назовем хеллиевой размерностью графа и будем обозначать hd(G).

Сформулируем задачу о нахождении хеллиевой размерности следующим образом:

Дан граф G и функция f следующего вида: $f(G)=\{r\in N\colon \mathrm{hd}(G)>r\}$. Требуется определить для заданного графа число элементов во множестве $f(G)$.

Очевидно, что $|f(G)|$ и будет хеллиевой размерностью графа.

Теорема 1. Задача нахождения хеллиевой размерности #P-полна.

Доказательство. Покажем, что $f\in$#P. Действительно, существует полиномиальный алгоритм, определяющий, для фиксированного числа r, является ли граф r-мино. За полиномиальное время можно проверить для любого числа r и графа G, верно ли что $r\in f(G)$. Таким образом, первый пункт определения 1 выполняется. Второй пункт также, очевидно, выполняется в силу того, что в качестве следов используются натуральные числа. Итак, $f\in$#P по определению.

Покажем теперь, что f – #P-сложная. Для этого необходимо для некоторой #P-полной задачи g доказать, что g можно вычислить с помощью некоторого числа элементарных операций и вычислений функции f. В качестве такой задачи рассмотрим следующую #P-полную задачу подсчета g: дан граф G, определить число максимальных клик в нем. В этом случае множеством следов будут являться максимальные клики графа G. Известно, что эта задача является #P-полной [4].

Очевидно, что число максимальных клик в графе G совпадает с числом хеллиевой размерности графа $G+x$, где x – доминирующая вершина. Таким образом, $|g(G)|=|f(G+x)|$ и задача f является #P-полной. Теорема доказана.

Литература

1. *Metelsky Y., Tyshkevich R.* Line graphs of Helly hyperhgraphs // SIAM Journal of Discrete Mathematics. 16. 2003. No. 3. 438–448.
2. *Morgan D.* Useful names for vertices: An introduction to dynamic implicit informative labeling schemes // TR05-04. University of Alberta. 2005.
3. *Krylou Y.V., Perez Tchernov A.J.* An efficient algorithm of r-mino recognizing // Texts in Algorithmics. Third ACID Workshop. 2007. Vol. 9. P. 148.
4. *Valiant L.G.* The complexity of enumeration and reliability problems // SIAM J. Comput. Vol.8. 1979. 410–421.

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Д.А. Ляхов

Гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения в классе сильных решений изучались в [1, 2]. В данной работе доказаны теоремы существования и единственности слабых решений задачи Коши для таких уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ на ограниченном интервале $]0,T[$ рассматривается задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A(t)u = f,\ t \in]0,T[, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0,\ \frac{du}{dt}\bigg|_{t=0} = u_1,\ u_0, u_1 \in H. \tag{2}$$

Здесь u и f – функции переменной t со значениями в H, $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, удолетворяющие следующим условиям.

I. Операторы $A(t)$, $t \in [0,T]$, самосопряжены в H и

$$(A(t)u, u) \geq c_1 |u|^2\ \forall u \in D(A(t)),\ c_1 > 0. \tag{3}$$

II. При всех $t \in [0,T]$ обратные операторы $A^{-1}(t)$ сильно непрерывны и дифференцируемы по t в H, сильная производная $dA^{-1}(t)/dt \in B([0,T], £(H))$ и

$$((dA^{-1}(t)/dt)g, g) \leq c_2 (A^{-1}(t)g, g)\ \forall g \in H,\ c_2 \geq 0 \tag{4}$$

III. При почти всех $t \in]0,T[$ операторы $dA^{-1}(t)/dt$ сильно дифференцируемы по t в H, сильная производная $d^2A^{-1}(t))/dt^2 \in L_\infty(]0,T[, £(H))$ и

$$|((d^2A^{-1}(t)/dt^2)g, v)| \leq c_3 |g||A^{-1/2}(t)v|\ \forall g, v \in H,\ c_3 \geq 0,$$

где $A^{-1/2}(t)$ – обратные операторы к квадратному корню $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$.

Исследуем корректность в слабом смысле задачи Коши (1) – (2).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ.

Корректность задачи Коши (1) – (2) будем изучать в классе слабых решений.

