УДК 512.543.76

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, СЮИН ХУА

О РАЗЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП В СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ С ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

(Представлено академиком И.В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск. *Поступило*

Будем говорить, что группа G разложима, если G является нетривиальным свободным произведением с объединенной подгруппой, т.е. $G = G_1 *_A G_2$, где $G_1 \neq A$ и $G_2 \neq A$ [1, гл.4].

В предлагаемой работе мы исследуем проблему разложимости обобщенных тетраэдральных групп, т.е. групп G, имеющих копредставление вида

$$G = \left\langle a,b,c;\ a^m = b^n = c^k = R_1^l(a,b) = R_2^f(a,c) = R_3^g(b,c) = 1 \right\rangle, \tag{1}$$

где R_1, R_2, R_3 — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a, b, c. Не все из этих групп разложимы. Например, Цишанг [2] доказал, что обычные треугольные группы $\Gamma = \left\langle a,b;\ a^m = b^n = (ab)^k = 1 \right\rangle$, где $m,\ n,\ k \geq 2$, неразложимы. С другой стороны, в [3] доказано, что обобщенные треугольные группы $H = \left\langle a,b;\ a^m = R^k(a,b) = 1 \right\rangle$, где $k \geq 2$, разложимы. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть G – обобщенная тетраэдральная группа, имеющая копредставление* (1). *Если хотя бы одно из чисел $m,\ n,\ k,\ l,\ f,\ g$ равно нулю, то группа G разложима.*

Ниже мы будем обозначать кольцо целых алгебраических чисел в $\mathbb{C}$ через $\mathcal{O}$, группу обратимых элементов в $\mathcal{O}$ через $\mathcal{O}^*$, образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$ через $[A]$. Для доказательства теоремы нам необходимы вспомогательные леммы.

Л е м м а 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и X – матрица из $SL_2(\mathbb{C})$, отличная от $\pm E$. Тогда $[X]^m = 1$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{tr} X = 2\cos\dfrac{r\pi}{m}$ *для некоторого* $r \in \{1,\ldots,m-1\}$.

Для произвольного элемента $w \in F_3$, где F_3 – свободная группа с базисом x_1, x_2, x_3, рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_w : SL_2(\mathbb{C})^3 \to \mathbb{C},\ \tau_w(A,B,C) = \operatorname{tr} w(A,B,C).$$

В [4] доказано, что если $w = x_i^{\alpha_1} x_j^{\beta_1} \cdots x_i^{\alpha_s} x_j^{\beta_s} \in F_3$, то $\tau_w = Q_w(\tau_{x_i}, \tau_{x_j}, \tau_{x_i x_j})$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами. Фунцию τ_w обычно называют характером Фрике, а многочлен Q_w – многочленом Фрике элемента w. Справедливы следующие соотношения между характерами Фрике:

$$\tau_{w^{-1}} = \tau_w, \quad \tau_{uv} = \tau_u \tau_v - \tau_{u^{-1}v}. \tag{2}$$

Л е м м а 2. *Для произвольных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_6 \in \mathbb{C}$ существуют матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что* $\operatorname{tr} A = a_1$, $\operatorname{tr} B = a_2$, $\operatorname{tr} C = a_3$, $\operatorname{tr} AB = a_4$, $\operatorname{tr} AC = a_5$, $\operatorname{tr} BC = a_6$.

Эту лемму нетрудно доказать непосредственным вычислением. Далее, нам нужна более детальная информация о многочленах Фрике (см. [5]). Рассмотрим многочлены $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0,\ P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. Индукцией по n легко проверить, что

$$P_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \tag{3}$$

Из (3) следует, что многочлен $P_n(x)$, $n \geq 1$, имеет n нулей, определенных формулой

$$x_{n,k} = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Далее, пусть $w = g^{u_1}h^{v_1}\ldots g^{u_s}h^{v_s}$ – циклически редуцированное слово в свободной группе $F_2 = \langle g, h\rangle$ и пусть $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$. В [6] доказано, что многочлен Фрике Q_w имеет вид

$$Q_w(x, y, z) = M_s(x, y)z^s + \cdots + M_0(x, y), \tag{5}$$

где $M_s(x, y) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i - 1}(x)P_{v_i - 1}(y)$.

