УДК 512.547+512.552

В. В. Беняш-Кривец, В. И. Черноусов

Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей

Пусть Γ_g – фундаментальная группа компактной неориентируемой поверхности рода g и K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. В работе получено описание строения многообразий представлений $R(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(K))$, $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ и многообразий характеров $X(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(K))$ группы Γ_g в GL_n и SL_n; а именно, определено число неприводимых компонент, найдены их размерности и исследованы бирациональные свойства этих многообразий, в частности, доказано, что все компоненты $R(\Gamma_g, \mathrm{GL}_n(K))$ являются $\mathbb{Q}$-рациональными многообразиями.

Библиография: 16 названий.

Введение

Пусть $\Gamma = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ – конечно-порожденная группа и $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ – связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем K, которое всюду ниже предполагается алгебраически замкнутым и нулевой характеристики. Очевидно, что для любого гомоморфизма $\rho\colon \Gamma \to G(K)$ набор элементов

$$\bigl(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)\bigr) \in G(K)^m = G(K) \times \dots \times G(K)$$

удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы Γ, и поэтому соответствие $\rho \to (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$ задает биекцию между множеством $\mathrm{Hom}(\Gamma, G(K))$ и K-точками некоторого аффинного K-многообразия $R(\Gamma, G) \subset G^m$, геометрическая структура которого не зависит от выбора системы образующих Γ.

Многообразие $R(\Gamma, G)$ обычно называют многообразием представлений группы Γ в алгебраическую группу G. В случае $G = \mathrm{GL}_n(K)$ мы будем обозначать $R(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ через $R_n(\Gamma)$ и называть многообразием n-мерных представлений Γ.

Группа G действует естественным образом (одновременным сопряжением компонент) на $R(\Gamma, G)$, и ее орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений Γ. В общем случае орбиты относительно этого действия не обязательно замкнуты и, следовательно, многообразие орбит (геометрический фактор) не является алгебраическим многообразием.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № MWQ300) и Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант Ф 94-026).

Второй автор благодарит также за поддержку SFB 343 “Diskrete Strukturen in der Mathematik” и Билефельдский университет за гостеприимство.

Однако, если G – редуктивная группа, то можно рассмотреть категорный фактор $R(\Gamma, G)/G$ (см. [1]), который обозначается через $X(\Gamma, G)$ и называется многообразием характеров. Его точки параметризуют замкнутые G-орбиты; в случае $G = \mathrm{GL}_n(K)$ замкнутость орбиты эквивалентна тому, что соответствующее представление вполне приводимо, и поэтому точки многообразия $X_n(\Gamma) = X(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ находятся в биективном соответствии с классами эквивалентных вполне приводимых n-мерных представлений группы Γ.

Тем самым, многообразия $R(\Gamma, G)$, $X(\Gamma, G)$, являющиеся одними из основных объектов геометрической теории представлений, дают естественную параметризацию представлений Γ в G, и задача описания геометрической структуры $R(\Gamma, G)$, $X(\Gamma, G)$ может рассматриваться как аналог определения представлений и характеров конечной группы.

О многообразиях $R(\Gamma, G)$, $X(\Gamma, G)$ в общем случае известно очень мало. Детально изучен лишь класс конечных групп и частично – классы нильпотентных и разрешимых групп. Напомним, что если $|\Gamma| < \infty$, то описание $R_n(\Gamma)$, $X_n(\Gamma)$ дается классической теорией представлений конечных групп. В этом случае каждое представление является вполне приводимым и с точностью до эквивалентности существует лишь конечное число неприводимых представлений, каждое из которых однозначно определяется своим характером. Для бесконечных нильпотентных групп Γ большая часть известных результатов собрана в книге [2] (см. также [3]).

Для топологических применений важно знать описание многообразий n-мерных представлений тех групп Γ, которые возникают как фундаментальные группы некоторых естественных классов многообразий. В настоящее время ответ известен для фундаментальных групп Δ_g компактных ориентируемых поверхностей рода g. А именно, вначале Голдманом в [4] было найдено число связных компонент $R(\Delta_g, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ в вещественной и комплексной топологии, а затем независимо авторами и Рапинчуком в [5] и Симпсоном в [6] был установлен более общий факт о том, что для всех n и всех $g > 1$ многообразие $R_n(\Delta_g)$ является неприводимым многообразием размерности $(2g-1)n^2 - 1$; в частности, $R(\Delta_g, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ является связным в комплексной топологии. Кроме того, в [5] устанавливается также неприводимость $R(\Delta_g, \mathrm{SL}_n(K))$ и доказывается свойство $\mathbb{Q}$-рациональности для $R_n(\Delta_g)$ и $\mathbb{Q}$-унирациональности для $R(\Delta_g, \mathrm{SL}_n(K))$.

Отметим также, что недавно Серр доказал неприводимость многообразия представлений $R(\Gamma_g, G)$ упомянутой выше группы Γ_g в любую односвязную алгебраическую группу G над полем K характеристики 0.

Цель настоящей работы – дать описание многообразий $R_n(\Gamma_g)$, $X_n(\Gamma_g)$, $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ для фундаментальных групп $\Gamma_g = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \mid \gamma_1^2 \cdots \gamma_g^2 = 1 \rangle$ компактных неориентируемых поверхностей рода g и, тем самым, завершить описание многообразий n-мерных представлений и характеров всех групп поверхностей. Основными результатами статьи являются следующие три теоремы.

Теорема А. *Пусть Γ_g – фундаментальная группа компактной неориентируемой поверхности рода g. Тогда число неприводимых компонент многообразия n-мерных представлений $R_n(\Gamma_g)$ равно*:

а) $n+1$, *если* $g = 1$;
б) $(n^2+4n+4)/4$, *если* $g = 2$ *и* n *четно*;

в) $(n^2+4n+3)/4$, *если* $g=2$ *и* n *нечетно*;
г) 3, *если* $g=3$ *и* $n=2$;
д) 2, *если* $g \geqslant 3$ *и пара* (n,g) *отлична от* $(2,3)$.

Кроме того, для всех n *и* g *все компоненты* $R_n(\Gamma_g)$ *являются* $\mathbb{Q}$-*рациональными многообразиями.*

Теорема B. *В условиях теоремы* A *число неприводимых компонент многообразия* $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ *равно*:

а) $[n/2]+1$, *если* $g=1$;
б) $(n^2+6n+8)/8$, *если* $g=2$ *и* n *четно*;
в) $(n^2+4n+3)/8$, *если* $g=2$ *и* n *нечетно*;
г) 1, *если* $g \geqslant 3$.

Кроме того, для всех n *и* g *все компоненты* $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ *являются* $\mathbb{Q}$-*унирациональными многообразиями.*

Теорема C. *В условиях теоремы* A *число неприводимых компонент многообразия характеров* $X_n(\Gamma_g)$ *совпадает с числом неприводимых компонент многообразия представлений* $R_n(\Gamma_g)$.

В действительности, мы приводим явное описание всех неприводимых компонент многообразий $R_n(\Gamma_g)$, $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$, $X_n(\Gamma_g)$, что позволяет дополнительно вычислить их размерности и найти число связных компонент указанных выше многообразий в комплексной топологии.

