УДК 517.5

Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича

Пекарский А. А.

Через $C[0, 1]$ ($AC[0, 1]$) обозначим множество непрерывных (абсолютно непрерывных) функций на отрезке $[0, 1]$; $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbf{Z}_+ = N \cup \{0\}$; $R_n(f)$ ($f \in C[0, 1]$ и $n \in \mathbf{Z}_+$) — наилучшее равномерное приближение f рациональными дробями степени не выше n.

В 1962 г. Е. П. Долженко [1] показал, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(f) < \infty$, то $f \in AC[0, 1]$. С другой стороны, им же [2] в 1966 г. установлено, что $R_n(f)$ для $f \in AC[0, 1]$ могут стремиться к нулю при $n \to \infty$ как угодно медленно. Таким образом, возникает задача о введении дополнительных характеристик для $f \in AC[0, 1]$, достаточно хорошо отражающих скорость рациональной аппроксимации. Такими характеристиками могут быть гладкость f в произвольных метриках Орлича [5], гладкость f' в интегральных метриках [3] и др. В [4] показано, что если $|f'| \ln^+ |f'| (\ln^+ \ln^+ |f'|)^2$ суммируема на $[0, 1]$, то

$$R_n(f) = o(1/n). \tag{1}$$

Здесь же, например, доказано, что для выполнения (1) достаточно потребовать суммируемости $|f'| \ln^+ |f'|$. Изучается также эффект аппроксимации у концов отрезка $[0, 1]$, суть которого состоит в том, что в окрестностях точек 0 и 1 функция может быть как угодно плохой в смысле гладкости и, несмотря на это, обладать достаточно высокой скоростью стремления к нулю наилучших рациональных приближений. Как известно, первые примеры таких функций найдены А. А. Гончаром [6].

Результаты настоящей работы анонсированы в [7].

§ 1. Разложение единицы на сумму w-дробей

Лемма 1.1 (см. [8]). *Для любого* $n \in \mathbf{N}$ *и любого* $\delta \in [\exp(-n/2), 1]$ *существуют рациональные функции* $\varphi_n^-(x, \delta)$ *и* $\varphi_n^+(x, \delta)$, $\deg \varphi_n^- = \deg \varphi_n^+ \leqslant 2n$, *обладающие свойствами*:

а) $\varphi_n^-(x, \delta) \geqslant 0, \quad \varphi_n^+(x, \delta) \geqslant 0, \quad x \in (-\infty, \infty)$;

б) $\varphi_n^-(x, \delta) + \varphi_n^+(x, \delta) = 1, \quad x \in (-\infty, \infty)$;

в) $\varphi_n^-(x, \delta) \leqslant 18 \exp\left(-4n/\ln \dfrac{3}{\delta}\right), \quad x \in [\delta, 1]$,

$\varphi_n^+(x, \delta) \leqslant 18 \exp\left(-4n/\ln \dfrac{3}{\delta}\right), \quad x \in [-1, -\delta]$.

Если точки z_1 и z_2 принадлежат прямой (или окружности) Γ, то через $[z_1, z_2]$ обозначим ту из дуг на Γ с началом в точке z_1 и с концом в z_2, которая соответствует заданному на Γ направлению.

Лемма 1.2. *Пусть различные точки* $z_j, \ldots, z_4$, *лежат на прямой (или окружности)* Γ *и их нумерация соответствует выбранному на* Γ *направлению. Тогда для любого* $n \in \mathbf{N}$ *существуют рациональные функции* $\varphi_n^-(z) = \varphi_n^-(z; z_1, z_2, z_3, z_4)$ *и* $\varphi_n^+(z) = \varphi_n^+(z; z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\deg \varphi_n^- = \deg \varphi_n^+ \leqslant 2n$, *удовлетворяющие условиям*:

а) $\varphi_n^-(z) \geqslant 0$, $\varphi_n^+(z) \geqslant 0$, $z \in \Gamma$;

б) $\varphi_n^-(z) + \varphi_n^+(z) = 1$, $z \in \Gamma$;

в) $\varphi_n^-(z) \leqslant 4 \exp(-n/\ln \theta)$, $z \in [z_3, z_4]$,

$\varphi_n^+(z) \leqslant 4 \exp(-n/\ln \theta)$, $z \in [z_1, z_2]$,

где $\theta = 12[z_1, z_2, z_3, z_4]$ *и* $[z_1, z_2, z_3, z_4] = (z_3 - z_1)(z_4 - z_2) : (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)$ — *ангармоническое отношение точек* z_j.

Доказательство. Для некоторого $\delta \in (0, 1)$ существует дробно-линейное отображение $y = \eta(z)$ окружности Γ на действительную ось, удовлетворяющее условиям: $\eta(z_1) = -1$, $\eta(z_2) = -\delta$, $\eta(z_3) = \delta$, $\eta(z_4) = 1$. Ввиду инвариантности ангармонического отношения относительно дробно-линейных преобразований плоскости (см. [9])

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [-1, -\delta, \delta, 1] = \frac{(1+\delta)^2}{4\delta},$$

откуда следует, что δ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\delta} < 4[z_1, z_2, z_3, z_4]. \tag{1.1}$$

Если $\delta = \delta(z_1, z_2, z_3, z_4) \geqslant \exp(-n/2)$, то полагаем $\varphi_n^-(z) = \varphi_n^-(\eta(z), \delta)$, $\varphi_n^+(z) = \varphi_n^+(\eta(z), \delta)$, где $\varphi_n^-(\cdot, \delta)$ и $\varphi_n^+(\cdot, \delta)$ — функции из леммы 1.1. Так как в рассматриваемом случае имеет место неравенство $18 \exp\left(-4n/\ln \frac{3}{\delta}\right) < 4 \exp\left(-n/\ln \frac{3}{\delta}\right)$, то из (1.1) следует утверждение леммы 1.2. Если же $\delta < \exp(-n/2)$, то мы полагаем $\varphi_n^-(z) = \varphi_n^+(z) = 1/2$. Лемма 1.2 доказана полностью.

Через $W[a, b]$ обозначим множество выпуклых вниз, строго возрастающих функций w на отрезке $[a, b]$ таких, что $w(a) = a$, $w(b) = b$. Пусть r — произвольная рациональная дробь. Тогда функцию $r(w) = r(w(x))$, $w \in W[a, b]$, будем называть w-дробью. Для w-дробей естественным образом определяется степень, числитель и знаменатель.

Лемма 1.3. *Пусть* $-\infty < a \leqslant z_1 < z_2 < z_3 < z_4 \leqslant b < \infty$. *Положим* $\Delta^- = [z_1, z_3]$, $\Delta^+ = [z_2, z_4]$. *Тогда для любого* $n \in \mathbf{N}$ *существуют* w-*дроби* ($w \in W[a, b]$) $\varphi_n^-(x; \Delta^-, \Delta^+)$ *и* $\varphi_n^+(x; \Delta^-, \Delta^+)$ *степени не выше* $2n$, *удовлетворяющие условиям*:

а) $\varphi_n^-(x; \Delta^-, \Delta^+) \geqslant 0$, $\varphi_n^+(x; \Delta^-, \Delta^+) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$;

б) $\varphi_n^-(x; \Delta^-, \Delta^+) + \varphi_n^+(x; \Delta^-, \Delta^+) = 1$, $x \in [a, b]$;

в) $\varphi_n^-(x; \Delta^-, \Delta^+) \leqslant 4 \exp(-n/\ln \theta)$, $x \in \Delta^+ \setminus \Delta^-$,

$\varphi_r^+(x; \Delta^-, \Delta^+) \leqslant 4 \exp(-n/\ln \theta)$, $x \in \Delta^- \setminus \Delta^+$,

где $\theta = \theta(\Delta^-, \Delta^+) = 12|\Delta^-| / |\Delta^- \cap \Delta^+|$ *и* $|\Delta|$ — *длина отрезка* Δ.

