Непрерывные дроби и S-единицы в гиперэллиптических полях

В. В. Беняш-Кривец, В. П. Платонов

Настоящая заметка преследует двойную цель: изложить некоторые результаты о непрерывных дробях в функциональных полях и показать, как непрерывные дроби могут быть использованы для нахождения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях.

Пусть k – произвольное поле, $k(x)$ – поле рациональных функций от одной переменной над k. Для многочлена $v=x-a$ через $|\cdot|=|\cdot|_v$ будем обозначать нормирование, соответствующее v. Пополнение поля $k(x)$ относительно нормирования $|\cdot|_v$ можно отождествить с полем формальных степенных рядов $k((v))$. Продолжение нормирования $|\cdot|$ на $k((v))$ по-прежнему будем обозначать через $|\cdot|$.

Непрерывные дроби в функциональных полях в случае нормирования $|\cdot|_\infty$ были впервые введены Э. Артином [1]. Мы рассматриваем случай нормирования $|\cdot|_v$. Для элемента $\beta=\sum_{i=-s}^{\infty} d_i v^i \in k((v))$ положим $[\beta]=\sum_{i=-s}^{0} d_i v^i \in k[v^{-1}]$. Пусть $a_0=[\beta]$. Если $\beta-a_0\ne 0$, то положим $\beta_1=1/(\beta-a_0)\in k((v))$, $a_1=[\beta_1]$. Далее по индукции определяем элементы a_i, β_i: если $\beta_{i-1}-a_{i-1}\ne 0$, то $\beta_i=1/(\beta_{i-1}-a_{i-1})$, $a_i=[\beta_i]$. Этот процесс оборвется тогда и только тогда, когда $\beta\in k(v)$. Будем использовать стандартную сокращенную запись для непрерывной дроби $\beta=[a_0;a_1,a_2,\dots]$.

Определим по индукции элементы $p_i,q_i\in k[v^{-1}]$. Положим $p_{-2}=0$, $p_{-1}=1$, $q_{-2}=1$, $q_{-1}=0$ и если $n\geqslant 0$, то $p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$, $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$. Тогда $p_n,q_n\in k[v^{-1}]$ и $p_n/q_n=[a_0;a_1,\dots,a_n]$ при $n\geqslant 0$. Для $n\geqslant -1$ справедливы соотношения

$$q_np_{n-1}-p_nq_{n-1}=(-1)^n,\quad q_n\beta-p_n=\frac{(-1)^n}{q_n\beta_{n+1}+q_{n-1}}\,,\quad \beta=\frac{p_n\beta_{n+1}+p_{n-1}}{q_n\beta_{n+1}+q_{n-1}}\,. \tag{1}$$

Дробь p_n/q_n называют n-й подходящей дробью к β. Нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\beta.$$

По построению, $|a_n|=|\beta_n|<0$. Из (1) по индукции легко получить соотношения

$$|q_n|=\sum_{j=1}^{n}|a_j|,\qquad |q_n\beta-p_n|=-|q_{n+1}|>-|q_n|. \tag{2}$$

Введем понятие наилучшего приближения. Дробь p/q, где $p,q\in k[v^{-1}]$, $q\ne 0$, является *наилучшим приближением* к β, если для любой другой дроби a/b, где $a,b\in k[v^{-1}]$, $b\ne 0$, такой, что $a/b\ne p/q$ в $k(v)$ и $|b|\geqslant|q|$, выполнено неравенство $|\beta-p/q|>|\beta-a/b|$. Справедливо

Предложение 1. *Несократимая дробь p/q, где $p,q\in k[v^{-1}]$, $q\ne 0$, является наилучшим приближением к β тогда и только тогда, когда $|\beta-p/q|>-2|q|$ (или, что эквивалентно, $|q\beta-p|>-|q|$).*

Предложение 1 и соотношения (2) немедленно влекут, что n-я подходящая дробь p_n/q_n к β является наилучшим приближением к β. Следующая теорема показывает, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Если a/b является наилучшим приближением к β, то найдутся такая подходящая дробь p_n/q_n к β и такая константа $c\in k^*$, что $a=cp_n$, $b=cq_n$.*

Стандартным образом можно показать, что если непрерывная дробь $[a_0;a_1,a_2,\dots]$ для β является периодической, то β – квадратичная иррациональность. В случае бесконечного поля k обратное утверждение верно не всегда [2]. Всюду ниже мы будем предполагать, что $k = \mathbb{F}_q$ – поле из q элементов и характеристика k не равна 2. Справедливо следующее предложение.

