ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ №1 2002
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 512.543.76

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ

МНОГООБРАЗИЯ ХАРАКТЕРОВ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП

Пусть $\Gamma = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа и $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ — связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем K, которое всюду ниже предполагается алгебраически замкнутым и нулевой характеристики. Очевидно, что для любого гомоморфизма $\rho\colon \Gamma \to G(K)$ набор элементов

$$(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in G(K)^m = G(K) \times \dots \times G(K)$$

удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы Γ, и поэтому соответствие $\rho \to (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$ задает биекцию между множеством $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(K))$ и K-точками некоторого аффинного K-многообразия $R(\Gamma, G) \subset G^m$, геометрическая структура которого не зависит от выбора системы образующих Γ. Многообразие $R(\Gamma, G)$ обычно называют многообразием представлений группы Γ в алгебраическую группу G.

Группа G действует естественным образом (одновременным сопряжением компонент) на $R(\Gamma, G)$ и ее орбиты находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений Γ. В общем случае орбиты относительно этого действия не обязательно замкнуты и, следовательно, их многообразие (геометрический фактор) не является алгебраическим многообразием. Однако если G — редуктивная группа, то K-алгебра G-инвариантных регулярных функций $K[R(\Gamma, G)]^G$ конечно порождена и, следовательно, является K-алгеброй регулярных функций некоторого алгебраического многообразия $X(\Gamma, G)$. Другими словами, $X(\Gamma, G)$ является категорным фактором $R(\Gamma, G)/G$ (см. [1]). Обычно $X(\Gamma, G)$ называют многообразием характеров представлений Γ в G. Его точки параметризуют замкнутые G-орбиты.

В случае $G = \mathrm{GL}_n(K)$ мы будем обозначать $R(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ через $R_n(\Gamma)$ и называть многообразием n-мерных представлений Γ. В этом случае замкнутость орбиты эквивалентна тому, что соответствующее представление вполне приводимо, и поэтому точки многообразия $X_n(\Gamma) = X(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ находятся в биективном соответствии с классами эквивалентных вполне приводимых n-мерных представлений группы Γ. С другой стороны, вполне приводимое n-мерное представление группы Γ с точностью до сопряженности однозначно определяется своим характером. Тем самым многообразие $X_n(\Gamma)$ дает естественную геометрическую параметризацию множества характеров представлений группы Γ в $\mathrm{GL}_n(K)$.

В [2] получено явное описание многообразия характеров $X(\Gamma, \mathrm{SL}_2(C))$. В предлагаемой работе мы обобщаем этот результат на случай представлений произвольной степени n. Для произвольного элемента $g \in \Gamma$ рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_g\colon R_n(\Gamma) \to K; \qquad \tau_g(\rho) = \mathrm{tr}\,\rho(g),$$

где $\mathrm{tr}\,A$ обозначает след матрицы A. Классическим результатом в теории инвариантов является то, что $K[R_n(\Gamma)]^{\mathrm{GL}_n(K)} = K[\tau_g \mid g \in \Gamma]$. Будем в дальнейшем обозначать K-алгебру $K[\tau_g \mid g \in \Gamma]$ через $T_n(\Gamma)$. Из результатов [3, 4] следует, что $T_n(\Gamma)$ конечно порождена и функции

$$\tau_{g_{i_1} \cdots g_{i_s}}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n^2,$$

порождают $T_n(\Gamma)$. Пусть $g_1, \dots, g_s \in \Gamma$ такие элементы, что

$$T_n(\Gamma) = K[\tau_{g_1}, \dots, \tau_{g_s}].$$

Рассмотрим морфизм

$$\pi \colon R_n(\Gamma) \to \mathbb{A}^s; \qquad \pi(\rho) = (\tau_{g_1}(\rho), \dots, \tau_{g_s}(\rho)).$$

Наша цель — доказать следующую теорему.

Теорема 1. $\pi(R_n(\Gamma))$ *является замкнутым алгебраическим множеством в* $\mathbb{A}^s$.

Ясно, что $K[\pi(R_n(\Gamma))] = T_n(\Gamma)$, следовательно, $\pi(R_n(\Gamma))$ бирегулярно изоморфно $X_n(\Gamma)$. В дальнейшем будем отождествлять $\pi(R_n(\Gamma))$ и $X_n(\Gamma)$. Теорема 1 доставляет явную геометрическую реализацию многообразия n-мерных характеров $X_n(\Gamma)$ конечно-порожденной группы Γ. Для доказательства теоремы необходим ряд вспомогательных результатов.