Л е м м а 3. *Пусть* ε *– примитивный корень из* 1 *степени* n, $L_n = \mathbb{Q}(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) = \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})$, p *– простое число. Тогда*

1) *если* $(r, p) = 1$, *то* $N_{L_{4p^s}/\mathbb{Q}}(2\sin\frac{r\pi}{p^s}) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}} p, & \text{если } p > 2, \\ 2, & \text{если } p = 2, \end{cases}$

2) *если* $n > 2$, n *не являетсся степенью простого числа и* $(r, n) = 1$, *то* $2\sin\frac{r\pi}{n} \in \mathcal{O}^*$.

Л е м м а 4. *Пусть* $G = \langle a, b, c \mid a^m = b^n = R_1^l(a, b) = R_2^f(a, c) = R_3^g(b, c) = 1\rangle$, *где* $m, n, l, f, g \geq 2$. *Предположим, что существуют такие матрицы* $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$, *что*

$$\operatorname{tr} A = \alpha = 2\cos\frac{\pi}{m}, \ \operatorname{tr} B = \beta = 2\cos\frac{\pi}{n}, \ \operatorname{tr} R_1(A, B) = Q_{R_1}(\alpha, \beta, z_1) = 2\cos\frac{\pi}{l},$$

$$trR_2(A, C) = Q_{R_2}(\alpha, x, z_2) = 2\cos\frac{\pi}{f}, \ trR_3(B, C) = Q_{R_3}(\beta, x, z_3) = 2\cos\frac{\pi}{g},$$

где $x = \operatorname{tr} C$, $z_1 = \operatorname{tr} AB$, $z_2 = \operatorname{tr} AC$, $z_3 = \operatorname{tr} BC$, Q_{R_i} *– многочлен Фрике элемента* R_i. *Пусть* $H = \langle A, B, C\rangle$ *– группа, порожденная матрицами* A, B *и* C. *Предположим , что выполнены следующие два условия:*

1) *существует унипотентный (либо конечного порядка) элемент* $W \in H$ *вида* $W = A^{\alpha_1}C^{\beta_1}\cdots A^{\alpha_s}C^{\beta_s}$ (α_i, $\beta_i \neq 0$ *для* $i = 1, \ldots, s$) *такой, что* $\sum_{i=1}^{s}\beta_s \neq 0$;

2) *существует элемент* $h \in H$ *такой , что* $\operatorname{tr} h \notin \mathcal{O}$.

Тогда группа G *разложима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства этой леммы используем классификацию Басса конечно порожденных подгрупп в $GL_2(\mathbb{C})$. В [6] доказано, что если $H \subset GL_2(\mathbb{C})$ – конечно порожденная подгруппа, то имеет место один из следующих случаев:

1) существует эпиморфизм $f : H \to \mathbb{Z}$ такой, что $f(u) = 0$ для всех унипотентных элементов $u \in H$;

2) $\operatorname{tr} h \in \mathcal{O}$ для любого элемента $h \in H$;

3) H разложима.

Легко видеть, что группа H из леммы не удовлетворяет случаям 1), 2). В самом деле, предположим, что $f : H \to \mathbb{Z}$ – такой эпиморфизм, что $f(u) = 0$ для любого унипотентного элемента $u \in H$. Тогда $f(A) = f(B) = 0$, поскольку A и B имеют конечный порядок по лемме 1. Далее,

$$f(W) = f(C)\sum_{i=1}^{s} \beta_s = 0,$$

поскольку по условию W либо унипотентен, либо имеет конечный порядок. Следовательно, $f(C) = 0$. Значит, $f(H) = \{0\}$ – противоречие. По условию леммы, H не удовлетворяет также случаю 2). Следовательно, H разложима, т.е. $H = H_1 *_F H_2$, где $H_1 \neq F \neq H_2$. Пусть $\overline{H}$, $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$, $\overline{F}$ – образы H, H_1, H_2, F в $PSL_2(\mathbb{C})$. Если $-E \notin H$, то группы H и $\overline{H}$ изоморфны. Если же $-E \in H$, то $-E$ лежит в центре H, следовательно $-E \in F$. В любом из этих случаев, $\overline{H}_1 \neq \overline{F} \neq \overline{H}_2$ и, следовательно, $\overline{H} = \overline{H}_1 *_{\overline{F}} \overline{H}_2$.

