форма доминантно-порогового графа. Доказана однозначность нормальной формы и на этой основе разработан линейный по времени алгоритм, строящий для доминантно-порогового графа его нормальную форму. Также доказано, что доминантно-пороговые графы с совпадающими степенями вершин изоморфны.

Граф G с множеством вершин VG называется доминантно-пороговым, если существуют неотрицательная вещественнозначная функция $w : VG \to \mathrm{R}_+$ и число $\theta \in \mathrm{R}_+$ такие что $\sum_{v \in U} w(v) \geq \theta$, если и только если U – доминирующее подмножество вершин графа G [1]. Класс доминантно-пороговых графов является ближайшим расширением широко известного и важного класса пороговых графов [2]. Оба эти класса графов и некоторые их применения детально описаны в монографии [3]. Цитируемые ниже свойства пороговых и доминантно-пороговых графов взяты из этой книги.

Пусть

$$A = \{K_n \mid n = 1,2,\ldots\},\ B = \{O_n \mid n = 1,2,\ldots\},\ C = \{J_{2n} \mid n = 1,2,\ldots\}.$$

Здесь K_n и O_n – полный и пустой n-вершинные графы соответственно, $J_{2n} = \overline{nK_2}$ – дополнительный граф к совершенному паросочетанию nK_2.

Положим $S = A \cup B \cup C$. Элементы множества S назовем b-боксами (building boxes). Выделим три разных типа b-боксов: A-боксы – элементы множества A, B- и C-боксы – элементы множества B и, соответственно, множества C. b-боксы разных типов будем различать, даже если они совпадают как графы. Например, O_2 и J_2 – различные b-боксы.

Напомним две известные теоретико-графовые операции: $\cup$ и $\oplus$. Пусть $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1,2$ – два графа и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Дизъюнктным объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G_1 \cup G_2 = (V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Соединением графов G_1 и G_2 называется граф $G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2 + \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$,
к дизъюнктному объединению $G_1 \cup G_2$ добавляются все ребра полного двудольного графа с долями V_1 и V_2.

Теперь определим произведение конечной последовательности b-боксов. Для b-бокса D и произвольного графа G положим

$$D \circ G = \begin{cases} D \oplus G, & \text{если D является A- или C-боксом;} \\ D \cup G, & \text{для B-бокса D.} \end{cases} \qquad (1)$$

Произведение $D_1 \circ D_2$ также определим формулой (1), считая D_2 просто графом. Для $p \geq 3$ положим

$$D_1 \circ D_2 \circ \ldots \circ D_p = D_1 \circ (D_2 \circ \ldots \circ D_p). \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) означают, что для любых $p \geq 1$ b-боксов D_i

$$D_1 \circ D_2 \circ \ldots \circ D_p = D_1 \circ (D_2 \circ (\ldots (D_{p-1} \circ D_p) \ldots)). \qquad (3)$$

В [3] (и независимо в [4]) доказана следующая

Теорема 1 (в другой терминологии).

Граф G является доминантно-пороговым, если и только если он может быть представлен в виде произведения

$$G = D_1 \circ D_2 \circ \ldots \circ D_p \qquad (4)$$

произвольных b-боксов.

Граф G является пороговым, если и только если он может быть представлен в виде произведения (4) A- или B-боксов.

Замечание. Из определения умножения боксов очевидно вытекает, что в формуле (4) последний сомножитель D_p фигурирует как простой граф, а не как бокс. Поэтому, например, $D_p = J_2$ и $D_p = O_2$ совпадают как графы.

Разложения графа на b-боксы, получающиеся одно из другого только перестановками b-боксов, описанными в пункте 1, не будем различать. Добавим еще, что произведение b-боксов одного типа является b-боксом того же типа.

Представление графа G в виде произведения b-боксов (4) назовем нормальной формой, если оно удовлетворяет следующим условиям 1–3:

1. типы любых двух соседних b-боксов D_i, D_{i+1} различны;
2. если ни один из b-боксов D_i, D_{i+1} не есть B-бокс, то D_i является A-боксом, а D_{i+1} - C-боксом;
3. если D_i, D_{i+k} – b-боксы типа B, $k > 1$ и каждый из промежуточных b-боксов D_j имеет тип A или C, то $k \leq 3$.

Утверждение 1 [3]. В каждом пороговом графе есть либо изолированная, либо доминирующая вершина.

Утверждение 2 [3]. В каждом n-вершинном доминантно-пороговом графе есть либо изолированная вершина, либо доминирующая вершина, либо вершина степени $n - 2$.

Утверждение 3 [3]. Индуцированный подграф порогового (доминантно-порогового) графа также является пороговым (доминантно-пороговым).