Пусть $\alpha = (n_1, \dots, n_s)$ — некоторое разбиение числа n, т. е. $n = n_1 + \dots + n_s$, где $n_i \leqslant 1$. Рассмотрим морфизм

$$f_\alpha \colon R_{n_1}(\Gamma) \times \dots \times R_{n_s}(\Gamma) \to R_n(\Gamma), \qquad (\rho_1, \dots, \rho_s) \mapsto \rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_s.$$

Очевидно, f_α инъктивно и $\operatorname{Im} f_\alpha = V_\alpha$ — замкнутое подмножество в $R_n(\Gamma)$. Группа $G_\alpha = \mathrm{GL}_{n_1}(K) \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_s}(K)$ действует на V_α сопряжением:

$$(A_1, \dots, A_s)\dot{(}\rho_1, \dots, \rho_s) = A_1 \rho_1 A_1^{-1} \oplus \dots \oplus A_s \rho_1 A_s^{-1}.$$

Пусть $V_{1,\alpha}, \dots, V_{l,\alpha}$ — неприводимые компоненты V_α.

Лемма 1. $V_{i,\alpha}$ *является* G_α*-инвариантным множеством для любого* i.

Доказательство. Произведение $V_{i,\alpha} \times G_\alpha$ является неприводимым алгебраическим множеством. Рассмотрим регулярное отображение

$$f \colon V_{i,\alpha} \times G_\alpha \to V_\alpha, \qquad (\rho, g) \mapsto g \cdot \rho.$$

Замыкание $\overline{f(V_{i,\alpha} \times G_\alpha)}$ неприводимо, следовательно, оно содержится в некоторой компоненте $V_{j,\alpha}$. Но тогда $f(V_{i,\alpha} \times \{E\}) = V_{i,\alpha} \subset V_{j,\alpha}$, и поскольку $V_{i,\alpha}$ является компонентой V_α, мы должны иметь $V_{i,\alpha} = V_{j,\alpha}$. Таким образом, $f(V_{i,\alpha} \times G_\alpha) = V_{i,\alpha}$, что и требовалось показать.

Далее, пусть

$$R_n^s(\Gamma) = \{\rho \in R_n(\Gamma) \mid \rho \text{ — \textit{неприводимо}}\}.$$

В [5] доказано, что $R_n^s(\Gamma)$ является открытым (возможно, пустым) подмножеством $R_n(\Gamma)$. Положим

$$U_\alpha = \{\rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_s \in V_\alpha \mid \rho_i \in R_{n_i}^s(\Gamma),\ i = 1, \dots, s\}.$$

Пусть $V_{1,\alpha}, \dots, V_{l_\alpha,\alpha}$ — такие неприводимые компоненты многообразия V_α, что $V_{i,\alpha} \bigcap U_\alpha \neq \varnothing$.

Лемма 2. $X_n(\Gamma) = \bigcup\limits_\alpha \bigcup\limits_{i=1}^{l_\alpha} \pi(V_{i,\alpha})$, *где объединение берется по всем возможным разбиениям* α.

Доказательство. Пусть $V = \bigcup\limits_\alpha \bigcup\limits_{i=1}^{l_\alpha} \pi(V_{i,\alpha})$, $x \in X_n(\Gamma)$. Покажем, что $x \in V$. Пусть $\rho \in \pi^{-1}(x)$. Если представление ρ не является вполне приводимым, т. е.

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_s \end{pmatrix},$$

где $\rho_i \in R_{n_i}(\Gamma)$, $i = 1, \dots, s$, — неприводимые представления, то мы можем рассмотреть вполне приводимую часть $\rho' = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_s$ представления ρ. Тогда характеры представлений

... совпадают, следовательно, $\pi(\rho) = \pi(\rho') = x$. Кроме того, $\rho' \in U_\alpha$, где $\alpha = (n_1, \dots, n_s)$. Следовательно, $x \in V$, т. е. $V = X_n(\Gamma)$. Лемма доказана.