Определение 1. Функция $u \in \mathbb{H} = L_2(]0,T[, H)$ называется <u>слабым решением</u> задачи Коши (1) – (2) для заданных $f \in \mathbb{H}$ и $u_0, u_1 \in H$, если

$$\int_0^T \left\{ (u, A(t)\varphi) + \left(u, \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \right\} dt = \int_0^T (f,\varphi)dt - \left(u_0, \frac{d\varphi(0)}{dt} \right) + (u_1, \varphi(0)) \ \forall \varphi \in \Phi, \quad (5)$$

где множество

$\Phi = \{\varphi \in \mathbb{H} : \varphi(t) \in D(A(t)),\ t \in [0,T];\ A(t)\varphi,\ \ d\varphi/dt,\ d^2\varphi/dt^2 \in \mathbb{H},$
$\varphi(T) = d\varphi(T)/dt = 0\}$.

Ясно, что каждое сильное решение (определение сильных решений см. в [1, 2]) этой задачи Коши является её слабым решением, но обратное не верно.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ.

Сначала установим существование слабых решений задачи Коши.

Теорема 1. *Если выполняются условия I и II, то для любых* $f \in \mathbb{H}$, $u_0, u_1 \in H$ *существует слабое решение* $u \in \mathbb{H}$ *задачи Коши* (1) – (2).

Доказательство состоит в применении следующей проекционной теоремы [3].

Теорема 2. *Пусть F – гильбертово пространство с нормой* $\|\cdot\|$ *и Ф – предгильбертово пространство с нормой* $|||\cdot|||$, *непрерывно вложенное в F, то есть существует постоянная* $c_4 > 0$, *что* $\|\varphi\| \le c_4 |||\varphi||| \ \forall \varphi \in \Phi$. *Задана на* $F \times \Phi$ *полуторалинейная форма* $E(w,\varphi)$, *которая при каждом* $\varphi \in \Phi$ *непрерывна по w на F, и существует постоянная* $c_5 > 0$, *что*

$$|E(\varphi,\varphi)| \ge c_5 |||\varphi|||^2 \ \forall \varphi \in \Phi. \quad (6)$$

Если антилинейный функционал $L(\varphi)$ непрерывен по $\varphi \in \Phi$, то существует элемент $w \in F$, удовлетворяющий уравнению

$$E(w,\varphi) = L(\varphi) \ \forall \varphi \in \Phi.$$

Введем гильбертово пространство $F = \{w \in \mathbb{H},\ dw/dt \in \mathbb{H}\}$ с эрмитовой нормой $\|w\| = \left[\int_0^T \left(|w|^2 + |dw/dt|^2 \right) dt \right]^{1/2}$, а за предгильбертово пространство Φ возьмем из определения 1 множество Φ, наделенное эрмитовой нормой

$$|||\varphi||| = \left[\int_0^T \left(|\varphi|^2 + \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|^2 \right) dt + \left| \frac{d\varphi(0)}{dt} \right|^2 + |\varphi(0)|^2 \right]^{1/2}.$$

Зададим на $F \times \Phi$ полуторалинейную форму E и на Φ антилинейный функционал L следующим образом:

$$E(w,\varphi)=-\int_0^T e^{ct}\left\{\left(\frac{dw}{dt},A(t)\varphi\right)+\left(\frac{dw}{dt},\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\right\}dt\ \ \forall c\geq 0,$$

$$L(\varphi)=\int_0^T (f,\varphi)dt-\left(u_0,\frac{d\varphi(0)}{dt}\right)+(u_1,\varphi(0)).$$

Очевидно, что Φ непрерывно вложено в F при $c_4=1$, $E(w,\varphi)$ при каждом $\varphi\in\Phi$ непрерывна по w на F и $L(\varphi)$ непрерывен по $\varphi\in\Phi$. Для получения неравенства (6) разобьем $E(\varphi,\varphi)$ на два слагаемых $I_1(\varphi)=\int_0^T e^{ct}(d\varphi/dt,A(t)\varphi)dt$ и $I_2(\varphi)=\int_0^T e^{ct}(d\varphi/dt,d^2\varphi/dt^2)dt$. Используя свойство $A_\varepsilon^{-1}(t)g\to g\ \forall g\in H$ при $\varepsilon\to 0$ сглаживающих операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon A(t))^{-1}$, формулу

$$\frac{d}{dt}(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))=-A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)$$

из [1] и оценку (4), после интегрирования по частям по t находим

$$2\operatorname{Re}I_1(\varphi)=-2\operatorname{Re}\int_0^T e^{ct}(\varphi',A(t)\varphi)dt=-\lim_{\varepsilon\to 0}2\operatorname{Re}\int_0^T e^{ct}(A_\varepsilon^{-1}(t)\varphi',A(t)\varphi)dt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(A_\varepsilon^{-1}(t)\varphi,A(t)\varphi)\Big|_{t=0}+c\int_0^T e^{ct}(A_\varepsilon^{-1}(t)\varphi,A(t)\varphi)dt+\int_0^T e^{ct}\left(\varphi,\frac{d}{dt}(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))\varphi\right)dt\right\}\geq$$

$$\geq(A(t)\varphi,\varphi)\Big|_{t=0}+(c-c_2)\int_0^T e^{ct}(A(t)\varphi,\varphi)dt.$$