Далее, условие леммы и лемма 1 влекут, что

$$[A]^m = [B]^n = R_1^l([A],[B]) = R_2^f([A],[C]) = R_3^g([B],[C]) = 1\,.$$

Таким образом, $\overline{H}$ является эпиморфным образом G, поэтому G также разложима. Лемма доказана.

Л е м м а 5. 1) *Многочлен* $P_s(x) - P_{s-1}(x)$ *имеет корни* $x_r = 2\cos\dfrac{(2r+1)\pi}{2s+1}$, *где* $r \in \{0,1,\ldots,s-1\}$.

2) *Если* $\gamma = 2\cos\dfrac{2r\pi}{2s+1}$, *где* $s \geq r$, *то* $P_s(\gamma) - P_{s-1}(\gamma) \notin \mathcal{O}^*$.

3) *Если* $\gamma = 2\cos\dfrac{(2r+1)\pi}{2s}$, *где* $s \geq 2$, $(s, 2r+1) = 1$, *то* $0 \neq P_{s-1}(\gamma) \notin \mathcal{O}^*$.

4) *Пусть* $\gamma \in \mathcal{O}$. *Предположим, что* $\gamma \neq 2\cos\dfrac{r\pi}{s}$, *где* $r, s \in \mathbb{Z}$. *Тогда существует такое* $l \in \mathbb{Z}$, *что* $P_l(\gamma) \notin O^*$.

Лемма 5 доказывается при помощи леммы 3 и формул (3), (4).

Л е м м а 6. *Пусть* $F_2 = < g, h >$ – *свободная группа с образующими* g *и* h. *Положим* $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, $t = \tau_{ghg^{-1}h^{-1}}$. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $t = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$;

2) *Пусть* $R = gh(ghg^{-1}h^{-1})^s$. *Тогда* $\tau_R = (P_s(t) - P_{s-1}(t))z$;

3) *Пусть* $T = (gh)^{-1}(ghg^{-1}h^{-1})^s(gh)^2(ghg^{-1}h^{-1})^s$. *Тогда* $\tau_T = (t-2)P_{s-1}(t)^2 z^3 + (2 - P_{2s-1}(t) + P_{2s-2}(t))z$.

Лемма 6 доказывается по индукции с использованием соотношений (2).

Л е м м а 7. *Пусть* $G = \left\langle a, b, c \;\middle|\; a^m = b^n = R_1^l(a,b) = R_2^f(a,c) = R_3^g(b,c) = 1 \right\rangle$, *где* $m,\ n,\ l,\ f,\ g \geq 2$. *Тогда существует такой гомоморфизм*

$$\rho : G \to PSL_2(\mathbb{C}), \quad \rho(a) = [A],\ \rho(b) = [B],\ \rho(c) = [C],$$

что $t_0 = \operatorname{tr} ACA^{-1}C^{-1} \neq 2$. *В частности, представление* ρ *неприводимо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Вначале предположим, что одно из чисел $m,\ n,\ k$ равно нулю. Пусть, например, $k = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $m,\ n,\ l,\ f,\ g \geq 2$ (если какое-то из этих чисел равно нулю, мы можем перейти к подходящей факторгруппе группы G). Таким образом,

$$G = \left\langle a, b, c \;\middle|\; a^m = b^n = R_1^l(a,b) = R_2^f(a,c) = R_3^g(b,c) = 1 \right\rangle.$$

Пусть

$$R_1(a,b) = a^{\alpha_1}b^{\beta_1}\cdots a^{\alpha_s}b^{\beta_s}, \quad R_2(a,c) = a^{\gamma_1}c^{\delta_1}\cdots a^{\gamma_r}c^{\delta_r}, \quad R_3(b,c) = b^{\sigma_1}c^{\lambda_1}\cdots b^{\sigma_k}c^{\lambda_k}.$$

Предположим вначале, что $\max\limits_{i,j}\{|\delta_i|, |\lambda_j|\} \geq 2$. Пусть, например, $\delta_1 = \max\limits_{i,j}\{|\delta_i|, |\lambda_j|\}$.