Пусть C — аффинная кривая, содержащаяся в $R_n(\Gamma)$. Следующая конструкция представления $P\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n(F)$, где F — поле рациональных функций на кривой C, играет важную роль в доказательстве теоремы 1. Пусть задан элемент $g \in \Gamma$. Точка $\rho \in C$ является представлением Γ в $\mathrm{GL}_n(K)$. Положим $\rho(g) = (a_{ij}^{(g)}(\rho))$. Тогда $a_{ij}^{(g)}$, $i, j = 1, \dots, n$, являются корректно определенными регулярными функциями на C. Положим теперь

$$P(g) = (a_{ij}^{(g)}) \in \mathrm{GL}_n(F).$$

Если кривая C содержится в V_α, предыдущая конструкция дает нам представление

$$P = P_1 \oplus \dots \oplus P_s \colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n(F),$$

где P_i является представлением Γ в $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$, $i = 1, \dots, s$.

Лемма 3. *Пусть C — неприводимая кривая, содержащаяся в V_α, такая, что $U = U_\alpha \bigcap C \neq \varnothing$, F — поле рациональных функций на C и $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_s \colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n(F)$ — представление, определенное выше. Тогда все представления $P_1, \dots, P_s$ абсолютно неприводимы.*

Доказательство. Пусть L — алгебраическое замыкание поля F. Предположим, что найдется представление P_i, скажем P_1, которое приводимо над L. Тогда существует матрица $M \in \mathrm{SL}_{n_1}(L)$ такая, что

$$MP_1M^{-1} = (MP_1(g_1)M^{-1}, \dots, MP_1(g_m)M^{-1}) = \left(\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_m & Y_m \\ 0 & Z_m \end{pmatrix}\right), \qquad (1)$$

где $X_i \in \mathrm{GL}_r(L)$, $Z_i \in \mathrm{GL}_s(L)$, $r + s = n_1$, $i = 1, \dots, m$. Пусть L_1 — поле, полученное присоединением к F всех элементов матриц M, X_i, Y_i, Z_i, $i = 1, \dots, m$. Ясно, что $[L_1 : F] < \infty$. Для вложения $\varepsilon\colon F \to L_1$ существуют кривая C_1 и доминантный морфизм $\varphi\colon C_1 \to C$ такие, что $K(C_1) = L_1$ и коморфизм φ^* есть ε. Пусть U_1 — непустое открытое подмножество в C_1, на котором элементы матриц M, $P_1(g_i)$, X_i, Y_i, Z_i, $i = 1, \dots, m$, регулярны. Ясно, что $\varphi(U_1)$ плотно в C, следовательно, $\varphi(U_1) \bigcap U \neq \varnothing$ и существует $y \in U_1$ такое, что $\varphi(y) = x \in U$. После специализации (1) в точке y мы получаем

$$M(y)P_1(x)M(y)^{-1} = (M(y)P_1(x)(g_1)M(y)^{-1}, \dots, M(y)P_1(x)(g_m)M(y)^{-1}) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} X_1(y) & Y_1(y) \\ 0 & Z_1(y) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_m(y) & Y_m(y) \\ 0 & Z_m(y) \end{pmatrix}\right).$$

Но по построению представление $P_1(x)$ неприводимо. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть A — локальное кольцо точки x на гладкой кривой C, F — поле частных A и $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ — вполне приводимое представление Γ в $\mathrm{GL}_n(F)$, где $P_i\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_{n_i}(F)$, $i = 1, \dots, s$, являются абсолютно неприводимыми представлениями. Если $\chi_P(\Gamma) \subset A$ (χ_P обозначает характер представления P), тогда каждое представление P_i, $i = 1, \dots, s$, эквивалентно над полем F представлению $P_i'\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_{n_i}(A)$.*

Доказательство. Покажем, что условие $\chi_P(\Gamma) \subset A$ влечет

$$\chi_{P_i}(\Gamma) \subset A, \qquad i = 1, \dots, s.$$

Пусть $X = P(g)$ для некоторого $g \in \Gamma$. По условию леммы $\operatorname{tr} X^k = \chi_P(g^k) \in A$ для всех $k \in \alpha Z$. Пусть $\sigma_i(X)$ обозначает i-й коэффициент характеристического многочлена $f_X(\lambda)$ матрицы X. Хорошо известные формулы Ньютона влекут, что

$$\sigma_i(X) = R_i(\operatorname{tr} X, \dots, \operatorname{tr} X^i),$$

где $R_i \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_i]$. Следовательно, $\sigma_i(X) \in A$. Таким образом, мы имеем

$$f_X(\lambda) = \lambda^n + \sigma_1(X)\lambda^{n-1} + \dots + \sigma_n(X) \in A[\lambda]. \tag{2}$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни $f_X(\lambda)$. Из (2) следует, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются целыми над A. Так как A — локальное кольцо точки на гладкой кривой, то A является кольцом дискретного нормирования и, следовательно, A целозамкнуто в F. Таким образом, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A$. Так как $\chi_{P_i}(g) = \operatorname{tr} P_i(g)$ является суммой некоторых из $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, мы имеем $\chi_{P_i}(g) \in A$. Итак, $\chi_{P_i}(\Gamma) \subset A$, $i = 1, \dots, s$.