Следует отметить также, что методы настоящей работы и статьи [5] позволяют полностью описать многообразия n-мерных представлений для групп Γ с одним соотношением вида

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid r_1(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-4})[\gamma_{n-3}, \gamma_{n-2}][\gamma_{n-1}, \gamma_n] = 1 \rangle,$$

где $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ – коммутатор и r_1 – произвольное слово из коммутанта свободной группы $F(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-4})$, и для групп Γ вида

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} \gamma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \gamma_{i_s}^{\varepsilon_s} = 1 \rangle,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ и сумма модулей показателей при каждой переменной γ_i не превосходит двойки.

Описание неприводимых компонент многообразия $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ не сложно редуцировать к аналогичной задаче для многообразия n-мерных представлений $R_n(\Gamma_g)$. Однако при $g \geqslant 3$ доказательство $\mathbb{Q}$-унирациональности $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ базируется на новой идее, суть которой заключается в следующем. Пусть $a, b \in \mathrm{GL}_n(K)$. Если умножить a справа на элемент из централизатора b, или, симметрично, b на элемент из централизатора a (т.е. выполнить так называемое стандартное преобразование), то коммутатор $[a,b]$ не изменится. Предположим, что заданы $a,b,c,d \in \mathrm{GL}_n(K)$ такие, что $[a,b]=[c,d]$. Тогда естественно спросить, можно ли перейти от пары (a,b) к паре (c,d) при помощи цепочки стандартных преобразований. Мы доказываем, что ответ действительно положителен, если (a,b,c,d) находится в "общем" положении, т.е. для всех (a,b,c,d) из некоторого открытого в топологии Зарисского множества $U \subset \mathrm{GL}_n(K)^4$, и именно этот факт играет решающую роль при доказательстве $\mathbb{Q}$-унирациональности $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$.

Всюду ниже через Γ_g (если не оговорено противное) обозначается фундаментальная группа компактной неориентируемой поверхности рода g.

Говоря о точке "общего" положения алгебраического многообразия X, мы подразумеваем точку некоторого непустого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset X$, которое всегда легко уточнить из рассуждения.

§ 1. Некоторые результаты о регулярных элементах

В качестве первого шага описания многообразий представлений $R_n(\Gamma_g)$ мы установим, что на произвольной неприводимой компоненте V многообразия $R_n(\Gamma_g)$ существуют элементы с регулярными компонентами. Напомним, что элемент x редуктивной алгебраической группы G называется регулярным, если его централизатор $Z_G(x)$ имеет минимально возможную размерность (которая всегда равна рангу G). Хорошо известно, что множество G_{reg} регулярных элементов открыто в G в топологии Зарисского (см. [7]). Легко проверить, что в случае $G = \mathrm{GL}_n(K)$ элемент $X \in G$ регулярен тогда и только тогда, когда в его жордановой нормальной форме каждому собственному значению соответствует единственный блок Жордана. Отметим, что последнее условие эквивалентно следующему: для любого λ из алгебраического замыкания поля определения ранг матрицы $X - \lambda E_n$ не меньше, чем $n-1$ (здесь и в дальнейшем через E_n обозначается единичная матрица); в частности, полупростой элемент $X \in \mathrm{GL}_n(K)$ регулярен тогда и только тогда, когда все его собственные значения имеют кратность один.

Предложение 1.1. *Пусть $g \geqslant 3$, пара (n, g) отлична от $(2,3)$ и V – произвольная неприводимая компонента $R_n(\Gamma_g)$. Тогда множество*

$$V' = \big\{(X_1, \dots, X_g) \in V \mid \\ X_i^2 \text{ – регулярный полупростой элемент для всех } i = 1, \dots, g\big\}$$

непусто.

Докажем вначале, что в V найдутся точки с регулярными компонентами. Для этого нам понадобится

Предложение 1.2. *Для любых $X, Y \in \mathrm{GL}_n(K)$ множество $XZ_{\mathrm{GL}_n(K)}(Y)$ содержит регулярный элемент.*

Замечание. Это утверждение было доказано независимо с одной стороны Рапинчуком и авторами (см. [5]), а с другой – Джоковичем (см. [8]). Для полноты приведем доказательство, принадлежащее авторам, которое значительно короче доказательства Джоковича.

Доказательство. Сопрягая X и Y подходящей матрицей, без ограничения общности можем считать, что Y приведен к жордановой нормальной форме, т.е. $Y = \mathrm{diag}\big(J_{k_1}(\alpha_1), \dots, J_{k_m}(\alpha_m)\big)$, где

$$J_k(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

– блок Жордана порядка k и $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ принадлежат фиксированному алгебраически замкнутому полю K. Легко проверить, что централизатор $J_k(\alpha)$ в полной матричной алгебре $M_k(K)$ состоит из матриц вида

$$X_k(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ 0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $x_1^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_1^{(m)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}$ – алгебраически независимые над K элементы и

$$C(k_1, \dots, k_m) = \operatorname{diag}\bigl(X_{k_1}(x_1^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}), \dots, X_{k_m}(x_1^{(m)}, \dots, x_{k_m}^{(m)})\bigr).$$

Тогда $C = C(k_1, \dots, k_m)$ – невырожденная матрица над полем

$$L = K\bigl(x_1^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_1^{(m)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}\bigr),$$

коммутирующая с Y. Так как множество регулярных элементов открыто в K-топологии Зарисского, то достаточно показать, что матрица XC^{-1} регулярна. Это эквивалентно тому, что для любого $\lambda \in \overline{L}$ выполняется следующее неравенство для рангов матриц:

$$\operatorname{rank}(XC^{-1} - \lambda E_n) = \operatorname{rank}(X - \lambda C) \geqslant n - 1.$$

Оказывается, что последнее неравенство справедливо для произвольного $X \in M_n(K)$ (не обязательно невырожденного).

Лемма 1.1. *Пусть* $X \in M_n(K)$. *Тогда для любого* $\lambda \in \overline{L}$ *имеем* $\operatorname{rank}(X - \lambda C) \geqslant n - 1$.

Доказательство. Положим

$$F_n(k_1, \dots, k_m) = \bigl\{X - \lambda C(k_1, \dots, k_m) \mid X \in M_n(K),\ \lambda \in \overline{L}\bigr\}$$

и индукцией по n покажем, что для любого набора положительных чисел $k_1, \dots, k_m$ ранг любого элемента из $F_n(k_1, \dots, k_m)$ не меньше, чем $n - 1$. Для $n = 2$ это утверждение проверяется прямыми вычислениями. Пусть $n > 2$ и предположим, что существуют $k_1, \dots, k_m$ такие, что $k_1 + \dots + k_m = n$ и ранг матрицы $B = X - \lambda C \in F_n(k_1, \dots, k_m)$ меньше, чем $n - 1$.