Положим $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{m}$, $\beta = 2\cos\frac{\pi}{n}$, $x_0 = 2\cos\frac{\pi}{\delta_1}$. Пусть $F_3 = <u, v, w>$ – свободная группа с образующими u, v, w, $x_1 = \tau_u$, $x_2 = \tau_v$, $x_3 = \tau_w$, $z_1 = \tau_{uv}$, $z_2 = \tau_{uw}$, $z_3 = \tau_{vw}$. Рассмотрим многочлены Фрике $Q_{R_1(u,v)}(x_1, x_2, z_1)$, $Q_{R_2(u,w)}(x_1, x_3, z_2)$, $Q_{R_3(v,w)}(x_2, x_3, z_3)$ и уравнения

$$Q_{R_1(u,v)}(\alpha, \beta, z_1) - 2\cos\frac{\pi}{l} = f_1(z_1) = 0,$$

$$Q_{R_2(u,w)}(\alpha, x_3, z_2) - 2\cos\frac{\pi}{f} = f_2(x_3, z_2) = 0,$$

$$Q_{R_3(v,w)}(\beta, x_3, z_3) - 2\cos\frac{\pi}{g} = f_3(x_3, z_3) = 0.$$

В силу (5) эти уравнения имеют вид

$$A_0 z_1^s + \cdots + A_s = 0, \tag{6}$$

$$B_0(x_3) z_2^r + \cdots + B_r(x_3) = 0, \tag{7}$$

$$C_0(x_3) z_3^k + \cdots + C_k(x_3) = 0, \tag{8}$$

где $A_0 = \prod_{i=1}^{s} P_{\alpha_i - 1}(\alpha) P_{\beta_i - 1}(\beta)$, $B_0(x_3) = \prod_{i=1}^{r} P_{\gamma_i - 1}(\alpha) P_{\delta_i - 1}(x_3)$, $C_0(x_3) = \prod_{i=1}^{k} P_{\sigma_i - 1}(\beta) P_{\lambda_i - 1}(x_3)$. Так как $\delta_1 \ge 2$, то $\deg B_0(x_3) \ge 1$. Поскольку в силу (4) x_0 является корнем $P_{\delta_1 - 1}(x_3)$, то x_0 – корень $B_0(x_3)$. Следовательно, $B_0(x_3) = (x_3 - x_0) B_0'(x_3)$. Покажем, что уравнение (7) имеет решение вида: $x_3 = 2\cos\frac{d\pi}{h}$, $z_2 = z_2' \notin \mathcal{O}$. Вначале предложим, что все многочлены $B_1(x_3), \ldots, B_r(x_3)$ делятся на $x_3 - x_0$. Тогда (7) можно записать в виде

$$(x_3 - x_0) f_4(x_3, z_2) = 0. \tag{9}$$

В этом случае можно положить $x_3 = x_0 = 2\cos\frac{\pi}{\delta_1}$, $z_2 = z_2' \notin \mathcal{O}$.

Предположим теперь, что не все многочлены $B_1(x_3), \ldots, B_r(x_3)$ делятся на $x_3 - x_0$. Пусть, например, $B_1(x_3)$ не делится на $x_3 - x_0$. Тогда $0 \ne \delta = B_1(x_0) \in \mathcal{O}$ и $B_1(x_3) = (x_1 - x_3) B_1'(x_3) + \delta$. Выберем простое число p так, что $p \nmid N_{\mathbb{Q}(\delta)/\mathbb{Q}}(\delta)$, $p > \delta_1$. Положим

$$y_0 = 2\cos\frac{(p - 2\delta_1)\pi}{p\delta_1}, \quad K = \mathbb{Q}(\delta, x_0, y_0).$$

Тогда

$$B_0(y_0) = (y_0 - x_0) B_0'(y_0) = \left(2\sin\frac{\pi}{p}\right)\left(2\sin\frac{(p - \delta_1)\pi}{p\delta_1}\right) B_0'(y_0).$$

В силу леммы 3, $p \mid N_{K/\mathbb{Q}}(y_0 - x_0)$. Теперь уравнение (7) при $x_3 = y_0$ можно записать в виде:

$$z_2^r + \frac{B_1(y_0)}{(y_0 - x_0) B_0'(y_0)} z_2^{r-1} + \cdots + \frac{B_r(y_0)}{(y_0 - x_0) B_0'(y_0)} = 0. \tag{10}$$