Покажем теперь, что представление P_i эквивалентно представлению P_i' такому, что $P_i'(\Gamma) \subset \mathrm{GL}_{n_i}(A)$. Положим $G_i = P_i(\Gamma)$. Пусть L — алгебраическое замыкание поля F. В силу леммы Бернсайда (см., например, [6]) абсолютная неприводимость P_i влечет, что L — векторное пространство, натянутое на G_i, совпадает с пространством $M_n(L)$ матриц порядка n над L, и что в $M_n(L)$ существует базис $t_1, \dots, t_{n^2}$ такой, что каждый элемент G_i имеет вид $\sum \alpha_i t_i$, где α_i являются следами элементов из G_i. Выше мы показали, что $\alpha_i \in A$. Следовательно, A-модуль $AG_i \subset M_n(F) \subset M_n(L)$, натянутый на G_i, содержится в конечно порожденном A-модуле в $M_n(L)$. Поскольку A является нетеровым, то модуль AG_i также конечно порожден. С другой стороны, AG_i должен порождать $M_n(F)$ над F, поскольку G_i порождает $M_n(L)$ над L.

Возьмем теперь любой элемент $0 \neq x \in F^n$. Тогда G_i-инвариантный A-модуль

$$AG_i x = \{\mu x \mid \mu \in AG_i\} \subset F^n$$

конечно порожден и порождает F^n. Так как A является областью с однозначным разложением на множители, то $AG_i x$ является свободным модулем и, следовательно, порождается базисом F^n. Но существование базиса F^n, который порождает G_i-инвариантный A-модуль, очевидно, эквивалентно утверждению леммы.

Пусть C — аффинная алгебраическая кривая. Известно, что существует гладкая проективная кривая $\widetilde{C}$, бирационально изоморфная C, т.ė. $K(C) = K(\widetilde{C})$ (см. [7]). Далее, известно, что любое рациональное отображение из гладкой кривой в проективное многообразие регулярно (см. [8]). Следовательно, если $\overline{V}$ обозначает замыкание в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ аффинного многообразия $V \subset \mathbb{A}^n$, то рациональное отображение $f: C \to V$ определяет регулярное отображение $\widetilde{f}: \widetilde{C} \to \overline{V}$. В частности, если C и D — аффинные кривые, то произвольное рациональное отображение $f: C \to D$ определяет регулярное отображение $\widetilde{f}: \widetilde{C} \to \widetilde{D}$. Далее, если $\overline{C}$ — проективное замыкание аффинной кривой C, то мы назовем *идеальными точками* кривой $\widetilde{C}$ те точки, которые соответствуют элементам $\widetilde{C} \setminus \overline{C}$ при бирациональном изоморфизме между $\widetilde{C}$ и $\overline{C}$. Нетрудно убедиться, что определение множества идеальных точек кривой $\widetilde{C}$ не зависит от выбора проективного замыкания $\overline{C}$. Отметим также, что если $f: C \to D$ — регулярное отображение аффинных кривых, то прообраз множества идеальных точек кривой $\widetilde{D}$ относительно регулярного морфизма $\widetilde{f}: \widetilde{C} \to \widetilde{D}$ состоит из идеальных точек $\widetilde{C}$. Кроме того, если $f: C \to \mathbb{A}^1$ — регулярное отображение, то $\widetilde{f}: \widetilde{C} \to \mathbb{P}^1$ также регулярно и полюса $\widetilde{f}$ содержатся в множестве идеальных точек $\widetilde{C}$.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 достаточно доказать, что каждое множество $X = \pi(V_{i,\alpha})$ замкнуто в $\mathbb{A}^s$. Если X состоит из одной точки, то утверждение тривиально. Поэтому будем предполагать, что $\dim \overline{X} > 0$. Пусть $x \in \overline{X}$. Нам нужно показать, что $x \in X$. По условию $U = U_\alpha \bigcap V_{i,\alpha} \neq \varnothing$. Так как $\pi(U)$ плотно в $\overline{X}$, то существует открытое подмножество $W \subset \overline{X}$ такое, что $W \subset \pi(U)$. Пусть $C \subset \overline{X}$ — неприводимая аффинная алгебраическая кривая такая, что $x \in C$ и $C \bigcap W \neq \varnothing$ (в качестве C мы можем взять неприводимую компоненту пересечения $\overline{X}$ с "общим" линейным подпространством подходящей размерности, проходящим через точку x). Множество $C \setminus W$ конечно и $C \bigcap W \subset \pi(U)$. Далее, найдется компонента H многообразия $\pi^{-1}(C) \bigcap V_{i,\alpha}$ такая, что $\dim H > 0$ и ограничение $\pi|_H$ — не константа. Покажем, что $H \bigcap U \neq \varnothing$. В самом деле, поскольку $\pi(H) \subset C$ неприводимо и отлично от точки, то $\pi(H)$ плотно в C. Следовательно, $\pi(H) \bigcap (C \bigcap W) \neq \varnothing$. Таким образом, существует $h \in H$ такое, что $\pi(h) = \pi(u)$ для некоторого элемента $u \in U$. Это означает, что характеры представлений h и u равны. Так как $u = u_1 \oplus \dots \oplus u_s$, где $u_i \in R_{n_i}(\Gamma)$, $i = 1, \dots, s$, — неприводимые представления,