Интегрируя по частям $I_2(\varphi)$ по t, имеем

$$2\operatorname{Re}I_2(\varphi)=\left|\frac{d\varphi(0)}{dt}\right|^2+c\int_0^T e^{ct}\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|^2dt.$$

Используя оценку (3), отсюда при всех $c\geq c_2$ приходим к неравенству

$$2\operatorname{Re}E(\varphi,\varphi)\geq(c-c_2)c_1\int_0^T e^{ct}|\varphi|^2dt+c\int_0^T e^{ct}\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|^2dt+c_1|\varphi(0)|^2+\left|\frac{d\varphi(0)}{dt}\right|^2.$$

Если здесь взять $c=c_6=c_2+1$, то нетрудно получить оценку $|E(\varphi,\varphi)|\geq\operatorname{Re}E(\varphi,\varphi)\geq c_4\,|||\varphi|||^2\ \ \forall\varphi\in\Phi$, где $c_4=(1/2)\max\{c_1,c_2+1,\ 1\}$.

Таким образом, доказано существование функции $w\in F$, которая является решением уравнения $E(w,\varphi)=L(\varphi)\ \ \forall\varphi\in\Phi$ и, следовательно, функция $u=-\exp\{c_6t\}(dw/dt)$ является слабым решением задачи Коши (1) – (2) для данных $f\in\mathbb{H}$, $u_0,u_1\in H$. Теорема 2 доказана.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ.

Для доказательства единственности слабых решений достаточно показать, что для правой части $f=0$ и начальных данных $u_0=u_1=0$ задача Коши (1) – (2) имеет только слабое решение $u=0$ в $\mathbb{H}$.

Теорема 3. Если выполнены условия I – III, то при всех $f \in \mathbb{H}$, u_0, $u_1 \in H$ существуют единственные слабые решения задачи Коши (1) – (2).

Доказательство. Подставляя $f=0$ и $u_0=u_1=0$ в (5), приходим к тождеству

$$\int_0^T \left\{ (u, A(t)\varphi) + \left(u, \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \right\} dt = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi . \tag{8}$$

В этом тождестве сделаем замену переменной $t = T - \tau$. Тогда новой неизвестной функцией станет $\tilde{u}(\tau) = u(T-\tau)$, операторы $\tilde{A}(\tau) = A(T-\tau)$ при всех $\tau \in [0,T]$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 1 из [2], функции $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(T-\tau)$ принадлежат области определения

$$D_0(L) = \{\phi \in \mathbb{H} : \phi(t) \in D(\tilde{A}(t)),\ t \in [0,T];\ \tilde{A}(t)\phi,\ \ d\phi/dt,\ \ d^2\phi/dt^2 \in \mathbb{H},\\ \phi(T) = d\phi(T)/dt = 0\}.$$

оператора L из [2] и тождество (8) становится тождеством

$$((\tilde{u}, \mathrm{L}\tilde{\varphi})) = 0 \ \ \forall\ \tilde{\varphi} \in D_0(L) = \{\phi \in \mathbb{H} : \phi(t) \in D(\tilde{A}(t)),\ t \in [0,T];\ \tilde{A}(t)\phi,\\ d\phi/dt,\ \ d^2\phi/dt^2 \in \mathbb{H}, \phi(T) = d\phi(T)/dt = 0\}.$$

Поэтому по лемме 1 из [2] функция $u(t) = \tilde{u}(\tau) = 0$. Теорема 3 доказана.

Литература

5. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференциальные уравнения. 1992. т. 28, №5. с. 873-886.
6. *Ломовцев Ф.Е.* // Докл. НАН РБ. 2001. Т. 45, № 1. с. 34-36

Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Москва, Мир. 1968.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕГО ДВИЖИТЕЛЯ

С. А. Гляков, А. О. Громыко

Цель работы – изложение результатов использования методики создания компьютерных моделей колесно-шагающих движителей (КШД) [1] в пакетах ADAMS и VisualNastran, исследование механизма для организации наиболее эффективных режимов его передвижения и поворота.

Новизна исследуемых в работе концепций, нетрадиционного способа движения машины, основанного на совмещении двух способов движения