Пусть X_1 (соответственно B_1) – матрица, получаемая из X (соответственно B) при помощи вычеркивания последней строки и последнего столбца. Тогда $B_1 = X_1 - \lambda C_1$, где

$$C_1 = \operatorname{diag}\bigl(X_{k_1}(x_1^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}), \dots, X_{k_m - 1}(x_1^{(m)}, \dots, x_{k_m - 1}^{(m)})\bigr).$$

Поскольку $\operatorname{rank} B_1 \leqslant \operatorname{rank} B < n-1$, то $\det B_1 = \det C_1 \det(X_1 C_1^{-1} - \lambda E_{n-1}) = 0$. Следовательно, λ является собственным значением матрицы $X_1 C_1^{-1}$; в частности, λ принадлежит алгебраическому замыканию поля $L_1 = K(x_1^{(1)}, \dots, x_{k_m - 1}^{(m)})$, т.е. λ не зависит от последней переменной $x_{k_m}^{(m)}$. По построению $B_1 \in F_{n-1}(k_1, \dots, k_m - 1)$ (если $k_m = 1$, мы полагаем $F_{n-1}(k_1, \dots, k_{m-1}, 0) = F_{n-1}(k_1, \dots, k_{m-1})$) и по индуктивному предположению $\operatorname{rank} B_1 \geqslant n-2$. Следовательно, $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} B_1 = n-2$. Кроме того, если $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – столбцы матрицы B, то базис векторного подпространства $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle \subset \overline{L}^n$, порожденного над $\overline{L}$ векторами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, может быть выбран среди $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$, т.е. $\mathbf{e}_n$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$.

Рассмотрим проекцию

$$\overline{L}^n \to \overline{L}^{n-1}, \qquad v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \tilde{v} = (v_1, \dots, v_{n-k_m}, v_{n-k_m+2}, \dots, v_n).$$

Утверждается, что

$$\dim \langle \widetilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{e}}_n \rangle = n - 2. \tag{1.1}$$

Действительно, если X_2 (соответственно B_2) – матрица, получаемая из X (соответственно B) вычеркиванием строки и столбца с номером $n - k_m + 1$, то очевидно, что $B_2 = X_2 - \lambda C_1$ с тем же самым C_1, что и выше. Это означает, что $B_2 \in F_{n-1}(k_1, \dots, k_{m-1})$. Рассуждая как и выше, получим, что $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} B_2 = n-2$, что и доказывает (1.1).

Так как $\mathbf{e}_n \in \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$, то $\widetilde{\mathbf{e}}_n$ является линейной комбинацией векторов $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{e}}_{n-1}$. Поэтому можно выбрать базис $\widetilde{\mathbf{e}}_{i_1}, \dots, \widetilde{\mathbf{e}}_{i_{n-2}}$ пространства $\langle \widetilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{e}}_n \rangle$ такой, что все индексы i_j отличны от n. Тогда соответствующие векторы $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_{n-2}}$ также линейно независимы и, следовательно, образуют базис пространства $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Рассмотрим представление

$$\mathbf{e}_n = \beta_1 \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \beta_{n-2} \mathbf{e}_{i_{n-2}}, \qquad \beta_i \in \overline{L}, \tag{1.2}$$

и покажем, что все коэффициенты β_i в (1.2) принадлежат $\overline{L}_1$. Действительно, из (1.2) следует, что

$$\widetilde{\mathbf{e}}_n = \beta_1 \widetilde{\mathbf{e}}_{i_1} + \dots + \beta_{n-2} \widetilde{\mathbf{e}}_{i_{n-2}}.$$

Но координаты векторов $\widetilde{\mathbf{e}}_n, \widetilde{\mathbf{e}}_{i_1}, \dots, \widetilde{\mathbf{e}}_{i_{n-2}}$ принадлежат $\overline{L}_1$, поэтому $\beta_1, \dots, \beta_{n-2} \in \overline{L}_1$. Тогда, рассматривая $(n-k_m+1)$-координату в (1.2), получим, что и $x_{k_m}^{(m)} \in \overline{L}_1$ – противоречие, доказывающее предложение 1.2.

Предложение 1.3. *Для всех $g \geqslant 2$ и любой неприводимой компоненты V многообразия $R_n(\Gamma_g)$ множество*

$$U = \big\{ (X_1, \dots, X_g) \in V \mid X_1, \dots, X_g \ \text{– регулярные элементы} \big\}$$

непусто.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $v = (X_1, \dots, X_g) \in V$, не лежащую на остальных компонентах. Легко проверить, что для любого $i = 1, \dots, g-1$ и для любого $\alpha \in Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(X_i X_{i+1})$ справедливо равенство

$$X_1^2 \cdots X_{i-1}^2 (X_i \alpha)^2 (\alpha^{-1} X_{i+1})^2 X_{i+2}^2 \cdots X_g^2 = 1.$$

Это означает, что неприводимое множество

$$C = \{(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i\alpha, \alpha^{-1} X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_g) \mid \alpha \in Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(X_i X_{i+1})\}$$

лежит в $R_n(\Gamma_g)$. Кроме того, так как v по построению принадлежит только V и лежит в C, то $C \subseteq V$. Тогда, в силу предложения 1.2 получаем, что множество

$$U_i = \{(X_1, \dots, X_g) \in V \mid X_i - \text{регулярный элемент}\}$$

непусто; в частности, $U = \bigcap_{i=1}^g U_i$ также непусто. Предложение 1.3 доказано.

Введем также в рассмотрение множества

$$M_t = \{XAX^{-1} \mid X \in \mathrm{GL}_n(K),\ A = \mathrm{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_t, -a_t, b_{t+1}, \dots, b_{n-2t})\}.$$

Очевидно, что $\dim \overline{M}_t = n^2 - t$ и что имеется цепочка включений

$$\mathrm{GL}_n(K) = \overline{M}_0 \supset \overline{M}_1 \supset \cdots \supset \overline{M}_{[n/2]}.$$

Рассмотрим проекцию

$$\pi_i \colon V \to \mathrm{GL}_n(K), \qquad (X_1, \dots, X_g) \mapsto X_i.$$

Ясно, что для каждого $i \in \{1, \dots, g\}$ найдется число $p_i \in \{0, \dots, [n/2]\}$ такое, что $\overline{\pi_i(V)} \subset \overline{M}_{p_i}$, но $\overline{\pi_i(V)} \not\subset \overline{M}_{p_i+1}$ (если $\overline{\pi_i(V)} \subset \overline{M}_{[n/2]}$, то полагаем $p_i = [n/2]$).

Лемма 1.2. *Справедливо равенство* $p_1 = \cdots = p_g$.

Доказательство. Покажем, что для любого $i < g$ выполняется равенство $p_i = p_{i+1}$. Допустим противное. Пусть для определенности $p_i < p_{i+1}$. Тогда $\overline{\pi_{i+1}(V)} \subset \overline{M}_{p_{i+1}} \subset \overline{M}_{p_i}$ и по построению на компоненте V найдется точка $(X_1, \dots, X_g)$, принадлежащая только V, такая, что $X_i \in \overline{M}_{p_i}$, $X_i \notin \overline{M}_{p_{i+1}}$. Воспользуемся преобразованиями, введенными в доказательстве предложения 1.3. А именно, мы уже знаем, что для любого $\alpha \in Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(X_i X_{i+1})$ точка

$$(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i\alpha, \alpha^{-1} X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_g) \in V.$$

В частности, при $\alpha = X_i X_{i+1}$ имеем

$$(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i^2 X_{i+1}, X_{i+1}^{-1} X_i^{-1} X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_g) \in V. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что $X_{i+1}^{-1} X_i^{-1} X_{i+1} \in \overline{M}_{p_{i+1}}$, следовательно, $X_i^{-1} \in \overline{M}_{p_{i+1}}$. Для получения противоречия остается заметить, что каждое $\overline{M}_i$ обладает свойством: если $Y \in \overline{M}_i$, то и $Y^{-1} \in \overline{M}_i$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения 1.1. Положим $p = p_1 = \dots = p_g$. Тогда утверждение предложения 1.1 эквивалентно тому, что $p = 0$. Предполагая $p \neq 0$, мы оценим $\dim V$ сверху и снизу и покажем, что при наших предположениях эти оценки противоречивы.