Доказательство. Положим

$$\varphi_n^\pm(x; \Delta^1, \Delta^+) = \varphi_n^\pm(w(x); w(x_1), w(x_2), w(x_3), w(x_4)),$$

где $\varphi_n^\pm(\cdot; \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ — функции из леммы 1.2. Очевидно, введенные функции суть w-дроби степени не выше $2n$, и они удовлетворяют условиям а) и б) леммы 1.3. Докажем, что в) также выполняется. Если например, $x\in[z_1\ z_2)=\Delta^-\setminus\Delta^+$, то из леммы 1.2 получаем

$$\varphi_n^+(x;\ \Delta^-,\ \Delta^+)\leqslant 4\exp\left[-n/\ln 12\frac{(w(z_3)-w(z_1))\,(w(z_4)-w(z_2))}{(w(z_3)-w(z_2))\,(w(z_4)-w(z_1))}\right].$$

Итак, нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{w(z_3)-w(z_1)}{w(z_3)-w(z_2)}\cdot\frac{w(z_4)-w(z_2)}{w(z_4)-w(z_1)}\leqslant\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{|\Delta^-|}{|\Delta^-\cap\Delta^+|}. \tag{1.2}$$

Действительно, из выпуклости вниз функции w находим

$$w(z_2)\leqslant\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}w(z_1)+\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}w(z_3),$$

$$w(z_3)=\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}w(z_3)+\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}w(z_3).$$

Вычитая из первого соотношения второе, получаем

$$\frac{w(z_3)-w(z_1)}{w(z_3)-w(z_2)}\leqslant\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2},$$

откуда и следует соотношение (1.2). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. (см. [8]). *Пусть x_i, $i=1\div n$, и y_j, $j=1\div m$,— произвольные числа, p_i, $i=1\div n$, и q_j, $j=1\div m$,— неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, $\sum\limits_{j=1}^{m}q_j=1$. Тогда имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_ip_i-\sum_{j=1}^{m}y_jq_j\right|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}|x_i-y_j|.$$

§ 2. Аппроксимация непрерывных функций w-дробями

Пусть Π_m: $0=\eta_0<\eta_1<\ldots<\eta_m=1$ — некоторое разбиение отрезка $[0,\ 1]$. Положим $\delta_j=\eta_{j+1}-\eta_j$, $j=0\div m-1$, и $\delta=\max\delta_j$. Через $h(\Pi_m,\ f)$ обозначим максимум колебаний $f\in C[0,\ 1]$ на отрезках $[\eta_j,\ \eta_{j+1}]$.

Теорема 2.1. *Пусть $f\in C[0,\ 1]$ и Π_m — некоторое разбиение отрезка $[0,\ 1]$. Тогда для любой $w\in W[0,\ 1]$ существует w-дробь Q, удовлетворяющая условиям* [1].

$$\deg Q\leqslant c_1m+c_2\sum_{j=0}^{m-1}\ln\frac{\delta}{\delta_j},\quad \|f-Q\|_{C[0,1]}\leqslant 5h,$$

где δ_j, δ определяются разбиением Π_m и $h=h(\Pi_m,\ f)$.

Замечание. Теорема 2.1 при $w(x)=x$ является уточнением одного частного случая основной леммы из работы А. П. Буланова [17]. Уточнение состоит в том, что для $f\in C[0,\ 1]$ найдена дробь Q, удовлетворяющая условию $\|f-Q\|_{C[0,1]}\leqslant ch$, существенно более низкой степени, чем в [17]. Это позволит нам дать точное решение задач, рассматриваемых ниже в §§ 3 и 5.

Доказательство. Пусть разбиение Π_m определяется точками η_j, $j=0\div m$. Для любого $j\in\mathbf{N}$ считаем $\eta_{-j}=\eta_0$ и $\eta_{m+j}=\eta_m$. Через p обозначим наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $2^p\geqslant$

[1] Здесь и ниже через c, c_1, c_2, ... обозначаем абсолютные положительные константы в разных местах, вообще говоря, разные.

$\geqslant 2m$. Определим систему отрезков $I_{s,i}^k$, $i=0\div 2^{p+1-k}-1$, $k=0\div p+1$, по индукции. Полагаем

$$I_{s,i}^0=[\eta_{i-s},\ \eta_{i+2-s}],\quad 0\leqslant s\leqslant m-1.$$

Допустим, что определены отрезки $I_{s,i}^k$, $0\leqslant k\leqslant p$. Тогда полагаем

$$I_{s,i}^{k+1}=I_{s,2i}^k\cup I_{s,2i+1}^k,\quad i=0\div 2^{p-k}-1.$$

Очевидно,

$$I_{s,0}^{p+1}=[0,\ 1], \tag{2.1}$$

$$I_{s,i}^k=[\eta_{2^k i-s},\ \eta_{2^k(i+1)+1-s}], \tag{2.2}$$

$$I_{s,2i}^k\cap I_{s,2i+1}^k=[\eta_{2^k(2i+1)-s},\ \eta_{2^k(2i+1)+1-s}]. \tag{2.3}$$

Назовем k-м ($0\leqslant k\leqslant p+1$) усреднением 2^{p+1-k} функций $\Psi_{s,i}^k$ вида

$$\Psi_{s,i}^k(x)=\sum_{\eta_j\in I_{s,i}^k}\Psi_{s,i,j}^k(x)f(\eta_j)\quad i=0\div 2^{p+1-k}-1,$$

где w-дроби $\Psi_{s,i,j}^k$ неотрицательны на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяют условию

$$\sum_{\eta_j\in I_{s,i}^k}\Psi_{s,i,j}^k(x)=1,\quad x\in[0,\ 1].$$

Положим

$$\rho_s^k=\max_{0\leqslant i\leqslant 2^{p+1-k}-1}\|f-\Psi_{s,i}^k\|_{C(I_{s,i}^k)}.$$

Нулевым усреднением назовем функции

$$\Psi_{s,i}^0(x)=f(\eta_{i-s}),\quad i=0\div 2^{p+1}-1.$$

Так как колебание функции f на каждом из отрезков $[\eta_j,\ \eta_{j+1}]$ не превосходит h, то мы получаем

$$\rho_s^0\leqslant 2h. \tag{2.4}$$

Допустим, что построено k-е ($0\leqslant k\leqslant p$) усреднение. Тогда $(k+1)$-е усреднение определим так:

$$\Psi_{s,i}^{k+1}(x)=\Psi_{s,2i}^k(x)\,\varphi_{l_{s,i,k}}^-(x;\ I_{s,2i}^k,\ I_{s,2i+1}^k)+\Psi_{s,2i+1}^k(x)\,\varphi_{l_{s,i,k}}^+(x;\ I_{s,2i}^k,\ I_{s,2i+1}^k),$$

где $\varphi_{l_{s,i,k}}^-$, $\varphi_{l_{s,i,k}}^+$ — функции из леммы 1.3, если только никакое из множеств $I_{s,2i}^k\setminus I_{s,2i+1}^k$, $I_{s,2i+1}^k\setminus I_{s,2i}^k$ непусто. Если же, например, $I_{s,2i}^k\setminus I_{s,2i+1}^k=\varnothing$, то полагаем $\varphi_{l_{s,i,k}}^-(x)=0$ и $\varphi_{l_{s,i,k}}^+(x)=1$. В обоих из рассмотренных случаев считаем

$$l_{s,i,k}=1+[2(k+1)\ln\theta(I_{s,2i}^k,\ I_{s,2i+1}^k)]. \tag{2.5}$$

Здесь величина $\theta(I_{s,2i}^k,\ I_{s,2i+1}^k)$ для первого случая определена в лемме 1.3. Во втором же случае полагаем $\theta(I_{s,2i+1}^k,\ I_{s,2i+1}^k)=1$.

Найдем рекуррентное неравенство для чисел ρ_s^k, $0\leqslant k\leqslant p+1$. Положим

$$A(x)=|f(x)-\Psi_{s,i}^{k+1}(x)|,\quad x\in I_{s,i}^{k+1},\ 0\leqslant k\leqslant p.$$

Если хотя бы одно из множеств $I^k_{s,2i} \setminus I^k_{s,2i+1}$, $I^k_{s,2i+1} \setminus I^k_{s,2i}$ пусто, то очевидно,

$$A(x) \leqslant \rho^k_s. \tag{2.6}$$

Пусть теперь каждое из рассматриваемых множеств непусто. Рассмотрим два случая.

