Пользуясь Теоремой 1 и классической теоремой Вейерштрасса получаем следующее

Предложение 1. Пусть (X,t) − компактное топологическое пространство, снабженное отношением предпорядка J ; выполнено условие (2) Теоремы 1. Тогда $Max(X|<)$ №Ж.

Заключение.

В этой работе представляется очень простой подход к изучению существования полунепрерывной функции полезности на предупорядоченном множестве, снабженном топологией. Даются простые достаточные условия существования полунепрерывной функции полезности. Используя эти условия, была получена классическая теорема Рейдера и критериальные условия существования полунепрерывной функции полезности на упорядоченном множестве, снабженном топологией. Дается простое достаточное условие существования максимальных элементов на компактном топологическом пространстве, снабженном отношением предпорядка. Для ознакомления с другими подходами решения данной проблемы отсылаем читателя в [2].

Литература

1. *Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б.*Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. / Ленинград: Наука. Ленингр. отделение, 1980. - 168с.
2. *Bosi G., Mehta G.B.* Existence of a semicontinuous or continuous utility function: a unified approach and an elementary proof. // Journal of Mathematical Economics, 2002, vol. 38, 311-328.
3. *Bridges D.S., Mehta G.B.* Representations of Preferences Orderings. / Springer - Verlag, Berlin, 1995.
4. *Isler R.* Semicontinuous utility functions in topological spaces. // Rivista di Matematica per le Scienze Economiche eSociali, 1997, vol. 20, 111-116.
5. *Mehta G.B.* A remark on a utility representation theorem of Rader. // Economic Theory, 1997, vol. 9, 367-370.
6. *Rader T.* The existence of a utility function to represent preferences. // Review of Economic Studies, 1963, vol. 30, 229-232.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РЕБЕРНЫХ ГРАФОВ ОБОБЩЕННЫХ ХЭЛЛИЕВЫХ ГИПЕРГРАФОВ ОГРАНИЧЕННОГО РАНГА

О. В. Глебова

В работе рассматриваются конечные гиперграфы без изолированных вершин. Через $V(H)$ и $E(H)$ обозначаются *множество вершин* и *семейство ребер* гиперграфа H соответственно. *Рангом* гиперграфа называют максимум мощностей его ребер.

Реберный граф $L(H)$ гиперграфа H определяется следующим образом: вершины $L(H)$ находятся в биективном соответствии с ребрами H, и две вершины смежны в $L(H)$ тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра пересекаются в H. Обозначим через L_r класс реберных графов гиперграфов ранга не выше r.

Отметим, что L_r – наследственный класс графов, т. е. индуцированные подграфы графа из класса L_r также принадлежат этому классу. Известно, что каждый наследственный класс графов P можно охарактеризовать списком запрещенных индуцированных подграфов. Если такой список конечен, назовем его *конечной характеризацией* класса P. Из существования конечной характеризации наследственного класса следует, что существует полиномиальный алгоритм распознавания графов из этого класса.

Конечная характеризация класса L_2 реберных графов мультиграфов получена в [1]. Задача характеризации класса L_3 впервые поставлена в [2]. В [3] показано, что задача распознавания «$G \in L_r$» является NP-полной для каждого фиксированного $r \geq 4$, а также показано, что задача распознавания реберных графов простых гиперграфов ранга не выше 3 является NP-полной.

Гиперграф H называется *хэллиевым*, если для любого семейства $E \subseteq E(H)$ попарно пересекающихся ребер существует вершина, принадлежащая всем ребрам семейства E.

В гиперграфе H семейство ребер $E \subseteq E(H)$ называется (p,q)-*пересекающимся*, если для любого подсемейства $E' \subseteq E$ такого, что $|E'| \leq p$, выполняется неравенство $\left|\bigcap_{e \in E'} e\right| \geq q$. В [4] введено следующее обобщение понятия хэллиевого гиперграфа. Гиперграф H называется (p,q,s)-*хэллиевым*, если для любого (p,q)-пересекающегося семейства ребер $E \subseteq E(H)$ выполняется неравенство $\left|\bigcap_{e \in E} e\right| \geq s$. Тем самым, хэллиев гиперграф есть $(2,1,1)$-хэллиев гиперграф.