Пусть

$$\pi\colon V \to \mathrm{GL}_n(K)^{g-1}, \qquad (X_1, \dots, X_g) \mapsto (X_2, \dots, X_g).$$

Ясно, что $\mathrm{Im}\,\pi \subseteq \overline{M}_p^{g-1}$, поэтому

$$\dim \overline{\mathrm{Im}\,\pi} \leqslant \dim \overline{M}_p^{g-1} = (g-1)n^2 - (g-1)p.$$

Далее нам надо оценить размерности слоев морфизма π. С этой целью для матрицы $X \in \mathrm{GL}_n(K)$ положим

$$G(X) = \bigl\{ Y \in \mathrm{GL}_n(K) \mid Y^2 = X^2 \bigr\}.$$

Лемма 1.3. *Пусть $X \in \mathrm{GL}_n(K)$ – регулярный элемент и пусть X подобна матрице $\widetilde{X} = \mathrm{diag}(X_1, \dots, X_k)$, где $X_i = \mathrm{diag}(J_{s_i}(a_i), -J_{t_i}(a_i))$, $s_i \geqslant t_i \geqslant 0$, $a_i \in K^*$. Тогда $\dim G(X) = \dim G(\widetilde{X}) = 2\sum_{i=1}^k t_i$.*

Доказательство. Если $X = F\widetilde{X}F^{-1}$, то $G(X) = FG(\widetilde{X})F^{-1}$, поэтому размерности $G(X)$ и $G(\widetilde{X})$ совпадают. Кроме того, ниже при доказательстве предложения 2.1 будет показано, что если $Y^2 = \widetilde{X}^2$, то $Y = \mathrm{diag}(Y_1, \dots, Y_k)$, где

$$Y_i = Z_i \,\mathrm{diag}\bigl(\varepsilon_i J_{s_i}(a_i), \delta_i J_{t_i}(a_i)\bigr) Z_i^{-1}, \quad Z_i \in Z_{\mathrm{GL}_{s_i+t_i}(K)}(X_i^2), \ \varepsilon_i = \pm 1, \ \delta_i = \pm 1.$$

Отсюда непосредственно следует, что $G(\widetilde{X})$ бирегулярно изоморфно произведению $\prod_{i=1}^k G(X_i)$ и, следовательно, $\dim G(\widetilde{X}) = \sum_{i=1}^k \dim G(X_i)$. Несложно также убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned}\dim G(X_i) &= \dim Z_{\mathrm{GL}_{s_i+t_i}(K)}(X_i^2) - \dim Z_{\mathrm{GL}_{s_i+t_i}(K)}(X_i) \\ &= (s_i + 3t_i) - (s_i + t_i) = 2t_i,\end{aligned}$$

откуда в итоге получаем, что $\dim G(\widetilde{X}) = 2\sum_{i=1}^k t_i$. Лемма доказана.

Далее нам понадобится несложная

Лемма 1.4. *Пусть $s \geqslant [n/2]$ и $A = \mathrm{diag}(J_s(a), -J_{n-s}(a))$. Тогда $A \in \overline{M}_{n-s}$.*

Доказательство следует из того, что A лежит в замыкании множества полупростых матриц вида $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2)$, где

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_s \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & -1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-s} \end{pmatrix}$$

и $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, которое в свою очередь содержится в M_{n-s}.

Лемма 1.5. *Для произвольной точки "общего" положения $v \in V$ имеем* $\dim \pi^{-1}(\pi(v)) \leqslant 2p$.

Доказательство. Достаточно найти хотя бы одну точку $\tilde{v} \in V$, для которой справедливо неравенство $\dim \pi^{-1}(\pi(\tilde{v})) \leqslant 2p$. Так как $\pi_1(V) \subseteq \overline{M}_p$, но $\pi_1(V) \not\subseteq \overline{M}_{p+1}$, то $\pi_1(V) \cap (\overline{M}_p \setminus \overline{M}_{p+1}) \neq \varnothing$. Тогда из предложения 1.3 вытекает, что найдется точка $\tilde{v} = (A_1, \ldots, A_g)$ с регулярными компонентами A_i такая, что $\pi_1(\tilde{v}) \in \overline{M}_p \setminus \overline{M}_{p+1}$.

Покажем, что $\tilde{v}$ – искомая точка. Ясно, что

$$\pi^{-1}\big(\pi(\tilde{v})\big) = \big\{(Y, A_2, \ldots, A_p) \mid Y^2 = A_1^2\big\},$$

следовательно, слой $\pi^{-1}(\pi(\tilde{v}))$ бирегулярно изоморфен многообразию $G(A_1)$. Пусть A_1 подобна матрице

$$\operatorname{diag}\big(J_{s_1}(a_1), -J_{t_1}(a_1), \ldots, J_{s_k}(a_k), -J_{t_k}(a_k)\big)$$

для некоторых $s_i \geqslant t_i \geqslant 0, a_1, \ldots, a_k \in K^*$. Согласно лемме 1.4 $A_1 \in \overline{M}_{\sum_{i=1}^k t_i}$, а по построению $A_1 \notin \overline{M}_{p+1}$. Поэтому $\sum_{i=1}^k t_i \leqslant p$, откуда, с учетом леммы 1.3 имеем $\dim \pi^{-1}(\pi(\tilde{v})) \leqslant 2p$. Лемма доказана.

Подытоживая вышеизложенное, получаем

$$\dim V \leqslant (g-1)n^2 - (g-1)n + 2p = (g-1)n^2 - (g-3)p. \tag{1.4}$$

Чтобы оценить $\dim V$ снизу, вспомним, что $R_n(\Gamma_g)$ выделяется одним матричным уравнением, и тем самым

$$\dim V \geqslant gn^2 - n^2 = (g-1)n^2. \tag{1.5}$$

Сравнение (1.4) и (1.5) показывает, что эти два неравенства не противоречат друг другу лишь в случае $g = 3$; при этом необходимо, чтобы $\dim V = (g-1)n^2$, откуда $\overline{\operatorname{Im} \pi_i} = \overline{M}_p$ для всех $i \in \{1, \ldots, g\}$ и $\overline{\operatorname{Im} \pi} = \overline{M}_p^{g-1} = \overline{M}_p^2$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\pi} & \overline{\operatorname{Im} \pi} = \overline{M}_p^2 \\
{\scriptstyle \pi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\
\overline{M}_p & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathrm{GL}_n(K),
\end{array}$$

где $\varphi_1(X) = X^{-2}$, $\varphi_2(Y, Z) = Y^2 Z^2$, и положим $T = \overline{\varphi_1(\overline{M}_p)}$. Поскольку π_1, π – доминантные морфизмы, то из коммутативности диаграммы следует, что $\overline{\varphi_2(\overline{M}_p^2)} = T$.