Из этих утверждений и теоремы 1 непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. Для каждого доминантно-порогового графа существует нормальная форма.

Добавим еще несколько определений.

Степенная последовательность графа G – это список степеней его вершин:

$$d = (d_1, \ldots, d_n), \quad d_i = \deg v_i, \quad \{v_1, \ldots, v_n\} = VG. \qquad (5)$$

Графическая последовательность d – это степенная последовательность некоторого графа (реализации последовательности d). Графическая последовательность называется потенциально P-графической (для фиксированного свойства P), если существует ее реализация, имеющая свойство P.

Теорема 3. Нормальная форма доминантно-порогового графа определена однозначно.

Теорема 4. Для каждой потенциально доминантно-пороговой последовательности существует единственная (с точностью до изоморфизма) доминантно-пороговая реализация.

Доказательство теорем 3 и 4. Пусть (5) – потенциально доминантно-пороговая последовательность, удобно считать ее невозрастающей. Перепишем последовательность d в виде $d = (c_1^{m_1}, \ldots, c_k^{m_k})$, где m_i – число вершин степени c_i и $c_{i+1} < c_i$. Положив $C_i = (c_i^{m_i})$, получим разложение последовательности d на боксы (или боксовую форму последовательности d)

$$d = (C1, C2, \ldots, Ck \qquad (6)$$

Разложению (6) соответствует разбиение ($V_1, V_2, \ldots, V_k$) множества вершин VG на боксы, где V_i – множество вершин степени c_i. Порожденные этими боксами подграфы $G(V_i)$ обозначим G_i, $i = 1,\ldots,k$.

Пусть теперь G - произвольная доминантно-пороговая реализация последовательности d, а (4) – нормальная форма графа G. Попробуем с помощью последовательности d восстановить b-бокс D_1 этого разложения.

Это b-бокс, который в процессе «сборки» графа G по формуле (3) добавлялся в последнюю очередь.

Лемма. Если $c_k = 0$, то $D_1 = G_k = O_{m_k}$. Иначе $D_1 = G_1 = K_{m_1}$, если $c_1 = n - 1$, либо $D_1 = J_{m_1}$ если $c_1 = n - 2$ всегда, кроме ситуации, когда в последовательности (6) более одного бокса, $c_1 = n - 2$ и $0 < c_k < m_1$. В этой ситуации в графе G есть только одна вершина a минимальной степени и D_1 совпадает с окружением $N(a)$ этой вершины в графе G. Кроме того $D_1 = J_{2l}$, где $l = c_k$; $D_2 = O_1 = G(\{a\})$; $D_3 = K_p$, где $p = m_1 - c_k$. Таким образом, $C_1 = V(D_1 \cup D_3)$, $G_1 = D_1 \circ D_3$, а нормальная форма (4) имеет вид:

$$G = J_{c_k} \circ O_1 \circ K_{m_1 - c_k} \circ \ldots$$

Утверждения обеих теорем просто вытекают из леммы. В предыдущих обозначениях имеем следующее. Первый b-бокс D1 графа G однозначно определяется этим графом, а, следовательно, по индукции и все остальные. Таким образом, теорема 3 доказана.

Пусть теперь G' - еще одна доминантно-пороговая реализация последовательности d и $G' = D'_1 \circ \ldots \circ D'_{p'}$. В силу леммы, b-боксы Di и D'_i изоморфны, а изоморфизм графов G и G' получается как произведение изоморфизмов b-боксов. Теорема 4 доказана.

На основе теорем 3 и 4 разработан алгоритм, строящий для произвольного графа его нормальную форму за линейное время. Эта форма оказалась удобной и для некоторых алгоритмических задач (например задачи «Гамильтонова цепь» и «L(2, 1)-раскраска», являющиеся в общем случае NP-полными [5]).

Также из теоремы 4 вытекает, что любой граф, априори являющийся доминантно-пороговым, определяется степенями своих вершин (хотя, в отличие от пороговых графов, не обязан быть униграфом).

Работа выполнена в БГУ в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели» (2006–2010 гг.).

Литература

1. *Benzaken C., Hammer P.L.* Linear Separation of Dominating Sets in Graphs // Annals of Discrete Math., 1978. Vol. 3. P. 1–10.
2. *Chvatal V., Hammer P. L.* Research Report CORR 73-21, University Waterloo, 1973.
3. *Mahadev N.V.R., Peled U.N.* Threshold Graphs and Related Topics. Elsevier, 1995.
4. *Тышкевич Р. И., Черняк А.А.* Декомпозиция графов // Кибернетика, 1985. № 2. С. 67–74.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительная математика и труднорешаемые задачи. М., 1982.