Заметим, что $\frac{B_1(y_0)}{y_0 - x_0} = B_1'(y_0) + \frac{\delta}{y_0 - x_0}$. Элемент $\frac{\delta}{y_0 - x_0} \notin \mathcal{O}$, поскольку по построению $N_{K/\mathbb{Q}}\left(\frac{\delta}{y_0 - x_0}\right) = \frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\delta)}{N_{K/\mathbb{Q}}(y_0 - x_0)} \notin \mathbb{Z}$ (знаменатель делится на p, а числитель – нет). Это означает, что $\dfrac{B_1(y_0)}{(y_0-x_0)B_0'(y_0)} \notin \mathcal{O}$. Следовательно, уравнение (10) имеет корень $z_2' \notin \mathcal{O}$. Таким образом, в этом случае в качестве искомого решения (7) мы можем взять

$$x_3 = y_0 = 2\cos\frac{(p-2\delta_1)\pi}{p\delta_1}, \quad z_2 = z_2'. \tag{11}$$

Пусть x_3, z_2 выбраны как в (9) либо в (11). В обоих случаях мы имеем $C_0(x_3) \neq 0$, поэтому уравнение (8) имеем некоторое решение z_3' Пусть z_1' – произвольное решение уравнения (6). Тогда найдутся матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = \alpha$, $\operatorname{tr} B = \beta$, $\operatorname{tr} C = x_3$, $\operatorname{tr} AB = z_1'$, $\operatorname{tr} AC = z_2'$, $\operatorname{tr} BC = z_3'$. Мы можем применить лемму 4, заметив, что в качестве W мы можем взять C, а в качестве h – элемент AC. Таким образом, по лемме 4 группа G разложима.

Предположим теперь, что $|\delta_i| = \pm 1$, $|\lambda_j| = \pm 1$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, k$. Случай, когда найдется такое i, что либо $\delta_i = \delta_{i+1}$, либо $\delta_1 = \delta_r$, сводится к рассмотренному выше.

Действительно, пусть для определенности, $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Рассмотрим новую образующую группы G: вместо c возьмем $c_1 = ca^{\gamma_2}$. Тогда $R_2(a,c)$ можно записать как слово от a, c_1 в виде:

$$R_2(a,c_1) = a^{\gamma_1'} c_1^{\delta_1'} a^{\gamma_2'} c_1^{\delta_2'} a^{\gamma_3''} c_1^{\delta_3'} \cdots.$$

При этом $\max|\delta_i'| \geq 2$. Но выше мы уже доказали, что в этом случае группа G разложима.

Таким образом, нам остаётся рассмотреть случай, когда $R_2(a,c) = a^{\gamma_1} c a^{\gamma_2} c^{-1} \cdots a^{\gamma_{2r-1}} c a^{\gamma_{2r}} c^{-1}$. Положим $c_1 = ca^{-1}c^{-1}$. Тогда

$$R_2(a,c) = R_2'(a,c_1) = a^{\gamma_1} c_1^{-\gamma_2} \cdots a^{\gamma_{2r-1}} c_1^{-\gamma_{2r}}.$$

Пусть $F_3 = \langle u, v, w \rangle$ – свободная группа с образующими u, v, w, $u_1 = wu^{-1}w^{-1}$. Сохраним обозначения, введенные выше. Пусть $t = \tau_{uu_1}$. Используя (2), находим, что $t = x_1^2 + x_3^2 + z_2^2 - x_1 x_3 z_2 - 2$. Тогда

$$Q_{R_2(u,w)}(\alpha, x_3, z_2) = Q_{R_2'(u,u_1)}(\alpha, \alpha, t) = q(t).$$

В силу леммы 7 уравнение

$$q(t) = 2\cos\frac{\pi}{f} \tag{12}$$

имеет корень $t_0 \neq 2$. Это дает нам уравнение

$$x_3^2 + z_2^2 - \alpha x_3 z_2 + \alpha^2 - 2 - t_0 = 0. \tag{13}$$

Пусть (x_3', z_2') – произвольное решение (13), z_1' – произвольный корень уравнения (6), а z_3' – корень уравнения $f_3(x_3', z_3) = 0$. Пусть $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$ такие матрицы, что $\operatorname{tr} A = \alpha$, $\operatorname{tr} B = \beta$, $\operatorname{tr} C = x_3$, $\operatorname{tr} AB = z_1'$, $\operatorname{tr} AC = z_2'$, $\operatorname{tr} BC = z_3'$. Чтобы применить лемму 4, нам нужно выбрать такое решение (x_3', z_2') уравнения (13), чтобы были выполнены следующие 2 условия:

1) $z_2' \notin \mathcal{O}$;

2) существует элемент $W(A,C) = A^{u_1} C^{v_1} \cdots A^{u_e} C^{v_e}$ такой, что u_i, $v_i \neq 0$ для $i = 1, \cdots, e$ и $\sum_{i=1}^{e} v_e \neq 0$.