Множество вершин $V \subseteq V(H)$ называется (p,q)-*включенным*, если любое подмножество $V' \subseteq V$ такое, что $|V'| \leq p$, содержится не менее чем в q ребрах гиперграфа. Гиперграф H называется (p,q,s)-*конформным*, если любое (p,q)-включенное множество вершин $V \subseteq V(H)$ содержится не менее чем в s ребрах гиперграфа H.

Двойственным гиперграфом для гиперграфа H с матрицей инцидентности $I(H)=I$ называется гиперграф H^* с транспонированной матрицей инцидентности $I\left(H^*\right)=I^T$.

Легко показать, что свойства (p,q,s)-хэллиевости и (p,q,s)-конформности являются взаимно двойственными, т. е. верна

Теорема 1. Гиперграф H является (p,q,s)-хэллиевым тогда и только тогда, когда гиперграф H^* является (p,q,s)-конформным.

Обозначим через $L_r(p,q,s)$ класс реберных графов (p,q,s)-хэллиевых гиперграфов ранга не выше r.

Конечное семейство $Q=(\, C_i : i \in I)$ клик графа G называется *покрытием* графа, если каждая вершина и каждое ребро графа G содержатся в некотором C_i. При этом, клики C_i называются *кластерами* покрытия Q. Для произвольного покрытия $Q=(\, C_i : i \in I)$ графа G определим гиперграф $H(Q)$ следующим образом: вершинами $H(Q)$ являются вершины графа G, а ребрами – кластеры из Q. Ребра C_i и C_j различны при $i \neq j$, даже если множества C_i и C_j совпадают.

Пусть P – теоретико-гиперграфовое свойство, т. е. класс гиперграфов, различаемых с точностью до изоморфизма. Скажем, что покрытие Q графа G имеет свойство P, если $H(Q) \in P$. Положим $L(P)=\{\, L(H) : H \in P \}$, $P^*=\left\{\, H^* : H \in P \right\}$. В [5] доказана следующая

Теорема 2. Пусть P – произвольное теоретико-гиперграфовое свойство, G – граф. Тогда $G \in L(P)$ тогда и только тогда, когда существует покрытие Q графа G, обладающее свойством P^*.

Покрытие графа называется r-*покрытием*, если каждая вершина графа принадлежит не более чем r кластерам этого покрытия.

Из теорем 1 и 2 немедленно вытекает, что верна

Теорема 3. Граф G принадлежит классу $L_r(p,q,s)$ тогда и только тогда, когда существует (p,q,s)-конформное r-покрытие графа G.

В [6] доказано, что для любого целого $r \geq 2$ существует конечная характеризация класса $L_r(2,1,1)$. Возникает естественный вопрос о конечной характеризуемости класса $L_r(p,q,s)$, если тройка параметров

(p,q,s) отлична от $(2,1,1)$.

Теорема 4. Класс $L_2(3,1,1)$ совпадает с классом L_2.

Доказательство. Очевидно, что $L_2(3,1,1) \subseteq L_2$. Покажем, что $L_2 \subseteq L_2(3,1,1)$. Рассмотрим произвольный граф $G \in L_2$ и его 2-покрытие Q. Пусть C, $|C| \geq 4$, – клика в G, являющаяся $(3,1)$-включенным множеством вершин графа $H(Q)$, и C', $|C'| \geq 3$, – максимальное по включению собственное подмножество клики C, содержащееся в некотором кластере $C_1 \in Q$. Положим $C_1 = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ и $a \in C \setminus C'$. Каждый из $k-1$ треугольников $v_1v_2a, v_1v_3a, ..., v_1v_ka$ содержится в некотором кластере из Q, отличном от C_1. Поскольку вершина v_1 не может войти более чем в два кластера из Q, то все указанные треугольники содержатся в одном кластере $C_2 \in Q$, $C_2 \neq C_1$. Следовательно, клика $\{v_1, v_2, ..., v_k, a\}$ целиком содержится в кластере C_2, что противоречит максимальности C'. Теорема доказана.

Теорема 5. Класс $L_2(2,2,1)$ совпадает с классом L_2.