Заметим теперь, что в случае $p \neq 0$ образ $\operatorname{Im} \varphi_1$ состоит из нерегулярных матриц, откуда T также состоит из нерегулярных матриц. Поэтому для получения противоречия остается показать, что в образе $\operatorname{Im}\varphi_2$ всегда есть регулярные элементы. Действительно, если $p=1$, то при

$$Y = \operatorname{diag}(a_1, -a_1, b_1, \dots, b_{n-2}) \in \overline{M}_1,$$
$$Z = \operatorname{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, -\tilde{a}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_{n-2}) \in \overline{M}_1$$

произведение Y^2Z^2 – регулярный полупростой элемент при достаточно общем выборе a_i, $\tilde{a}_i$, b_j, $\tilde{b}_j$.

Аналогично, при $p \geqslant 2$ в качестве Y, Z можно выбрать

$$Y = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_p, -a_1, \dots, -a_p, b_1, \dots, b_{n-2p}),$$
$$Z = \operatorname{diag}(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_p, -\tilde{a}_2, \dots, -\tilde{a}_p, -\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-2}).$$

Предложение 1.1 доказано.

В заключение приведем следующую простую лемму.

Лемма 1.6. *Пусть Γ – конечно порожденная группа, V – произвольная неприводимая компонента $R_n(\Gamma_g)$ и $\rho \in V$. Тогда любое представление ρ', эквивалентное ρ, также принадлежит V.*

Доказательство вытекает из того факта, что образ морфизма

$$\varphi\colon V \times \mathrm{GL}_n(K) \to R_n(\Gamma_g), \qquad (\rho, X) \mapsto X\rho X^{-1},$$

неприводим, содержит V и, следовательно, с ним совпадает.

§ 2. Случай проективной плоскости и бутылки Клейна

Наиболее просто разбирается случай поверхностей рода $g=1$. Действительно, Γ_1 – циклическая группа второго порядка, и поэтому

$$R_n(\Gamma_1) = \bigl\{X \in \mathrm{GL}_n(K) \mid X^2 = E_n\bigr\}.$$

Другими словами, $R_n(\Gamma_1)$ состоит из полупростых элементов с собственными значениями ± 1.

Для любого целого s, $0 \leqslant s \leqslant n$, пусть $A_s = \operatorname{diag}(E_s, -E_{n-s})$ и положим

$$F_s = \bigl\{XA_sX^{-1} \mid X \in \mathrm{GL}_n(K)\bigr\}.$$

Хорошо известно, что классы сопряженных полупростых элементов замкнуты в топологии Зарисского (см., например, [7] или [9]); следовательно, F_s – замкнутое неприводимое многообразие.

Теорема 2.1. *Многообразия F_s $(0 \leqslant s \leqslant n)$ являются различными неприводимыми компонентами $R_n(\Gamma_1)$; при этом каждое F_s – $\mathbb{Q}$-рациональное многообразие размерности $2s(n-s)$.*

Доказательство. Очевидно, что многообразия F_s попарно не пересекаются, неприводимы и

$$\dim F_s = \dim \mathrm{GL}_n(K) - \dim Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(A_s) = n^2 - (s^2 + (n-s)^2) = 2s(n-s).$$

Так как $R_n(\Gamma_1) = \bigcup_{s=0}^{n} F_s$, то $F_0, F_1, \ldots, F_n$ – различные неприводимые компоненты и остается установить их $\mathbb{Q}$-рациональность. С этой целью рассмотрим $\mathbb{Q}$-рациональное подмногообразие $W_s \subset \mathrm{GL}_n(K)$, состоящее из матриц вида $X = \begin{pmatrix} E_s & X_1 \\ X_2 & E_{n-s} \end{pmatrix}$, где X_1, X_2 – произвольные матрицы соответственно размеров $s \times (n-s)$ и $(n-s) \times s$, и $\mathbb{Q}$-определенный морфизм

$$\alpha_s \colon W_s \to F_s, \qquad X \mapsto X A_s X^{-1}.$$

Покажем, что α_s – бирациональный изоморфизм. Проверим вначале инъективность. Если $\alpha_s(X) = \alpha_s(\widetilde{X})$, то $X A_s X^{-1} = \widetilde{X} A_s \widetilde{X}^{-1}$ или, что равносильно, $X^{-1}\widetilde{X} \in Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(A_s)$. Поэтому найдутся $B_1 \in \mathrm{GL}_s(K)$, $B_2 \in \mathrm{GL}_{n-s}(K)$ такие, что $\widetilde{X} = X \operatorname{diag}(B_1, B_2)$. Сравнивая в последнем равенстве верхние левые и нижние правые углы размеров соответственно s и $n-s$, заключаем, что $B_1 = E_s$, $B_2 = E_{n-s}$, т.е. $X = \widetilde{X}$. Таким образом, с учетом совпадения размерностей W_s и F_s, имеем: α_s – инъективный доминантный сепарабельный морфизм; это и означает, что α_s – бирациональный изоморфизм. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. *Если $K = \mathbb{C}$, то в комплексной топологии $R_n(\Gamma_1)_{\mathbb{C}}$ имеет $n+1$ связную компоненту.*

Утверждение следствия вытекает из того, что неприводимые (а значит и связные) многообразия $F_0, \ldots, F_n$ попарно не пересекаются.

Перейдем к рассмотрению более трудного случая поверхностей рода $g = 2$. Группа Γ_2 может быть задана в виде $\Gamma_2 = \langle g_1, g_2 \mid g_1^2 = g_2^2 \rangle$, и поэтому $R_n(\Gamma_2)$ отождествляется с множеством

$$R_n(\Gamma_2) = \bigl\{ (X, Y) \in \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K) \mid X^2 = Y^2 \bigr\}.$$

Для описания компонент $R_n(\Gamma_2)$ нам понадобятся следующие обозначения. Для любых целых чисел $s, t \in \mathbb{Z}$ таких, что $0 \leqslant s \leqslant n/2, 0 \leqslant t \leqslant n-2s$, обозначим через $\varphi_{s,t}$ $\mathbb{Q}$-определенный рациональный морфизм

$$\varphi_{s,t} \colon \mathbb{A}^s \times \mathbb{A}^{n-2s} \times \mathrm{GL}_2(K)^s \times \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K),$$

переводящий элемент

$$\alpha = (a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_{n-2s}, Z_1, \ldots, Z_s, A),$$

где $a_i, b_j \in K^*$, $Z_i \in \mathrm{GL}_2(K)$, $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, в точку (X, Y), где

$$\begin{aligned} X &= A \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \ldots, a_s, -a_s, b_1, \ldots, b_{n-2s}) A^{-1}, \\ Y &= A \operatorname{diag}(Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \ldots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad -b_1, \ldots, -b_t, b_{t+1}, \ldots, b_{n-2s}) A^{-1}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что для указанных выше матриц X, Y выполняется соотношение $X^2 = Y^2$ и, следовательно, $\operatorname{Im} \varphi_{s,t} \subset R_n(\Gamma_2)$. Обозначим через $V_{s,t}$ замыкание $\operatorname{Im} \varphi_{s,t}$ в топологии Зарисского. Следующие две теоремы дают описание $R_n(\Gamma_2)$.