1) $x \in I^k_{s,2i} \cap I^k_{s,2i+1}$. Тогда из свойств а), б) функций $\varphi^{\pm}_{l_{s,i,k}}$ (см. лемму 1.3) и рекуррентного соотношения для k-го и $(k+1)$-го усреднений получим

$$A(x) \leqslant |f(x) - \Psi^k_{s,2i}(x)|\, \varphi^{-}_{l_{s,i,k}}(x;\, I^k_{s,2i},\, I^k_{s,2i+1}) + \\ + |f(x) - \Psi^k_{s,2i+1}(x)|\, \varphi^{+}_{l_{s,i,k}}(x;\, I^k_{s,2i},\, I^k_{s,2i+1}) \leqslant \rho^k_s. \tag{2.7}$$

2) $x \in I^k_{s,2i} \setminus I^k_{s,2i+1}$ (случай $x \in I^k_{s,2i+1} \setminus I^k_{s,2i}$ рассматривается аналогично). Из свойств а), б) функций $\varphi^{\pm}_{l_{s,i,k}}$ и рекуррентного соотношения для k-го и $(k+1)$-го усреднений получим

$$A(x) \leqslant |f(x) - \Psi^k_{s,2i}(x)| + \\ + |\Psi^k_{s,2i+1}(x) - \Psi^k_{s,2i+1}(x)|\, \varphi^{+}_{l_{s,i,k}}(x,\, I^k_{s,2i},\, I^k_{s,2i+1}).$$

Из леммы 1.4, определения k-го усреднения и (2.2) находим

$$|\Psi^k_{s,2i+1}(x) - \Psi^k_{s,2i}(x)| \leqslant \max_{\eta_\mu, \eta_\nu \in I^k_{s,i}} |f(\eta_\mu) - f(\eta_\nu)| \leqslant 2^{k+1} h.$$

Согласно свойству в) функции $\varphi^{+}_{l_{s,i,k}}$ и соотношению (2.5) имеем

$$\varphi^{+}_{l_{s,i,k}}(x;\, I^k_{s,2i},\, I^k_{s,2i+1}) \leqslant 4e^{-2(k+1)}.$$

Итак, в случае 2) получим

$$A(x) \leqslant \rho^k_s + 4h\left(\frac{2}{e^2}\right)^{k+1}. \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.6)—(2.8) следует нужное рекуррентное неравенство

$$\rho^{k+1}_s \leqslant \rho^k_s + 4h\left(\frac{2}{e^2}\right)^{k+1}, \quad 0 \leqslant k \leqslant p.$$

Учитывая (2.4), находим $\rho^{p+1}_s \leqslant 5h$.

Через Q обозначим одну из ϖ-дробей $\Psi^{p+1}_{s,0}$, $0 \leqslant s \leqslant m-1$, которая имеет наименьшую степень. С учетом (2.1) немедленно получим

$$\|f - Q\|_{C[0,1]} \leqslant 5h. \tag{2.9}$$

Очевидно,

$$\deg Q \leqslant \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \deg \Psi^{p+1}_{s,0} \leqslant \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{i=0}^{2^{(p+1)-k}-1} 2l_{s,i,k}. \tag{2.10}$$

Определим δ_μ для любых целых μ, считая $\delta_\mu = \delta_\nu$, если $\mu = \nu \pmod m$. В таком случае из (2.3) и (2.5) получим

$$l_{s,i,k} \leqslant 1 + 2(k+1) \ln \frac{2^{k+4}\delta}{\delta_{2^k(2i+1)-s}}. \tag{2.11}$$

Следовательно, из (2.10), (2.11) найдем

$$\deg Q \leqslant \frac{2}{m}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{p+1}\sum_{i=0}^{2^{(p+1)-k}}(1+2(k+1)(k+4)\ln 2)+$$

$$+\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{p+1}(k+1)\sum_{i=0}^{2^{(p+1)-k}-1}\ln\frac{\delta}{\delta_{2^k(2i+1)-s}}\leqslant c_1 m + c_2\sum_{j=0}^{m-1}\ln\frac{\delta}{\delta_j}.$$

Итак, из (2.9) следует утверждение теоремы 2.1.

§ 3. Аппроксимация абсолютно непрерывных функций с производной из класса $\overset{*}{L}_{\Phi_0}$, $\Phi_0(x)=x\ln^+ x$

Пусть функция $\Phi(x)$ определена на $[0, \infty)$, выпукла вниз, не убывает, $\Phi(0)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)/x=\infty$. Тогда функция $\Psi(y)=\max\limits_{x\geqslant 0}(xy-\Phi(x))$, $y\geqslant 0$, называется дополнительной к $\Phi(x)$ в смысле У. Юнга. Как известно [10, с. 24], $\Psi(y)$ обладает теми же свойствами, что и $\Phi(x)$. Пусть E — спрямляемая кривая в комплексной плоскости. Классом $L_\Phi(E)$ назовем множество функций f, определенных на E, для которых $\int\limits_E \Phi(|f(z)|)\,|dz|<\infty$. Пространство Орлича $L_\Phi^*(E)$ по определению есть множество f, измеримых на E, таких, что для любой из них существует константа $k=k(f)>0$, удовлетворяющая условию $f/k\in L_\Phi(E)$. Пространство $L_\Phi^*(E)$ будет банаховым, если норму в нем ввести следующим образом (см. [10, с. 110]):

$$\|f\|_{L_\Phi^*(E)}=\inf_{k>0}\left[k+k\int\limits_E\Phi(|f(z)|/k)|dz|\right]. \qquad (3.1)$$

Если, например, χ_τ — характеристическая функция множества $\tau\subseteq E$, то (см. [10, с. 89])

$$\|\chi_\tau\|_{L_\Phi^*(E)}=|\tau|\,\Psi^{-1}\left(\frac{1}{|\tau|}\right), \qquad (3.2)$$

где Ψ^{-1} — функция, обратная к Ψ и $|\tau|$ — мера τ.

Если $f\in \overset{*}{L}_\Phi(E)$, а $g\in\overset{*}{L}_\Psi(E)$, то имеет место неравенство Гёльдера [10, с. 91]

$$\int\limits_E |f(z)\,g(z)|\,|dz|\leqslant\|f\|_{L_\Phi^*(E)}\,\|g\|_{L_\Psi^*(E)}. \qquad (3.3)$$

В дальнейшем важную роль играет пространство $\overset{*}{L}_{\Phi_0}(E)$, порожденное функцией $\Phi_0(x)=x\ln^+x$, где $\ln^+x=0$ для $x\in[0, 1]$ и $\ln^+x=\ln x$ для $x>1$. Нетрудно найти, что $\Psi_0(y)$ — функция, дополнительная к $\Phi_0(x)$, равна y для $y\in[0, 1]$ и e^{y-1} для $y>1$. Иногда нам будет более удобно применять обозначение L_Φ^* вместо $L_\Phi^*(0, 1)$, а также $\|\cdot\|_\Phi$ вместо $\|\cdot\|_{L_\Phi^*(0,1)}$.

Лемма 3.1. *Пусть l и g — неотрицательные невозрастающие функции, определенные на отрезке* $[0, 1]$. *Если $g\in L_\Phi(0, 1)$ и для любого $x\in[0, 1]$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^x l(t)\,dt\leqslant\int\limits_0^x g(t)\,dt,$$

то $l\in L_\Phi(0, 1)$ и $\int\limits_0^1\Phi(l(x))\,dx\leqslant\int\limits_0^1\Phi(g(x))\,dx.$

Лемма 3.2. *Пусть* $f \in L_\Phi(0, 1)$ *и* $0=\eta_0<\eta_1<\ldots<\eta_{m-1}<\eta_m=1$ — *некоторое разбиение отрезка* $[0, 1]$. *Положим* $\tau_i=[\eta_{i-1}, \eta_i]$, $i=1\div m$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} |\tau_i| \Phi\left[\frac{1}{|\tau_i|}\int_{\tau_i} |f(x)|\,dx\right] \leqslant \int_0^1 \Phi(|f(x)|)\,dx.$$

Лемма 3.1 является континуальным аналогом неравенства Караматы [11, с. 48]. Лемма 3.2 есть простое следствие неравенства Иенсена [13, с. 45].