Доказательство. Очевидно, что $L_2(2,2,1) \subseteq L_2$. Покажем, что верно обратное включение. Пусть $G \in L_2$ и Q – некоторое 2-покрытие графа G. Возьмем произвольную клику C графа G, являющуюся $(2,2)$-включенным множеством вершин графа $H(Q)$. Положим $C = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Если ребро v_1v_2 содержится в кластерах $C_1, C_2 \in Q$, то каждое из ребер $v_1v_3, v_1v_4, ..., v_1v_k$ также содержится в кластерах C_1, C_2 (т. к. вершина v_1 не может входить более чем в два кластера из Q). Следовательно, $C \subseteq C_1$ и $C \subseteq C_2$. Таким образом, покрытие Q является $(2,2,1)$-конформным. Теорема доказана.

Очевидны следующие включения: $L_r(p,q,s) \subseteq L_r(p+1,q,s)$, $L_r(p,q,s) \subseteq L_r(p,q+1,s)$. Поэтому из теорем 4 и 5 вытекает

Следствие 1. Класс $L_2(p,q,1)$, $p \geq 2$, $q \geq 1$, совпадает с классом L_2, если либо $p \geq 3$, либо $q \geq 2$.

Верно следующее утверждение, доказательство которого опускается.

Теорема 6. Для любого фиксированного $r \geq 3$ не существует конечной характеризации для классов $L_r(p,1,1), L_r(2,q,1)$, $p \geq 2$, $q \geq 1$.

Теорема 7. Класс $L_r(2,1,s)$ совпадает с классом $L_{\lfloor r/s \rfloor}(2,1,1)$.

Доказательство. Сначала заметим, что для любого покрытия Q произвольного графа всякая клика этого графа является $(2,1)$- включенным множеством вершин гиперграфа $H(Q)$.

Пусть теперь $G \in L_r(2,1,s)$ и Q – $(2,1,s)$-конформное r-покрытие графа G. Тогда каждая клика графа G (и, в частности, максимальная относительно включения) содержится не менее чем в s кластерах из Q. Не ограничивая общности, можно считать, что кластерами в Q являются лишь максимальные (относительно включения) клики. При этом для всякой максимальной клики C графа существуют кластеры $C_1, C_2, ..., C_s \in Q$ такие, что $C_1 = C_2 = ... = C_s = C$. Следовательно, множество всех максимальных клик графа G является $(2,1,1)$-конформным $\lfloor r/s \rfloor$-покрытием графа. Получили, что $L_r(2,1,s) \subseteq L_{\lfloor r/s \rfloor}(2,1,1)$. Обратное включение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Литература

1. *J.C.Bermond and J.C.Meyer*, Graphs representative arêtes d'un multigraphe // J.Math. Pures Appl. 1973. №52. Pp. 299-308.
2. *L.Lovasz*, Problem 9 // in Beitrage zur Graphentheorie and deren Anwendungen. Vorgetragen auf dem internationalen Kolloquium in Oberhof (DDR), Mathematische Gesellschaft der DDR – Technische Hochschule llimenau. 1977. P. 313.
3. *S.Poljak, V. Rodl, and D.Turzik*, Complexity of representation of graphs by set systems // Discrete Appl. Math. 1981. №3. Pp. 301-312.
4. *V.I.Voloshin*, On the upper chromatic number of a hypergraph // Australas. J. Combin. 1995. №11. Pp. 25-45.
5. *C.Berge*, Graphs and Hypergraphs // North-Holland, Amsterdam. 1973.
6. *Y.M. Metelsky and R.I.Tyshkevich*, Line Graphs of Helly Hypergraphs // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 2003. №16 (3). Pp. 438-448.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

М. А. Заренок

Основной ***целью*** данной работы является решение задачи Дирихле для области ограниченной эксцентрическими окружностями (далее эксцентрическое кольцо) в терминах вейвлет-рядов.

В работе используются ранее полученные результаты для концентрического кольца, описанные в статьях Субботина и Черных [1, 2], где был построен базис гармонических в концентрическом кольце R_ρ функций

$$\left\{ \ln|z|, 1, \alpha_n(z), \widetilde{\alpha}_n(z), \alpha_n(\rho / z), \widetilde{\alpha}_n(\rho / z); n \in Z_+ \right\},$$