$= h_1 \oplus \dots \oplus h_s$, где $h_i \in R_{n_i}(\Gamma)$ для $i = 1, \dots, s$, то равенство характеров $\chi_u = \chi_h$ возможно только в том случае, когда h_i эквивалентно u_i для $i = 1, \dots, s$. Последнее в точности означает, что $h \in U$, т.е. $H \bigcap U \neq \varnothing$.

Мы можем построить (снова рассматривая пересечение с подходящим линейным подпространством) кривую $D \subset H$ такую, что $\pi|_D$ не константа и $D \bigcap U \neq \varnothing$. Пусть $\widetilde{D}$ — гладкая проективная модель D. Отображение включения $i\colon D \to Z$ определяет регулярный морфизм $d = \widehat{i}\colon \widetilde{D} \to \overline{Z}$, где $\overline{Z}$ — проективное замыкание Z. В свою очередь, регулярный морфизм $\pi|_D\colon D \to C$ определяет регулярное отображение $\widehat{\pi}\colon \widetilde{D} \to \overline{C}$. Так как ограничение $\pi|_D$ не константа, $\widehat{\pi}$ — сюръективный морфизм. Мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xleftarrow{i} & D & \xrightarrow{\pi} & C \\ \uparrow\delta & & \uparrow\varphi & & \uparrow\sigma \\ \overline{Z} & \xleftarrow{\widehat{i}=d} & \widetilde{D} & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \overline{C} \end{array} \tag{3}$$

Вертикальные стрелки в диаграмме являются соответствующими бирациональными изоморфизмами. Если $z \in \widetilde{D}$ — не идеальная точка, тогда мы имеем

$$\pi(\varphi(z)) = \sigma(\widehat{\pi}(z)). \tag{4}$$

Так как отображения $\widehat{\pi}$ и σ сюръективны, существует точка $y_0 \in \widetilde{D}$ такая, что $\sigma(\widehat{\pi}(y_0)) = x$. Если y_0 не является идеальной точкой $\widetilde{D}$, то доказательство окончено. В этом случае $\varphi(y_0) \in D \subset Z$ и из (4) следует, что $\pi(\varphi(y_0)) = x$, т.е. $x \in X$.