Теорема 3.1. *Если* $f \in AC[0, 1]$, $w \in W[0, 1]$, $\hat{f}=f(w)$ *и* $\hat{f}' \in L^*_{\Phi_0}$, *то*[2]

$$R_n(f) \leqslant \frac{c}{n}\|\hat{f}'\|_{\Phi_0}.$$

Доказательство. Покажем, что для любого $n \in \mathbf{N}$ существует w-дробь Q, $\deg Q \leqslant n$, удовлетворяющая условию

$$|\hat{f}(x) - Q(x)| \leqslant \frac{c}{n}\|\hat{f}'\|_{\Phi_0}, \quad x \in [0, 1]. \tag{3.4}$$

Нам достаточно ограничиться случаем $\|\hat{f}'\|_{\Phi_0}=1$. Тогда из соотношений (3.2) и (3.3) получим

$$\int_0^1 |\hat{f}'(x)|\,dx \leqslant \|\hat{f}'\|_{\Phi_0}\|\chi_{[0,1]}\|_{\Psi_0} \leqslant 2. \tag{3.5}$$

Для любого $m \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$, строим разбиение отрезка $[0, 1]$: $\xi_0=0$,

$$\xi_{i+1} = \max\left\{\xi : \xi_i < \xi \leqslant \xi_i + \frac{1}{m}, \int_{\xi_i}^{\xi} |\hat{f}'(x)|\,dx \leqslant \frac{2}{m}\right\}.$$

Для некоторого $\mu_m \in \mathbf{N}$ мы получим, что $\xi_{\mu_m+1}=1$. Ясно, что $\mu_m \geqslant m$. Из способа построения точек ξ_i следует, что для любого $i=1\div\mu_m$ справедливо хотя бы одно из равенств

$$\xi_i - \xi_{i-1} = \frac{1}{m}, \tag{3.6}$$

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} |\hat{f}'(x)|\,dx = \frac{2}{m}. \tag{3.7}$$

Таким образом, из соотношений (3.5)—(3.7) получим, что $\mu_m \leqslant 2m$. На основании разбиения ξ_i строим разбиение η_i, где $\eta_0=\xi_0$, $\eta_1=\xi_1, \ldots, \eta_{\mu_m-1}=\xi_{\mu_m-1}$, $\eta_{\mu_m}=1$. Т. е. точку ξ_{μ_m} мы убираем. Ясно, что

$$\eta_i - \eta_{i-1} \leqslant \frac{2}{m}, \quad i=1\div\mu_m, \tag{3.8}$$

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} |\hat{f}'(x)|\,dx \leqslant \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} |\hat{f}'(x)|dx \leqslant \frac{4}{m}, \quad i=1\div\mu_m. \tag{3.9}$$

Положим $\tau_i=[\eta_{i-1}, \eta_i]$, $i=1\div\mu_m$. Тогда из неравенства (см. [10, с. 95])

$$\int_0^1 \Phi(|f(x)|/\|f\|_\Phi)\,dx \leqslant 1, \quad f \in L^*_\Phi,$$

[2] Везде в формулировках теорем n пробегает множество всех натуральных чисел.

и леммы 3.2 получим

$$\sum_{i=1}^{\mu_m} |\tau_i| \Phi_0\left(\frac{1}{2|\tau_i|}\int_{\tau_i} |\hat{f}'(x)|\, dx\right) \leqslant \int_0^1 \Phi_0(|\hat{f}'(x)|)\, dx \leqslant 1. \qquad (3.10)$$

Через Λ_m обозначим множество i, $1 \leqslant i \leqslant \mu_m$, для которых имеет место соотношение (3.7). Предполагая, что $\Lambda_m \neq \varnothing$, из (3.9) и (3.10) выводим

$$\sum_{i \in \Lambda_m} \ln^+ \frac{1}{m|\tau_i|} \leqslant m. \qquad (3.11)$$

Так как $\delta = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant \mu_m} |\tau_j| \leqslant 2/m$, $|\tau_i| \geqslant 1/m$ для $i \notin \Lambda_m$ и $\mu_m \leqslant 2m$, то, учитывая (3.11), получим

$$\mu_m + \sum_{i=1}^{\mu_m} \ln \frac{\delta}{|\tau_i|} \leqslant c_3 m. \qquad (3.12)$$

Очевидно, (3.12) имеет место и в случае, когда $\Lambda_m = \varnothing$.

Из теоремы 2.1 и соотношения (3.12) следует существование такой w-дроби Q, $\deg Q \leqslant n$, для которой верно (3.4). Заменяя в (3.4) x на $w^{-1}(x)$, получаем утверждение теоремы 3.1.

Таким образом, теорема 3.1 показывает, что функция f может быть как угодно плохой вблизи точки $x=0$ и вместе с тем обладать достаточно высокой скоростью аппроксимации рациональными дробями. Это же явление имеет место одновременно для точек $x=0$ и $x=1$. Для доказательства этого следует взять функцию w, удовлетворяющую условиям: 1) w непрерывна на $[0, 1]$, строго возрастает, $w(0)=0$ и $w(1)=1$, 2) существует точка $\xi \in (0, 1)$ такая, что w на $[0, \xi]$ выпукла вниз, а на отрезке $[\xi, 1]$ — вверх.

Следующая теорема показывает, что пространство $L^*_{\Phi_0}$ нельзя заменить никаким более широким пространством L_Φ^* так, чтобы заключение теоремы 3.1 осталось в силе.

Теорема 3.2. *Если для любой $f \in AC[0, 1]$ такой, что $f' \in L^*_\Phi$, имеем*

$$R_n(f) \leqslant \frac{c}{n} \|f'\|_\Phi,$$

то

$$\varliminf_{x\to\infty} \Phi(x)/x \ln x > 0.$$

Доказательство. Для любого $n \in \mathbf{N}$ положим $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\exp(-n\pi^2/2)$. Определим функцию $f_n \in AC[0, 1]$, равную 0 на $\left[0, \frac{1}{2} - \varepsilon_n\right]$, 1 на $\left[\frac{1}{2} + \varepsilon_n, 1\right]$ и линейную на $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_n, \frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$. Из соотношения (3.2) находим

$$\|\hat{f}'\|_\Phi = \frac{1}{2\varepsilon_n} \|\chi_{[\frac{1}{2}-\varepsilon_n, \frac{1}{2}+\varepsilon_n]}\|_\Phi = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2\varepsilon_n}\right).$$

Таким образом, согласно условию теоремы и результату А. А. Гончара [12]

$$\frac{c}{n} \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2\varepsilon_n}\right) \geqslant R_n(f_n) > \frac{1}{2e}. \qquad (3.13)$$

С учетом неравенства $\Psi^{-1}(x)\Phi^{-1}(x) \leqslant 2x$, $x \in (0, \infty)$ (см. [10, с. 25]), из

(3.13) получим

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2\varepsilon_n}\right) \leqslant \frac{2}{2\varepsilon_n \Psi^{-1}(1/2\varepsilon_n)} \leqslant \frac{2ce}{\varepsilon_n n}.$$

Следовательно,

$$\Phi\left(\frac{4ce}{n} e^{n\pi^2/2}\right) \geqslant e^{n\pi^2/2}.$$

Теорема 3.2 доказана.

§ 4. Аппроксимация абсолютно непрерывных функций с производной из класса L_Φ^*

Теорема 4.1. *Если* $f \in AC[0, 1]$, $w \in W[0, 1]$, $\hat{f} = f(w)$ *и* $\hat{f}' \in L_\Phi^*$, *то*

$$R_n(f) \leqslant c \frac{\lambda_n(\Psi)}{n},$$

где Ψ — *функция, дополнительная к* Φ *в смысле У. Юнга, и*

$$\lambda_n(\Psi) = \left\| \ln \frac{1}{x} \right\|_{L_\Psi^*(e^{-n}, 1)}.$$

Доказательство. Пусть $|\hat{f}'|^*$ — перестановка в невозрастающем порядке функции $|\hat{f}'|$. Тогда (см. [10, с. 57]) для любого $n \in \mathbf{N}$ существует множество $\tau_n \subset [0, 1]$ такое, что $|\tau_n| = e^{-n}$ и

$$\int_{\tau_n} |\hat{f}'(x)|\, dx = \int_0^{e^{-n}} |\hat{f}'(x)|^* dx. \tag{4.1}$$

Положим $F_n(x) = \hat{f}'(x)[1 - \chi_{\tau_n}(x)]$ и

$$g_n(x) = \hat{f}(0) + \int_0^x F_n(t)\, dt, \quad x \in [0, 1].$$

Тогда из соотношений (3.2) и (3.3) получим

$$\|\hat{f} - g_n\|_{C[0,1]} \leqslant \int_0^1 |\hat{f}'(x) - g_n'(x)| = \int_{\tau_n} |\hat{f}'(x)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \|\hat{f}'\|_\Phi \|\chi_{\tau_n}\|_\Psi = e^{-n}\Phi^{-1}(e^n)\|\hat{f}'\|_\Phi.$$