Теорема 2.2. *Многообразия $V_{s,t}$ являются различными неприводимыми компонентами $R_n(\Gamma_2)$.*

Теорема 2.3. *$V_{s,t}$ – $\mathbb{Q}$-рациональное многообразие размерности n^2+s.*

Следствие 2.2. *Число неприводимых компонент многообразия $R_n(\Gamma_2)$ равно $(n^2+4n+4)/4$, если n четно, и $(n^2+4n+3)/4$, если n нечетно.*

Приведем еще одно непосредственное следствие явного описания неприводимых компонент.

Следствие 2.3. *Множество $\pi_0(R_n(\Gamma_2)_{\mathbb{C}})$ состоит из двух элементов; более точно, связными компонентами многообразия $R_n(\Gamma_2)_{\mathbb{C}}$ являются множества $W_1 = \bigcup_{t \text{ четно}} V_{s,t}$ и $W_2 = \bigcup_{t \text{ нечетно}} V_{s,t}$.*

Основная часть доказательства теоремы 2.2 сосредоточена в следующем утверждении.

Предложение 2.1. *Пусть V – произвольная неприводимая компонента многообразия $R_n(\Gamma_2)$. Тогда V содержит непустое открытое подмножество U, состоящее из точек (X,Y) с регулярными полупростыми X, Y.*

Доказательство. Так как множество регулярных полупростых элементов открыто в $\mathrm{GL}_n(K)$, то достаточно найти хотя бы одну точку $(X,Y)\in V$ с регулярными полупростыми X, Y. Из предложения 1.3 следует, что найдется точка $(X_0,Y_0)\in V$, не лежащая ни в какой другой неприводимой компоненте многообразия $R_n(\Gamma_2)$, с регулярными X_0, Y_0. Так как все компоненты $R_n(\Gamma_2)$ устойчивы относительно сопряжения (лемма 1.6), дополнительно можем считать, что

$$X_0 = \mathrm{diag}\,(X_1,\ldots,X_k), \tag{2.1}$$

где $X_i = \mathrm{diag}(J_{r_i}(a_i), -J_{s_i}(a_i))$, $a_i^2 \neq a_j^2$ при $i\neq j$ и $r_i \geqslant s_i \geqslant 0$ для всех $i\in\{1,\ldots,k\}$.

Рассмотрим вначале случай $k=1$, т.е. когда $X_0 = \mathrm{diag}(J_r(a), -J_s(a))$, $r\geqslant s\geqslant 0$. Очевидно, что $J_r(a)^2$ и $J_r(a^2)$ подобны, и поэтому при возведении произвольной матрицы X в квадрат структура ее жордановой нормальной формы (т.е. число блоков Жордана и их размеры) не изменяется. Отсюда с учетом равенства $X_0^2 = Y_0^2$ получаем, что Y_0 сопряжена с матрицей $\widetilde{Y}_0 = \mathrm{diag}(\varepsilon J_r(a), \delta J_s(a))$, где $\varepsilon=\pm1$, $\delta=\pm1$, причем $\delta=-\varepsilon$, ибо Y_0 (а значит, и $\widetilde{Y}_0$) – регулярная матрица. Итак, Y_0 сопряжена с матрицей $\widetilde{Y}_0 = \Omega X_0$, где через Ω обозначена диагональная матрица $\Omega = \mathrm{diag}(\varepsilon E_r, -\varepsilon E_s)$.

Чтобы завершить доказательство в случае $k=1$, достаточно построить неприводимое многообразие F и морфизм $\psi\colon F\to R_n(\Gamma_2)$, образ которого с одной стороны содержит (X_0,Y_0) (и значит, полностью лежит в V), а с другой – точки (X,Y) с регулярными полупростыми X, Y.

Пусть $T_1 = \{\mathrm{diag}(A,B)\}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & 1 & \ldots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_r\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -a_2 & -1 & \ldots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_s\end{pmatrix}$$

и $a_i \in K^*$, $a_i^2 \neq a_j^2$ при $i \neq j$, и

$$T_2 = \bigl\{X \operatorname{diag}(A, B) X^{-1} \mid X \in \mathrm{GL}_n(K),\ \operatorname{diag}(A, B) \in T_1\bigr\}.$$

Ясно, что T_2 – неприводимое множество, состоящее из полупростых элементов, и что X_0 лежит в его замыкании. Несложно убедиться также, что для $X \in T_2$

$$\dim Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(X^2) = \dim Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(X_0^2) = n + 2s.$$

Поэтому множество

$$T_3 = \bigl\{X \in \overline{T}_2 \mid \dim Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(X^2) = n + 2s\bigr\}$$

содержит X_0, открыто в $\overline{T}_2$ и тем самым неприводимо. Окончательно положим

$$\begin{aligned} &F = \bigl\{(X, Z) \in T_3 \times \mathrm{GL}_n(K) \mid X^2 Z = Z X^2\bigr\}, \\ &\varphi \colon F \to R_n(\Gamma_2), \qquad (X, Z) \mapsto (X, Z\Omega X Z^{-1}). \end{aligned}$$

По построению многообразие F задается системой уравнений, линейных относительно коэффициентов $z_{i,j}$ матрицы Z, причем ее ранг является константой на T_3. Нам понадобится теперь следующая несложная лемма (см. также [5]).

Лемма 2.1. *Пусть U – неприводимое K-определенное алгебраическое многообразие. Для заданного $n > 0$ рассмотрим подмногообразие $X \subset U \times \mathbb{A}^n$, определенное системой линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(u) t_j = g_i(u), \qquad i = 1, \dots, m,$$

где $f_{i,j}(u)$, $g_i(u) \in K[U]$ – регулярные функции и $t_1, \dots, t_n$ – координаты в $\mathbb{A}^n$. Пусть

$$F(u) = \begin{pmatrix} f_{11}(u) & \dots & f_{1n}(u) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ f_{m1}(u) & \dots & f_{mn}(u) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{F}(u) = \begin{pmatrix} f_{11}(u) & \dots & f_{1n}(u) & g_1(u) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ f_{m1}(u) & \dots & f_{mn}(u) & g_m(u) \end{pmatrix},$$

и предположим, что для любой точки $u \in U$ $\operatorname{rank} F(u) = \operatorname{rank} \widetilde{F}(u) = r$ для некоторой константы r, не зависящей от $u \in U$. Тогда X неприводимо и поле K-рациональных функций $K(X)$ изоморфно $K(U)(s_1, \dots, s_{n-r})$, где $s_1, \dots, s_{n-r}$ – алгебраически независимые над $K(U)$ переменные.

Доказательство. Пусть $m_1(u),\dots,m_l(u)$ – все миноры порядка r матрицы $F(u)$, тождественно не равные 0 на U, и положим

$$U_i=\{u\in U\mid m_i(u)\neq 0\},\qquad X_i=\{(u,a)\in X\mid u\in U_i\}.$$

Из правила Крамера для линейных систем и из наших предположений следует, что $X_i\simeq U_i\times\mathbb{A}^{n-r}$ для всех i; в частности, X_i – неприводимое многообразие размерности $d=\dim U+n-r$. Так как U неприводимо, то для любых $i\neq j$ пересечение $X_i\cap X_j$ непусто и, следовательно, плотно как в X_i, так и в X_j. Поскольку $X=\bigcup_{i=1}^{l}X_i$, то $\dim X=d$.