Рассмотрим теперь случай, когда y_0 является идеальной точкой $\widetilde{D}$. В этом случае мы построим новое регулярное отображение $d'\colon \widetilde{D} \to \overline{Z}$ такое, что $\delta(d'(y_0)) \in Z$ и $\pi(\delta(d'(y_0))) = x$. Пусть $F = K(D) = K(\widetilde{D})$ — поле рациональных функций кривой $\widetilde{D}$ и $P\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n(F)$ — построенное выше представление. Пусть $A \subset F$ — локальное кольцо точки y_0. Покажем, что $\chi_P(\Gamma) \subset A$, т.е. $\operatorname{tr} P(g) \in A$ для всех $g \in \Gamma$. Элемент $\operatorname{tr} P(g) \in F$, рассматриваемый как рациональная функция на $\widetilde{D}$, является функцией $y \mapsto \operatorname{tr} \varphi(y)$. Для элемента $g \in \Gamma$ регулярная функция $\tau_g \in K[R_n(\Gamma)]$ является $\mathrm{GL}_n(K)$-инвариантной, следовательно, $\tau_g \in \pi^*(K[X_n(\Gamma)])$, т.е. $\tau_g = \pi^*(f)$ для некоторого $f \in K[X_n(\Gamma)]$. Таким образом,

$$\operatorname{tr} P(g) = \varphi^*(\tau_g) = \varphi^*(\pi^*(f)).$$

С другой стороны, из коммутативной диаграммы (3) получаем, что

$$\operatorname{tr} P(g) = \varphi^*(\pi^*(f)) = \widehat{\pi}^*(\sigma^*(f)),$$

т.е.

$$\operatorname{tr} P(g)(y_0) = f(\sigma(\widehat{\pi}(y_0))) = f(x).$$

Итак, $\operatorname{tr} P(g)$ — регулярная функция в точке y_0 и $\chi_P(\Gamma) \subset A$. Тогда в силу леммы 3 мы имеем $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_s$, где $P_i\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_{n_i}(F)$, $i = 1, \dots, s$, являются абсолютно неприводимыми представлениями. В силу леммы 4 каждое P_i эквивалентно представлению $P_i'\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_{n_i}(A)$, т.е. существуют матрицы $M_i = (m_{rs}^{(i)}) \in \mathrm{GL}_{n_i}(F)$, $i = 1, \dots, s$, такие, что $P_i' = M_i P_i M_i^{-1}$. Обозначим через W_1 открытое подмножество $\widetilde{D}$, получающееся удалением из $\widetilde{D}$ всех идеальных точек, полюсов всех функций $m_{rs}^{(i)}$ и нулей всех функций $\det M_i$. Введем следующий регулярный морфизм:

$$d'\colon W_1 \to \overline{Z}, \qquad y \mapsto M(y) d(y) M(y)^{-1},$$

где $M = \operatorname{diag}(M_1, \dots, M_s)$. Так как $\widetilde{D}$ — гладкая кривая, то d' можно продолжить до регулярного отображения $d'\colon \widetilde{D} \to \overline{Z}$. Пусть $P'(g) = \operatorname{diag}(P_1'(g), \dots, P_s'(g)) \in \mathrm{GL}_n(A)$. Тогда $\delta \circ d'$ регулярно в точке y_0. Если $y \in W_1$, то представление $\delta(d'(y)) \in Z$ задается посредством

$$g \mapsto \operatorname{diag}(P_1'(g)(y), \dots, P_s'(g)(y)) \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Следовательно,

$$Z \ni y_0' = \delta(d'(y_0))\colon \Gamma \to \mathrm{GL}_n(K), \qquad g \mapsto \mathrm{diag}\,(P_1'(g)(y_0), \ldots, P_s'(g)(y_0)).$$

Кроме того, для всех $y \in W_1$ мы имеем

$$\pi \circ \delta \circ d'(y) = \pi \circ \delta \circ d(y) = \sigma \circ \widehat{\pi}(y).$$

Таким образом, для точки y_0 получаем

$$\pi(y_0') = \pi \circ \delta \circ d'(y_0) = \sigma \circ \widehat{\pi}(y_0) = x.$$

Итак, $x \in X$. Теорема 1 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы фундаментальных исследований "Математические структуры".

Summary

The explicit construction of the character variety of representations of a finitely generated group into $\mathrm{GL}_n(K)$ is given.

Литература

1. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М., 1979.
2. Culler M., Shalen P. B. // Annals of Math. 1983. Vol. 117. P. 109 – 146.
3. Prochesi C. // Advances in Math. 1976. Vol. 19, No 3. P. 306 – 381.
4. Размыслов Ю. П. // Изв. АН СССР, сер. мат. 1974. Т. 38, № 4. С. 145 – 235.
5. Lubotzky A., Magid A. // Memoirs AMS. 1985. Vol. 58. P. 1 – 116.
6. Ленг С. Алгебра. М., 1968.
7. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М., 1981.

Институт математики
НАН Беларуси

Поступила в редакцию
09.02.2000