Итак,

$$\|f - g_n(w^{-1})\|_{C[0,1]} \leqslant e^{-n}\Phi^{-1}(e^n)\|\hat{f}'\|_\Phi. \tag{4.2}$$

Очевидно, $g_n' \in L_{\Phi_0}^*$; поэтому из теоремы 3.1 находим

$$R_n(g_n(w^{-1})) \leqslant \frac{c_1}{n} \|g_n'\|_{\Phi_0}. \tag{4.3}$$

Сейчас нужно оценить $\|g_n'\|_{\Phi_0}$. Для этого обозначим через $|g_n'(x)|^*$ перестановку в невозрастающем порядке функции $|g_n'(x)|$ и положим

$$l(x) = \int_0^x |\hat{f}'(t)|^* dt, \quad l_n(x) = \int_0^x |g_n'(t)|^* dt.$$

Из определения функции g_n следует, что $l_n'(x) = |\hat{f}'(x + e^{-n})|^*$, если $x \in [0, 1 - e^{-n}]$ и $l_n'(x) = 0$, если $x \in (1 - e^{-n}, 1]$. Следовательно,

$$\|g_n'\|_{\Phi_0} = \||\hat{f}'|^*\|_{L_{\Phi_0}^*(e^{-n}, 1)} = \|l'\|_{L_{\Phi_0}^*(e^{-n}, 1)}.$$

Из определения нормы в пространстве Орлича (3.1) получим

$$\|l'\|_{L^*_{\Phi_0}(e^{-n},1)} = \inf_{k>0}\left[k + \int_{e^{-n}}^{1} l'(x)\ln^+\frac{l'(x)}{k}\,dx\right]. \qquad (4.4)$$

Функция $l(x)$ выпукла вверх, не убывает и $l(0)=0$. Поэтому почти для всех $x\in(0, 1)$ имеет место неравенство $l'(x)\leqslant l(x)/x$. Полагая в (4.4)

$$k = l(1) = \int_0^1 |\hat{f}'(t)|\,dt \leqslant \|\hat{f}'\|_{\Phi}\,\Phi^{-1}(1),$$

из неравенства Гёльдера (3.3) получаем

$$\|g_n'\|_{\Phi_0} \leqslant l(1) + \int_{e^{-n}}^{1} l'(x)\ln\frac{1}{x}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant l(1) + \|l'\|_{\Phi}\left\|\ln\frac{1}{x}\right\|_{L^*_{\Psi}(e^{-n},1)} \leqslant \{\Phi^{-1}(1)+\lambda_n(\Psi)\}\,\|\hat{f}'\|_{\Phi}.$$

С учетом соотношений (4.2) и (4.3) имеем

$$R_n(f) \leqslant c_2\left\{e^{-n}\Phi^{-1}(e^n) + \frac{\Phi^{-1}(1)}{n} + \frac{\lambda_n(\Psi)}{n}\right\}\|\hat{f}'\|_{\Phi}.$$

Для завершения доказательства теоремы 4.1 достаточно заметить, что первые два слагаемых в последнем соотношении «поглощаются» третьим.

Через $E_n(g)_{\Phi}$, $g\in L_{\Phi}^*$, обозначим наилучшее приближение g по норме $\|\cdot\|_{\Phi}$ полиномами степени не выше n.

Теорема 4.2. *Если $f\in AC[0, 1]$ и $f'\in L^*_{\Phi}$, то*

$$R_{2n+1}(f) \leqslant c\,\frac{\lambda_n(\Psi)}{n}\,E_n(f')_{\Phi},$$

где $\lambda_n(\Psi)$ определено в теореме 4.1.

Доказательство. Пусть p_n — полином наилучшего приближения степени не выше n функции f' в пространстве L_{Φ}^*. Положим $g_n(x) = f(x) - \int_0^x p_n(t)\,dt$. Из теоремы 4.1 получим

$$R_n(g_n) \leqslant c\,\frac{\lambda_n(\Psi)}{n}\,\|g_n'\|_{\Phi} = c\,\frac{\lambda_n(\Psi)}{n}\,E_n(f')_{\Phi}.$$

Откуда и следует утверждение теоремы 4.2.

Следствие (см. [15], [21]). *Если $f\in C[0, 1]$ выпукла, то $R_n(f) = o(1/n)$.*

Доказательство. Пусть функция $u(x)$ выпукла вверх, строго возрастает и $u(0)=0$, $u(1)=1$. Тогда $w(x)=u^{-1}(x)$ принадлежит классу $W[0, 1]$ и согласно теореме 3.1 $R_n(u)\leqslant\frac{c}{n}\|\hat{u}'\|_{\Phi_0}\leqslant\frac{c_1}{n}$, $\hat{u}=u(w)$. Отсюда следует, что для любой выпуклой вверх, неубывающей функции $g\in C[0, 1]$ и такой, что $g(0)=0$, имеет место неравенство

$$R_n(g) \leqslant \frac{c}{n}\,g(1). \qquad (4.5)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, положим $\varphi_\varepsilon(x) = \min\{g(x), g(\varepsilon)\}$ и $\psi_\varepsilon(x) = g(x) - \varphi_\varepsilon(x)$, $x \in [0, 1]$. Из соотношения (4.5) и теоремы 4.2 получим

$$R_{3n+1}(g) \leqslant R_n(\varphi_\varepsilon) + R_{2n+1}(\psi_\varepsilon) \leqslant \frac{c}{n}[g(\varepsilon) + E_n(\psi_\varepsilon)_{\Phi_0}],$$

откуда и следует нужное соотношение.

Теорема 4.3. *Пусть* $f \in AC[0, 1]$, $w \in W[0, 1]$, $\hat{f} = f(w)$ *и* $\hat{f}' \in L_\Phi^*$. *Если, кроме того,* $\Phi(2x) = O(\Phi(x))$ *либо* $x \ln x = O(\Phi(x))$ *при* $x \to \infty$, *то*

$$R_n(f) = o(\lambda_n(\Psi)/n),$$

где $\lambda_n(\Psi)$ *определено в теореме* 4.1.

Доказательство. Пусть $\Phi(2x) = O(\Phi(x))$ при $x \to \infty$. В этом случае пространство L_Φ^* является сепарабельным и (см. [10, с. 103]) существует последовательность полиномов $\{p_k\}_{k=1}^\infty$, $\deg p_k \leqslant k$, удовлетворяющих условию

$$\|\hat{f}' - p_k'\|_\Phi \leqslant \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \downarrow +0.$$

Согласно следствию из теоремы 4.2 получаем последовательность натуральных чисел $\{k_n\}_{n=1}^\infty$, $k_n \uparrow \infty$, таких, что

$$R_n(p_{k_n}(w^{-1})) \leqslant \frac{\delta_n}{n}, \quad \delta_n \downarrow +0.$$

Таким образом, из теоремы 4.1 получим

$$R_{2n}(f) \leqslant R_n(f - p_{k_n}(w^{-1})) + R_n(p_{k_n}(w^{-1})) \leqslant$$
$$\frac{\varepsilon_{k_n}}{n} \lambda_n(\Psi) + \frac{\delta_n}{n} = o\left(\lambda_n \frac{(\Psi)}{n}\right).$$

Если же $x \ln x = O(\Phi(x))$, $x \to \infty$, то из определения взаимной функции получим $\Psi(y) = O(e^{cy})$ при $y \to \infty$. Следовательно, $\lambda_n(\Psi) = O(1)$, и нужно доказать, что $R_n(f) = o(1/n)$. Так как $\hat{f}' \in \overset{*}{L}_{\Phi_0}$, то достаточно обратиться к первому случаю. Теорема 4.3 доказана.

Следствие. *Пусть* $f \in AC[0, 1]$, $w \in W[0, 1]$, $\hat{f} = f(w)$ *и* $|\hat{f}'|(\ln^+|f'|)^\beta$, $\beta > 0$, *суммируема. Тогда*

$$R_n(f) = o(1/n), \quad \textit{если} \quad \beta \geqslant 1,$$
$$R_n(f) = o(1/n^\beta), \quad \textit{если} \quad \beta < 1.$$

§ 5. Аппроксимация непрерывных функций с заданными модулем непрерывности и модулем изменения

Задача, указанная в заглавии этого параграфа, решена одновременно и независимо в [8] и [23]. Здесь же, используя теорему 3.1, мы получим несколько более общий результат.