Дальнейшее доказательство зависит от вида t_0. Возможны следующие случаи:

1) $t_0 \notin \mathcal{O}$;

2) $t_0 = 2\cos\dfrac{d\pi}{2i+1}$, где $i \ge 1$, $(d, 2i+1) = 1$;

3) $t_0 = 2\cos\dfrac{d\pi}{2i}$, где $i \ge 1$, $(d, 2i) = 1$; либо $t_0 = -2$, либо $t_0 \in \mathcal{O}$ и $t_0 \ne 2\cos\dfrac{d\pi}{i}$ для любых целых d, i.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1) Положим $x_3 = 0$ и $W(A,C) = C$. Так как $t_0 \notin \mathcal{O}$, то (13) имеет решение $z_2' \notin \mathcal{O}$.

2) Положим $W(A,C) = AC(ACA^{-1}C^{-1})^i$. Тогда по п. 2 леммы 6

$$\operatorname{tr} W(A,C) = (P_i(t_0) - P_{i-1}(t_0))z_2 .$$

Если d – нечетно, то по лемме 5, п. 1, $P_i(t_0) - P_{i-1}(t_0) = 0$ и элемент $W(A,C)$ имеет порядок 4. Выберем произвольное $z_2' \notin \mathcal{O}$ и произвольное решение (x_3', z_2') уравнения (13).

Если d – четно, то потребуем, чтобы

$$\operatorname{tr} W(A,C) = (P_i(t_0) - P_{i-1}(t_0))z_2 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Тогда $W(A,C)$ имеет порядок 6, а по лемме 5, п. 2, $z_2' = \dfrac{1}{P_i(t_0) - P_{i-1}(t_0)} \notin \mathcal{O}$. Далее выбираем произвольное решение (x_3', z_2') уравнения (13).

3) Положим $W(A,C) = (AC)^{-1}(ACA^{-1}C^{-1})^i(AC)^2(ACA^{-1}C^{-1})^i$ и предположим, что

$$\operatorname{tr} W(A,C) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 .$$

Это означает, что $W(A,C)$ имеет порядок 6. Тогда по лемме 6, п. 3,

$$\operatorname{tr} W(A,C) = (t_0 - 2)P_{i-1}(t_0)^2 z_2^3 + (2 - P_{2i-1}(t_0) + P_{2i-2}(t_0))z_2 = 1. \qquad (14)$$

Если $t_0 = 2\cos\dfrac{d\pi}{2i}$, то по лемме 5, п. 3, $P_{i-1}(t_0) \notin \mathcal{O}^*$. Если $t_0 = -2$, то $t_0 - 2 = -4 \notin O^*$. Если $t_0 \in O$ и $t_0 \ne -2$, $t_0 \ne 2\cos\dfrac{d\pi}{i}$ для любых целых d, i, то по лемме 5, п. 4, найдется такое i, что $P_{i-1}(t_0) \notin \mathcal{O}^*$. В каждом из этих случаев уравнение (14) имеет корень $z_2' \notin \mathcal{O}$. Далее выбираем произвольное решение (x_3', z_2') уравнения (13).

Итак, теорема доказана в случае, когда одно из чисел m, n, k равно нулю. Предположим теперь, что $l = 0$, т.е. G имеет копредставление вида

$$G = \langle a, b, c; a^m = b^n = c^k = R_2^f(a,c) = R_3^g(b,c) = 1 \rangle ,$$

где m, n, k, f, $g \ge 2$. Положим $\alpha = 2\cos\dfrac{\pi}{m}$, $\beta = 2\cos\dfrac{\pi}{n}$, $\gamma = 2\cos\dfrac{\pi}{k}$. Пусть τ_a, τ_b, τ_c, τ_{ab}, τ_{ac}, τ_{bc} – характеры Фрике в свободной группе, порожденной $a, b,$ и $Q_{R_2}(\tau_a, \tau_c, \tau_{ac})$, $Q_{R_3}(\tau_c, \tau_{вс}, \tau\ )$ – многочлены Фрике элементов $R_2(a,c)$ и $R_3(b,c)$. Положим $\tau_a = \alpha$, $\tau_в = \beta$, $\tau_c = \gamma$ и рассмотрим уравнения