Предложение 2. *Если $\beta \in k((v))$ – квадратичная иррациональность, то непрерывная дробь для β периодична.*

Далее мы покажем, как непрерывные дроби могут быть использованы для нахождения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях. Пусть $d(x) = b_0x^{2n+1} + b_1x^{2n} + \dots + b_{2n+1} \in k[x]$, где $b_0 \neq 0$, – свободный от квадратов многочлен, $K = k(x)(\sqrt{d})$. Предположим, что наше нормирование $|\cdot| = |\cdot|_v$ имеет два продолжения $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ на K. Нормирование $|\cdot|_\infty$ имеет единственное продолжение на K. Пусть $S = \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_1\}$, $\mathcal{O}_S$ – кольцо S-целых элементов в K, $U_S = \mathcal{O}_S^*$ – группа S-единиц поля K. Известно, что группа U_S является прямым произведением группы k^* и свободной абелевой группы G ранга 1. Образующая группы G называется фундаментальной S-единицей.

В [3] найден эффективный алгоритм для вычисления фундаментальной S-единицы. В классическом случае квадратичного расширения $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ поля $\mathbb{Q}$ фундаментальную единицу поля L можно найти, используя разложение $\sqrt{d}$ либо $(\sqrt{d}-1)/2$ в непрерывную дробь. Наша цель – показать, что и в случае гиперэллиптического поля K фундаментальную S-единицу можно найти, используя метод непрерывных дробей. В [3] доказано, что для вычисления фундаментальной S-единицы нужно найти минимальное натуральное m такое, что норменное уравнение

$$f^2 - g^2 d = av^m, \tag{3}$$

где $a \in k^*$, имеет решение в многочленах $f, g \in k[v]$, $g \neq 0$. Тогда либо $f + g\sqrt{d}$, либо $f - g\sqrt{d}$ является фундаментальной S-единицей. Следующая теорема дает алгоритм для нахождения фундаментальной S-единицы с помощью непрерывных дробей.

Теорема 2. *Пусть m – такое минимальное натуральное число, что норменное уравнение* (3) *имеет решение в многочленах $f, g \in k[v]$, $g \neq 0$.*

1. *Если m нечетно, то $f/g = p_n/q_n$ для некоторой подходящей дроби p_n/q_n к $\sqrt{d}$.*
2. *Если $m = 2t$ четно, то найдется делитель h многочлена d, обладающий следующими свойствами*: i) $1 \leqslant \deg h \leqslant (\deg d - 1)/2$; ii) *уравнение*

$$hf_1^2 - \frac{d}{h}\, g_1^2 = bv^t, \tag{4}$$

где $b \in k^*$, имеет решение в многочленах $f_1, g_1 \in k[v]$, при этом $f_1/g_1 = p_n/q_n$ для некоторой подходящей дроби p_n/q_n к $\sqrt{d/h}$. Наоборот, если $f_1, g_1 \in k[x]$ – решение уравнения (4), *то многочлены f и g, определяемые по формулам $f = hf_1^2 + (d/h)g_1^2$, $g = 2f_1g_1$, являются решением норменного уравнения* (3).

Список литературы

[**1**] E. Artin, *Math. Z.*, **19**:1 (1924), 153–206. [**2**] W. W. Adams, M. J. Razar, *Proc. London Math. Soc.* (3), **41**:3 (1980), 481–498. [**3**] В. В. Беняш-Кривец, В. П. Платонов, *Докл. РАН*, **417**:4 (2007), 446–450; англ. пер.: V. V. Benyash-Krivets, V. P. Platonov, *Dokl. Math.*, **76**:3 (2007), 886–890.

В. В. Беняш-Кривец (V. V. Benyash-Krivets)
Белорусский государственный университет
E-mail: benyash@bsu.by

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
12.02.2008

В. П. Платонов (V. P. Platonov)
Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН
E-mail: platonov@niisi.ras.ru