Для $f \in C[0, 1]$ через $\omega(\delta, f)$ и $\varkappa(n, f)$ обозначим модуль непрерывности и модуль изменения [16] соответственно. Т. е.

$$\omega(\delta, f) = \sup\{|f(x) - f(y)|: x, y \in [0, 1], |x - y| \leqslant \delta\}, \delta \geqslant 0;$$

$$\varkappa(n, f) = \sup\left\{\sum_{k=1}^n |f(x_{2k}) - f(x_{2k-1})|: 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n} \leqslant 1\right\}.$$

Считаем, что $\varkappa(0, f) = 0$ и для любого $y \in [n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, $\varkappa(y, f) = (n - y)\varkappa(n-1, f) + (y + 1 - n)\varkappa(n, f)$. Таким образом, функции $\omega(\delta, f)$ и $\varkappa(y, f)$ определены на полуоси $[0, \infty)$. Через $\tilde{\omega}(\delta, f)$ обозначим наименьшую выпуклую мажоранту функции $\omega(\delta, f)$. Тогда для любого $y \geqslant \geqslant 1$ имеет место неравенство (см. [16])

$$\varkappa(y, f) \leqslant y\tilde{\omega}\left(\frac{1}{y}, f\right). \tag{5.1}$$

Функция $\varkappa(y, f)$ также выпукла вверх и не убывает (см. [16]).

Теорема 5.1. *Если* $f \in C[0, 1]$, $w \in W[0, 1]$ *и* $\hat{f} = f(w)$, *то*

$$R_n(f) \leqslant c \inf_{y>0} \left\{ \frac{\varkappa(y, f)}{y} + \omega\left[\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n}{y}\right), \hat{f}\right]\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\omega(\delta, \hat{f}) = \omega(\delta)$, $\tilde{\omega}(\delta, \hat{f}) = \tilde{\omega}(\delta)$, $\varkappa(y, f) = \varkappa(y)$ и $\Omega(\hat{f}, [\alpha, \beta])$ — колебание функции $\hat{f}$ на отрезке $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$. Для некоторого $m \geqslant 2$ построим разбиение отрезка $[0, 1]$, полагая

$$\eta_0 = 0,$$

$$\eta_{i+1} = \max\left\{\eta \in [0, 1]: \eta_i < \eta \leqslant \eta_i + \frac{1}{m}, \Omega(\hat{f}, [\eta_i, \eta] \leqslant \frac{\varkappa(m)}{m}\right\}.$$

Пусть $\mu_m \in \mathbf{N}$ такое, что $\eta_{\mu_m+1} = 1$. Через $g \in C[0, 1]$ обозначим полигональную функцию, удовлетворяющую условиям $g(\eta_i) = \hat{f}(\eta_i)$, $i = 0 \div \mu_m$, $g(1) = g(\eta_{\mu_m+1}) = \hat{f}(\eta_{\mu_m})$, и на каждом из участков $[\eta_i, \eta_{i+1}]$ g линейна. Тогда

$$\|f - g(w^{-1})\|_{C[0,1]} \leqslant \frac{\varkappa(m)}{m}. \tag{5.2}$$

Из способа построения точек η_i получим, что для любого $i = 0 \div \mu_m - 1$ выполняется хотя бы одно из равенств

$$\eta_{i+1} - \eta_i = \frac{1}{m}, \tag{5.3}$$

$$\Omega(\hat{f}, [\eta_i, \eta_{i+1}]) \leqslant \frac{\varkappa(m)}{m}. \tag{5.4}$$

Ясно, что различных значений i, при которых верно (5.3), не более m. С другой стороны, различных значений i, при которых верно (5.4), также не более m. Действительно, если таких значений не меньше $m+1$, то $\varkappa(m+1) \geqslant \frac{m+1}{m}\varkappa(m)$. Так как $\varkappa(0) = 0$, то $\varkappa(y)$ выпукла вверх и не убывает, поэтому $\varkappa(m+1) \leqslant \frac{m+1}{m}\varkappa(m)$. Отсюда получаем, что $\varkappa(y)$ линейна на отрезке $[0, m+1]$. Значит, $\Omega(\hat{f}, \Delta) \leqslant \varkappa(m)/m$ для любого отрезка $\Delta \subseteq [0, 1]$ и $\eta_i = i/m$, $i = 0 \div m$. Таким образом, мы получили не более m различных значений i, при которых верно (5.4), что противоречит предположению. Итак, $m - 1 \leqslant \mu_m \leqslant 2m$.

Введем $\tilde{\omega}^{-1}(t) = \inf\{y > 0: \tilde{\omega}(y) = t\}$ — функцию, обратную к $\tilde{\omega}(y)$. Из соотношения (5.4) получим

$$\min_{i=0\div\mu_m-1} (\eta_{i+1} - \eta_i) \geqslant \tilde{\omega}^{-1}\left(\frac{\varkappa(m)}{m}\right) = \varepsilon_m \leqslant \frac{1}{m}.$$

Через $h(x)$ обозначим функцию, равную $\varkappa(m)/m\varepsilon_m$, если $x \in [0, \mu_m\varepsilon_m]$, и равную 0, если $x \in (\mu_m\varepsilon_m, 1]$. Пусть $|g'(x)|^*$ — перестановка в невозрастающем порядке функции $|g'(x)|$. Очевидно, для любого $x \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$\int_0^x h(t) \leqslant \int_0^x |g'(t)|^* dt.$$

Следовательно, из леммы 3.1 получим

$$\|g'\|_{\Phi_0}=\||g'|^*\|_{\Phi_0}\leqslant\|h\|_{\Phi_0}=\varkappa(m)\frac{\mu_m}{m}\ln\frac{e}{m\varepsilon_m}\leqslant 2\varkappa(m)\ln\frac{e}{m\varepsilon_m}.$$

Из соотношения (5.2) и теоремы 3.1 находим

$$R_n(f)\leqslant c\left\{\frac{\varkappa(m)}{m}+\frac{\varkappa(m)}{n}\ln\frac{e}{m\varepsilon_m}\right\}. \tag{5.5}$$

Рассмотрим функцию

$$l_n(y)=\frac{\varkappa(y)}{m}-\tilde{\omega}\left[\frac{e}{y}\exp\left(-\frac{n}{y}\right)\right].$$

Функция $\varkappa(y)/y$ не возрастает на $(0, n]$, а $\tilde{\omega}\left[\frac{e}{y}\exp\left(-\frac{n}{y}\right)\right]$ не убывает на $(0, n]$. Следовательно, $l_n(y)$ не возрастает на $(0, n]$. Кроме того, из соотношения (5.1) получим $l_n(+0)=\varkappa(1)$, $l_n(n)=\frac{\varkappa(n)}{n}-\tilde{\omega}\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant 0$. Обозначим через m_n наибольшее значение $m\in\mathbf{N}$, при котором $l_n(m)\geqslant 0$. Тогда $1\leqslant m_n\leqslant n$ и имеют место неравенства

$$\frac{\varkappa(m_n)}{m_n}\geqslant\tilde{\omega}\left[\frac{e}{m_n}\exp\left(-\frac{n}{m_n}\right)\right], \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa(m_n)}{m_n}\leqslant\frac{\varkappa(m_n+1)}{m_n+1}<\tilde{\omega}\left[\frac{e}{m_n+1}\exp\left(-\frac{n}{m_n+1}\right)\right]. \tag{5.7}$$

Из (5.6) получим, что

$$\frac{\varkappa(m_n)}{m_n}\geqslant\frac{\varkappa(m_n)}{n}\ln\frac{e}{m_n\varepsilon_{m_n}}.$$

Таким образом, из соотношения (5.5) имеем

$$R_n(f)\leqslant c\left\{\frac{\varkappa(m_n)}{m_n}+\tilde{\omega}\left[\frac{e}{m_n}\exp\left(-\frac{n}{m_n}\right)\right]\right\}.$$

Следовательно, из (5.6) и (5.7) получим

$$R_n(f)\leqslant c_1\min_{1\leqslant t\leqslant n/2}\left\{\frac{\varkappa(t)}{t}+\tilde{\omega}\left[\frac{e}{t}\exp\left(-\frac{n}{t}\right)\right]\right\}. \tag{5.8}$$

Так как для $t\in[1, n/2]$ имеет место неравенство $\frac{e}{t}\exp(-n/t)\leqslant\frac{2e}{n}\exp(-n/2t)$, а также (см. [18]) $\tilde{\omega}(\delta)\leqslant 2\omega(\delta)$, $\delta\geqslant 0$, то из (5.8) следует утверждение теоремы 5.1.