$$Q_{R_2}(\alpha, \gamma, \tau_{ac}) = 2\cos\frac{\pi}{f}, \qquad (15)$$

$$Q_{R_3}(\beta, \gamma, \tau\ ) = 2\cos\frac{\pi}{g}. \qquad (16)$$

Пусть $\tau_{ac} = y_1$, $\tau_{вс} = y_2$ – корни (15) и (16), и $y_3 = \dfrac{1}{2}$. Рассмотрим матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$

такие, что $\operatorname{tr} A = \alpha$, $\operatorname{tr} B = \beta$, $\operatorname{tr} C = \gamma$, $\operatorname{tr} AB = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tr} AC = y_1$, $\operatorname{tr} BC = y_2$. Тогда группа $H = \langle A, B, C \rangle$ является разложимой в силу упоминавшегося выше результата Басса [7]: не существует эпиморфизма $G \to \mathbb{Z}$ и группа H содержит элемент AB такой, что $\operatorname{tr} AB = \frac{1}{2} \notin \mathbb{O}$. Легко видеть, что образ $\overline{H}$ группы H в $PSL_2(\mathbb{C})$ также разложим и $\overline{H}$ по построению является эпиморфным образом G. Значит, группа G также разложима. Теорема доказана.

Литература

1. Л и н д о н Р., Ш у п п П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
2. Z i e s c h a n g H. // Math. Z. 1976. V. 151. P. 165–188.
3. Б е н я ш – К р и в е ц В. В. // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 3–26.
4. H o r o w i t z R. // Comm. Pure. Appl. Math. 1972. V. 25. P. 635–649.
5. C u l l e r M., S h a l e n P. // Ann. of Math. 1983. V. 117. P. 109–147.
6. T r a i n a C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 79. P. 369–372.
7. B a s s H. // в сб. «The Smith Conjecture». New York: Wiley, 1984. P. 127–136.

BENIASH-KRYVETS V.V., HUA XIUYING

DECOMPOSING GENERALIZED TETRAEDRON GROUPS INTO NON-TRIVIAL FREE PRODUCT WITH AMALGAMATION

benyash@bsu.by, huaxiuyingnihao@163.com

Summary

It is proved that generalized tetraedron groups with presentation $G = \left\langle a, b, c;\ a^m = b^n = c^k = R_1^l(a,b) = R_2^f(a,c) = R_3^g(b,c) = 1 \right\rangle$, where one of the numbers m, n, k, l, f, g is equal to zero, are non-trivial free product with amalgamation.

УДК 512.543.76

Беняш-Кривец В.В., Хуа Сюин. О разложении обобщенных тетраэдральных групп в свободное произведение с объединенной подгруппой. // Доклады НАН Беларуси. 2008. Т. 32, № С.

Группа *G* разложима, если она является нетривиальным свободным произведением с объединенной подгруппой, т.е. $G = G_1 *_A G_2$, где $G_1 \neq A$ и $G_2 \neq A$. В данной работе исследуется проблема разложимости для обобщенных тетраэдральных групп, т.е. групп G, имеющих копредставление вида $G = \left\langle a,b,c;\ a^m = b^n = c^k = R_1^l(a,b) = R_2^f(a,c) = R_3^g(b,c) = 1 \right\rangle$. Не все из этих групп разложимы. Например, обычные треугольные группы $\left\langle a,b;\ a^m = b^n = (ab)^k = 1 \right\rangle$, где $m,n,k \geq 2$, неразложимы. Доказана следующая

Т е о р е м а. *Пусть G – обобщенная тетраэдральная группа. Если хотя бы одно из чисел* $m,\ n,\ k,\ l,\ f,\ g$ *равно нулю, то группа G разложима.*

Библиогр. — 7 назв.

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры Белорусского государственного университета.
Домашний адрес: ул. Якубовского, д. 78, кв. 264. 220018 Минск.
Рабочий телефон: 209-50-49, домашний телефон: 274-73-36, моб. (029) 374-73-36.

Сюин Хуа, аспирант кафедры высшей алгебры Белорусского государственного университета (КНР).