Зафиксируем произвольное число i и пусть X' – неприводимая компонента X, содержащая X_i. Если предположить, что X приводимо, то для некоторого j мы должны иметь $X_j\not\subset X'$. Пусть X'' – компонента многообразия X, содержащая X_j. Из равенства $\dim X'=\dim X_i=d$ вытекает, что X_i плотно в X', и аналогично, X_j плотно в X'', так что $X_i\cap X_j$ плотно в обеих компонентах X' и X''. Тем самым $X'=X''$. Полученное противоречие доказывает неприводимость X.

Наконец, в силу плотности X_i в X имеем

$$K(X)=K(X_i)\simeq K(U_i\times\mathbb{A}^{n-r})=K(U_i)(s_1,\dots,s_{n-r})=K(U)(s_1,\dots,s_{n-r}),$$

что и требовалось. Лемма 2.1 доказана.

Согласно лемме 2.1 многообразие F, построенное выше, неприводимо, и очевидно, что образ $\varphi(F)$ содержит элементы (X,Y) с регулярными полупростыми X,Y. Покажем, что $(X_0,Y_0)\in\varphi(F)$, т.е. проверим, что Y_0 имеет вид $Y_0=Z\Omega X_0Z^{-1}$ для некоторого элемента Z, перестановочного с X_0^2. Выше было установлено, что Y_0 сопряжен с $\widetilde{Y}_0=\Omega X_0$. Пусть $Y_0=Z\Omega X_0Z^{-1}$. Тогда из равенства $Y_0^2=X_0^2$ и из перестановочности Ω и X_0 следует, что $X_0^2=Y_0^2=ZX_0^2\Omega^2Z^{-1}=ZX_0^2Z^{-1}$, т.е. $X_0^2Z=ZX_0^2$.

Рассмотрим теперь случай произвольного k. Утверждается, что жорданова нормальная форма матрицы Y_0 также имеет вид, аналогичный (2.1). Действительно, так как $X_0^2=Y_0^2$, то в разложение Жордана матрицы Y_0 входят блоки $J_{r_1}(\varepsilon_1a_1),J_{s_1}(\delta_1a_1),\dots,J_{r_k}(\varepsilon_ka_k),J_{s_k}(\delta_ka_k)$, где для всех i имеем $\varepsilon_i=\pm1$, $\delta_i=\pm1$, причем обязательно $\delta_i=-\varepsilon_i$, ибо Y_0 – регулярная матрица. Положим

$$\widetilde{Y}_i=\operatorname{diag}(\varepsilon_iJ_{r_i}(a_i),-\varepsilon_iJ_{s_i}(a_i))=\varepsilon_iX_i,\qquad \widetilde{Y}_0=\operatorname{diag}(\widetilde{Y}_1,\dots,\widetilde{Y}_l).$$

Тогда $Y_0=Z\widetilde{Y}_0Z^{-1}$ и, как и выше, проверяется, что $ZX_0^2=X_0^2Z$. Так как дополнительно $a_i^2\neq a_j^2$ для всех $i\neq j$, то Z – блочно-диагональная матрица вида $Z=\operatorname{diag}(Z_1,\dots,Z_k)$, где $Z_i\in Z_{\mathrm{GL}_{r_i+s_i}(K)}(X_i^2)$ и, следовательно, $Y_0=\operatorname{diag}(Y_1,\dots,Y_k)$, где $Y_i=Z_i\widetilde{Y}_iZ_i^{-1}$.

Рассмотрим произвольную неприводимую компоненту $V_i\subset R_{r_i+s_i}(\Gamma_2)$, содержащую (X_i,Y_i), и пусть $W=V_1\times\dots\times V_k$. По построению многообразие W неприводимо, содержит (X_0,Y_0) и, значит, полностью лежит в V. С другой стороны, очевидное индуктивное рассуждение показывает, что W содержит элементы (X,Y) с регулярными полупростыми X,Y, что и доказывает предложение 2.1.

Дальнейшее доказательство теоремы 2.2 разобьем на ряд шагов.

Лемма 2.2. $R_n(\Gamma_2) = \bigcup_{s,t} V_{s,t}$.

Доказательство. Пусть V – произвольная неприводимая компонента многообразия $R_n(\Gamma_2)$ и $U \subset V$ – открытое подмножество из предложения 2.1. Поскольку множество V, а значит, и U устойчивы относительно сопряжения, то любое представление $\rho = (X, Y) \in U$ эквивалентно представлению $\rho' = (X', Y')$, где

$$X' = \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s})$$

– диагональная регулярная матрица. Тогда, как было установлено выше, вторая компонента имеет следующий вид:

$$Y' = \operatorname{diag}\bigl(Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \dots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, \varepsilon_1 b_1, \dots, \varepsilon_{n-2s} b_{n-2s}\bigr),$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $Z_i \in \mathrm{GL}_2(K)$. Переходя при необходимости еще раз к эквивалентному представлению, без ограничения общности можем считать, что $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_t = -1$, $\varepsilon_{t+1} = \dots = \varepsilon_{n-2s} = 1$. Поэтому $\rho' \in \operatorname{Im} \varphi_{s,t}$, откуда $U \subset \bigcup_{s,t} \operatorname{Im} \varphi_{s,t}$ и, следовательно, $V = \overline{U} \subset \bigcup_{s,t} \overline{\operatorname{Im} \varphi_{s,t}} = \bigcup_{s,t} V_{s,t}$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. $\dim V_{s,t} = n^2 + s$.

Доказательство. Рассмотрим проекцию на первую компоненту

$$\pi \colon R_n(\Gamma_2) \to \mathrm{GL}_n(K), \qquad (X, Y) \mapsto X.$$

Очевидно, что $\dim \overline{\pi(V_{s,t})} = n^2 - s$ и тем самым достаточно установить, что $\dim(\pi^{-1}(X) \cap V_{s,t}) = 2s$ для всех точек X из плотного в $\overline{\pi(V_{s,t})}$ подмножества

$$U' = \bigl\{A \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}) A^{-1} \mid \\ a_i^2 \neq a_j^2 \text{ при } i \neq j,\ b_k \neq b_l \text{ при } k \neq l,\ a_i^2 \neq b_k^2 \text{ для всех } i, k\bigr\}.$$

Обозначим $X_0 = \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s})$, $X = A X_0 A^{-1}$ и $T = \{Y \in \mathrm{GL}_n(K) \mid Y^2 = X^2\}$. Очевидно, что $T \simeq \pi^{-1}(X)$, и так как X – регулярная полупростая матрица, то любой $Y \in T$ имеет вид

$$Y = A \operatorname{diag}\bigl(Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \dots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, \\ \varepsilon_1 b_1, \dots, \varepsilon_{n-2s} b_{n-2s}\bigr) A^{-1}, \qquad (2.2)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ для всех $i \in \{1, \dots, n-2s\}$ и $Z_1, \dots, Z_s \in \mathrm{GL}_2(K)$.