С л е д с т в и е. *Если $f\in C[0, 1]$, $w\in W[0, 1]$, $\hat{f}=f(w)$ и f имеет конечное изменение, равное v, то*

$$R_n(f)\leqslant c\inf_{y>0}\left\{\frac{v}{y}+\omega\left[\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n}{y}\right), \hat{f}\right]\right\}.$$

Аналогично, как и теорема 4.3, доказывается следующая

Т е о р е м а 5.2. *Если $f\in AC[0, 1]$, $w\in W[0, 1]$ и $\hat{f}=f(w)$, то существует последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n=\varepsilon_n(f', w)\downarrow +0$, такая, что*

$$R_n(f)\leqslant c\inf_{y>0}\left\{\frac{\varepsilon_n}{y}+\omega\left[\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n}{y}\right), \hat{f}\right]\right\}.$$

Отметим, что если $w(x)=x$, то ε_n можно положить (см. [14]) равным $\omega(1/n, f')_L$, где $\omega(\delta, f')_L$ — интегральный модуль непрерывности f'.

Кроме того, для непрерывных функций с конечным изменением теорема 5.2 не имеет места. Соответствующий пример построен в [22] (разумеется, случай $\omega(\delta, \hat{f}) = O(\delta)$ исключается).

§ 6. Обобщение теоремы 3.1

Пусть $E_r(f, [a, b])$ — наилучшее равномерное приближение $f \in C[a, b]$ полиномами степени не выше r. Если $r \in \mathbf{Z}_+$, $\alpha > 0$ и неотрицательная на $[0, 1]$ функция $g \in L(0, 1)$, то через $\mathfrak{M}_r^\alpha(g)$ обозначим множество функций $f \in C[0, 1]$ таких, что для любого отрезка $[a, b] \subseteq [0, 1]$ имеет место неравенство

$$E_r(f, [a, b]) \leqslant \left(\int_a^b g(t)\, dt \right)^\alpha .$$

Теорема 6.1. *Если $f \in \mathfrak{M}_r^\alpha(g)$ и $g \in L^*_{\Phi_1}$, $\Phi_1(x) = x(\ln^+ x)^3$, то*[3]

$$R_n(f) \leqslant \frac{c(\alpha, r)}{n^\alpha} \| g \|^\alpha_{\Phi_1}, \quad n \geqslant r.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\|g\|_{\Phi_1} = 1$. Положим $g_1(t) = \max\{g(t), 1\}$ и $\varkappa = \int_0^1 g_1(t) dt$. Из неравенства Гёльдера (3.3) получим $\int_0^1 g(t)\, dt \leqslant 3$, и, следовательно, $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$.

Для $p \in \mathbf{N}$ определим разбиение $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_{2^p+1} = 1$ отрезка $[0, 1]$ так, чтобы

$$\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} g_1(t)\, dt = \frac{\varkappa}{2^p + 1}, \quad i = 0 \div 2^p.$$

Определим множество отрезков I_i^k, $i = 0 \div 2^{p-k} - 1$, $0 \leqslant k \leqslant p$, по индукции:

$$I_i^0 = [\eta_i, \eta_{i+2}], \quad i = 0 \div 2^p - 1,$$

$$I_i^{k+1} = I_{2i}^k \cup I_{2i+1}^k, \quad i = 0 \div 2^{p-k} - 1, \; 0 \leqslant k \leqslant p - 1.$$

Положим

$$\delta_i = \eta_{i+1} - \eta_i, \; i = 0 \div 2^p, \quad \delta = \max\{\delta_i \colon 0 \leqslant i \leqslant 2^p\},$$

$$\delta_{i,k} = \min\{\delta_j \colon [\eta_j, \eta_{j+1}] \subset I_i^k\}.$$

Пусть $p_r(x, j)$ — некоторый полином степени не выше r, удовлетворяющий условию $\|f - p_r(\cdot, j)\|_{C(I_j^0)} \leqslant \left(\int_{I_j^0} g(t)\, dt \right)^\alpha$. Если $I_{j_1}^0$ и $I_{j_2}^0 \subset I_i^k$, то, как легко убедиться, имеет место соотношение

$$\| p_r(\cdot, j_1) - p_r(\cdot, j_2) \|_{C(I_i^k)} \leqslant c(r) \left(\frac{|I_i^k|}{\delta_{i,k}} \right)^r \left(\int_{I_i^k} g(t)\, dt \right)^\alpha . \tag{6.1}$$

---

[3] Через $c(\alpha, \beta, \ldots)$, $c_i(\alpha, \beta, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots$, обозначаем некоторые положительные величины, зависящие лишь от указанных параметров $\alpha, \beta, \ldots$.

Так как $\delta \leqslant \varkappa/(2^p+1) < 4/2^p$ и $|I_i^k| \leqslant 2^{k+1}\delta^i$, то из (6.1) и определения разбиения η_i получим

$$\|p_r(\cdot, j_1) - p_r(\cdot, j_2)\|_{C(I_i^k)} \leqslant \frac{c(r)}{2^{\alpha p}} \left(\frac{2^{k+4}\delta}{\delta_{i,k}}\right)^{r+\alpha}. \tag{6.2}$$

Нулевым усреднением называем полиномы $p_r(x, i)$, $i = 0 \div 2^p - 1$. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2.1, с использованием рациональных функций $\varphi_{l_{i,k}}^-$ и $\varphi_{l_{i,k}}^+$ (в лемме 1.3 необходимо положить $w(x) = x$) на основании k-го усреднения строим $(k+1)$-е усреднение. При этом, как следует из (6.2), достаточно определить

$$l_{i,k} = 1 + \left[2(k+1)\ln\frac{2^{k+4}\delta}{\delta_{i,k}} + (\alpha + r)\ln^2\frac{2^{k+4}\delta}{\delta_{i,k}}\right].$$

После p-го усреднения получим рациональную функцию Q такую, что

$$\|f - Q\|_{C[0,1]} \leqslant \frac{c_1(r)}{2^{\alpha p}}. \tag{6.3}$$

С другой стороны,

$$\deg Q \leqslant r + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=0}^{2^{p-k}-1} 2l_{i,k}.$$

Обозначим через δ_i^*, $i = 0 \div 2^p$, перестановку в неубывающем порядке чисел δ_i. Тогда

$$\deg Q \leqslant c_2(r, \alpha)\,2^p + c_3(r, \alpha)\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=0}^{2^{p-k}-1}\ln^2\frac{\delta}{\delta_i^*} \leqslant$$

$$\leqslant c_2(r, \alpha)\,2^p + c_4(r, \alpha)\sum_{i=0}^{2^{p-1}-1}\ln\frac{2^p}{i+1}\ln^2\frac{\delta}{\delta_i^*} \leqslant$$

$$\leqslant c_2(r, \alpha)\,2^p + c_4(r, \alpha)\sum_{i=0}^{2^{p-1}-1}\left(\frac{1}{3}\ln^3\frac{2^p}{i+1} + \frac{2}{3}\ln^3\frac{\delta}{\delta_i^*}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_5(r, \alpha)\,2^p + c_6(r, \alpha)\sum_{i=0}^{2^p}\ln^3\frac{\delta}{\delta_i}. \tag{6.4}$$

Аналогично, как и при доказательстве теоремы 3.1, получим

$$\sum_{i=0}^{2^p}\ln^3\frac{\delta}{\delta_i} \leqslant c_7 2^p. \tag{6.5}$$

Итак, из соотношений (6.3)—(6.5) следует утверждение теоремы 6.1.

З а м е ч а н и я. а) При $r=0$ теорема 6.1 останется в силе, если пространство $L_{\Phi_1}^*$ заменить на $L_{\Phi_0}^*$. Это объясняется тем, что сомножитель $(|I_i^k|/\delta_{i,k})^r$ в правой части (6.1) отсутствует и поэтому можно действовать так же, как и при доказательстве теоремы 3.1. В общем случае вопрос о замене $L_{\Phi_1}^*$ на $L_{\Phi_0}^*$ остается открытым.

б) Если при доказательстве теоремы 6.1 использовать w-дроби $\varphi_{l_{i,k}}^{\pm}$, то мы получим функцию Q, удовлетворяющую условию $\|f - Q\|_{C[0,1]} \leqslant \leqslant c(\alpha, r)\, n^{-\alpha}\|g\|_{\Phi_1}^{\alpha}$, вида

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \Psi_i(x)\, p_i(x),$$

где p_i — полиномы степени не выше r, а Ψ_i — неотрицательные w-дроби такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\Psi_i(x)\equiv 1$ и любая линейная комбинация Ψ_i есть w-дробь степени не выше n.

в) Теорема 6.1 обобщает теорему 3.1 в том смысле, что если $f\in AC[0, 1]$, то $f\in\mathfrak{M}_1^0(|f'|)$.

Через V_r, $r\geqslant 1$, обозначим множество функций f, определенных на отрезке $[0, 1]$, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ такую, что $f^{(r)}$ есть функция ограниченной вариации.

Следствие (см. [20]). *Если $f\in V_r$, то*

$$R_n(f)\leqslant c(r)vn^{-r-1},\quad n\geqslant r,$$

где v — полное изменение $f^{(r)}$.

Доказательство. Ясно, что достаточно считать функцию $f^{(r)}$ абсолютно непрерывной. Тогда ее вариация $v=\int\limits_0^1|f^{(r+1)}(t)|\,dt$. Положим

$$\Theta(x)=\sup_{y\in[0,1]\setminus\{x\}}\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y|f^{(r+1)}(t)|\,dt.$$

По теореме Харди — Литтльвуда [13, с. 58] для любого $\varepsilon\in(0, 1)$ имеем $\Theta\in L^{1-\varepsilon}$ и $\|\Theta\|_{L^{1-\varepsilon}}\leqslant c(\varepsilon)v$. С другой стороны, для любого отрезка $[a, b]\subseteq[0, 1]$ справедливо соотношение

$$E_r(f, [a, b])\leqslant(b-a)^r\int\limits_a^b|f^{(r+1)}(t)|\,dt\leqslant c(r)\left(\int\limits_a^b\sqrt[r+1]{\Theta(t)}\,dt\right)^{r+1}.$$

Применение теоремы 6.1 завершает доказательство.

§ 7. Аппроксимация периодических функций

Пусть дуга $\gamma\subseteq\Gamma=\{z\colon |z|=1\}$, тогда через $E_n(f, \gamma)$ обозначим наилучшее равномерное приближение $f\in C(\gamma)$ линейными комбинациями функций $z^{-n}, z^{-(n-1)}, \ldots, 1, z, \ldots, z^n$. Аналогично, как и в непериодическом случае, определяются классы функций $AC(\Gamma)$, $\mathfrak{M}_r^\alpha(g, \Gamma)$, а также $R_n(f, \Gamma)$ — наилучшее равномерное приближение $f\in C(\Gamma)$ рациональными дробями степени не выше n.

Лемма 1.2 позволяет также получить аппроксимационные теоремы для классов $AC(\Gamma)$ и $\mathfrak{M}_r^\alpha(g, \Gamma)$. Следует заметить, что в этом случае доказательство аналога теоремы 2.1 выглядит несколько проще. Это объясняется тем, что нет необходимости во введении фиктивных точек деления (см. доказательство теоремы 2.1).

Теорема 7.1. *Если $f\in AC(\Gamma)$ и $f'\in L^*_\Phi(\Gamma)$, то*

$$R_n(f, \Gamma)\leqslant c\frac{\lambda_n(\Psi)}{n}\|f'\|_{L^*_\Phi(\Gamma)},$$

где $\lambda_n(\Psi)$ определено в теореме 4.1.

Теорема 7.2. *Если $f\in\mathfrak{M}_r^\alpha(g, \Gamma)$ и $g\in L^*_{\Phi_1}(\Gamma)$, $\Phi_1(x)=x(\ln^+x)^3$, то*

$$R_n(f, \Gamma)\leqslant\frac{c(r, \alpha)}{n^\alpha}\|g\|^\alpha_{L^*_{\Phi_1}(\Gamma)},\quad n\geqslant r.$$

Следующая теорема доказана в [4], а также легко может быть получена из результатов Е. А. Севастьянова [19]. Она показывает, что при $\Phi=\Phi_0$ теорема 7.1 допускает частичное обращение.

Теорема 7.3. *Если* $f\in C(\Gamma)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} R_n(f,\Gamma)<\infty$, *то* $f\in AC(\Gamma)$ (Е. П. Долженко). *Пусть дополнительно* f *действительна на* Γ *и* $df(e^{it})/dt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, *ограничена снизу (или сверху). Тогда* $f'\in L_{\Phi_0}(\Gamma)$.

Теорема 7.2 также допускает частичное обращение. А именно, имеет место

Теорема 7.4. *Пусть* $f\in C(\Gamma)$ *и для некоторого* $r\in\mathbf{Z}_+$ *сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[r+1]{R_n(f,\Gamma)}$. *Тогда существует неотрицательная функция* $g\in L(\Gamma)$ *такая, что* $f\in\mathfrak{M}_r^{r+1}(g,\Gamma)$.

Очевидно, при $r=0$ теорема 7.4 следует из результата Е. П. Долженко [1]. В общем случае эта теорема будет доказана в другой нашей работе.

Литература

1. *Долженко Е. П.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций.— Матем. сб., 1962, т. 56 (98), с. 403—433.
2. *Гончар А. А.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций.— В кн.: Труды Международного конгресса математиков, 1966 г. М.: Мир, 1968, с. 329—356.
3. *Popov V. A., Szabados J.* A remark on the rational approximation of functions.— C. r. Acad.Bulgare Sci., 1975, t. 28, № 5, p. 1303—1306.
4. *Пекарский А. А.* Рациональная аппроксимация и пространства Орлича.— Деп. в ВИНИТИ рег. № 314—78 (РЖМат., 1978, 7Б730), 28 с.
5. *Долженко Е. П.* Равномерные аппроксимации рациональными функциями (алгебраическими и тригонометрическими) и глобальные функциональные свойства.— ДАН СССР, 1966, т. 166, № 3, с. 526—529.
6. *Гончар А. А.* О наилучших приближениях рациональными функциями.— ДАН СССР, 1955, т. 100, № 2, с. 205—208.
7. *Пекарский А. А.* Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича.— ДАН БССР, 1980, т. 24, № 4, с. 301—304.
8. *Пекарский А. А.* Рациональная аппроксимация непрерывных функций с заданными модулем непрерывности и модулем изменения.— Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 5, с. 34—39.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.
10. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
11. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.
12. *Гончар А. А.* О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями.— Матем. сб., 1969, т. 78 (120), с. 640—654.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
14. *Пекарский А. А.* Рациональная аппроксимация абсолютно непрерывных функций.— Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 6, с. 22—26.
15. *Попов В. А., Петрушев П. П.* Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями.— Матем. сб., 1977, т. 103 (145), с. 285—292.
16. *Чантурия З. А.* Модуль изменения функции и его применение в теории рядов Фурье.— ДАН СССР, 1974, т. 214, № 1, с. 63—66.
17. *Буланов А. П.* Рациональные приближения непрерывных функций с конечным изменением.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, т. 39, с. 1142—1181.
18. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
19. *Севастьянов Е. А.* Рациональная аппроксимация и абсолютная сходимость рядов Фурье.— Матем. сб., 1978, т. 107 (149), с. 227—244.
20. *Popov V. A.* Uniform rational approximation of the classe V_r and its applications.— Acta Math.,1977,v. 29, № 1—2, p. 119—129.
21. *Пекарский А. А.* Метод последовательных усреднений в теории рациональной аппроксимации.— ДАН БССР, 1977, т. 21, № 10, с. 876—878.
22. *Пекарский А. А.* Рациональная аппроксимация сингулярных функций.— Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1980, № 3, с. 32—40.
23. *Петрушев П. П.* Равномерные рациональные аппроксимации функций с конечным изменением.— ПЛИСКА Български матем. студии, 1977, т. 1, с. 145—155.

Минск

Поступила в редакцию
28.III.1980