Пусть $T_\varepsilon \subset T$ – неприводимое подмногообразие, состоящее из всех Y, у которых в разложении (2.2) набор знаков $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2s})$ фиксирован. По построению $T = \bigcup_\varepsilon T_\varepsilon$ и $\pi^{-1}(X) = \bigcup_\varepsilon \{(X, Y) \mid Y \in T_\varepsilon\}$. Положим $W_i = \{Z_i \operatorname{diag}(a_i, -a_i) Z_i^{-1} \mid Z_i \in \mathrm{GL}_2(K)\}$. Ясно, что $\dim W_i = 2$ и $T_\varepsilon \simeq W_1 \times \dots \times W_s$. Поэтому $\dim T_\varepsilon = 2s$ для всех наборов ε. Отсюда следует, что T также имеет размерность $2s$, и остается заметить, что $\pi^{-1}(X) \cap V_{s,t}$ состоит из объединения тех множеств (X, T_ε), у которых набор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2s})$ обладает следующим свойством: среди $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2s}$ число (-1) встречается t раз. Лемма 2.3 доказана.

Завершает доказательство теоремы 2.2

Лемма 2.4. *Если пары (s,t) и (s_1,t_1) различны, то многообразия $V_{s,t}$ и V_{s_1,t_1} не содержатся друг в друге.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая. Пусть вначале $s = s_1$. Тогда по лемме 2.3 имеем $\dim V_{s,t} = \dim V_{s_1,t_1}$, и поэтому, если бы одно из многообразий лежало в другом, то имели бы равенство $V_{s,t} = V_{s_1,t_1}$. Пусть

$$U = \{(a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_{n-2s}) \mid a_i^2 \neq a_j^2,\ b_k \neq b_l,\ a_i^2 \neq b_k^2\}.$$

Так как множества $\varphi_{s,t}(U \times \mathrm{GL}_2(K)^s \times \mathrm{GL}_n(K))$ и $\varphi_{s_1,t_1}(U \times \mathrm{GL}_2(K)^s \times \mathrm{GL}_n(K))$ плотны в $V_{s,t} = V_{s_1,t_1}$, то они пересекаются по непустому множеству. С другой стороны, если

$$(X,Y) \in \varphi_{s,t}(U \times \mathrm{GL}_2(K)^s \times \mathrm{GL}_n(K)) \cap \varphi_{s_1,t_1}(U \times \mathrm{GL}_2(K)^s \times \mathrm{GL}_n(K)),$$

то у матриц X, Y должно быть в точности $s+t = s_1+t_1$ общих собственных значений. Последнее невозможно, ибо $s = s_1$ и $t \neq t_1$.

Пусть теперь $s \neq s_1$. Для определенности предположим, что $s > s_1$. Тогда $\dim V_{s,t} = n^2 + s > \dim V_{s_1,t_1} = n^2 + s_1$. Если бы $V_{s_1,t_1} \subset V_{s,t}$, то при проекции на первую компоненту мы также имели бы включение $\pi(V_{s_1,t_1}) \subset \pi(V_{s,t})$. Но это невозможно, ибо $\dim \overline{\pi(V_{s_1,t_1})} = n^2 - s_1$, $\dim \overline{\pi(V_{s,t})} = n^2 - s$ и по предположению $s_1 < s$. Лемма 2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы вначале реализовать поле $\mathbb{Q}$-рациональных функций $\mathbb{Q}(V_{s,t})$ в виде поля инвариантов $\mathbb{Q}(u_1,\dots,u_{n^2+s})^G$ конечной группы G, действующей на чисто трансцендентном расширении $\mathbb{Q}(u_1,\dots,u_{n^2+s})$ поля $\mathbb{Q}$, а затем прямыми вычислениями убедиться в рациональности поля $\mathbb{Q}(u_1,\dots,u_{n^2+s})^G$.

Рассмотрим (n^2+s)-мерное подмногообразие $W \subset \mathbb{A}^s \times \mathbb{A}^{n-2s} \times \mathrm{GL}_2(K)^s \times \mathrm{GL}_n(K)$, состоящее из таких элементов

$$w = (a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_{n-2s},Z_1,\dots,Z_s,A), \tag{2.3}$$

что

$$a_i, b_i \in K^*, \qquad Z_i = \begin{pmatrix} u_i & 1 \\ 1 & v_i \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$
$$\det Z_i \neq 0, \qquad \det A \neq 0.$$

Лемма 2.5. *Ограничение $\varphi_{s,t}\big|_W \colon W \to V_{s,t}$ – конечнолистный доминантный морфизм.*

Доказательство. Размерности W и $V_{s,t}$ совпадают и поэтому достаточно установить, что для точки "общего" положения (2.3) слой $\varphi_{s,t}^{-1}(\varphi_{s,t}(w))$ конечен. Предположим, что найдется еще одна точка $\widetilde{w} \in W$, для которой $\varphi_{s,t}(w) = \varphi_{s,t}(\widetilde{w})$ и пусть $\widetilde{w} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}n - 2s, \widetilde{Z}_1, \dots, \widetilde{Z}_s, \widetilde{A})$, где

$$\widetilde{Z}_i = \begin{pmatrix} \widetilde{u}_i & 1 \\ 1 & \tilde{v}_i \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие два равенства:

$$\begin{aligned} &A \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s})A^{-1} \\ &\quad = \widetilde{A} \operatorname{diag}(\widetilde{a}_1, -\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_s, -\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_{n-2s})\widetilde{A}^{-1}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &A \operatorname{diag}\big(Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1)Z_1^{-1}, \dots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s)Z_s^{-1}, \\ &\qquad\qquad\qquad - b_1, \dots, -b_t, b_{t+1}, \dots, b_{n-2s}\big)A^{-1} \\ &\quad = \widetilde{A} \operatorname{diag}\big(\widetilde{Z}_1 \operatorname{diag}(\widetilde{a}_1, -\widetilde{a}_1)\widetilde{Z}_1^{-1}, \dots, \widetilde{Z}_s \operatorname{diag}(\widetilde{a}_s, -\widetilde{a}_s)\widetilde{Z}_s^{-1}, \\ &\qquad\qquad\qquad - \widetilde{b}_1, \dots, -\widetilde{b}_t, \widetilde{b}_{t+1}, \dots, \widetilde{b}_{n-2s}\big)\widetilde{A}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует, что две диагональные матрицы

$$\operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}), \tag{2.6}$$

$$\operatorname{diag}(\widetilde{a}_1, -\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_s, -\widetilde{a}_s, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_{n-2s}) \tag{2.7}$$

сопряжены при помощи $A^{-1}\widetilde{A}$, так что их собственные значения совпадают. Поскольку w – точка "общего" положения, без ограничения общности можем дополнительно считать, что собственные значения матрицы (2.6) различны и, кроме того, $a_i^2 \neq a_j^2$, $a_i^2 \neq b_j^2$, $b_i^2 \neq b_j^2$. Тогда

$$\{\pm a_1, \dots, \pm a_s\} = \{\pm \tilde{a}_1, \dots, \pm \tilde{a}_s\}, \quad \{b_1, \dots, b_{n-2s}\} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-2s}\}. \tag{2.8}$$

Рассматривая аналогично (2.5), легко также убедиться, что (2.8) распадается на равенства

$$\{b_1, \dots, b_t\} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_t\}, \quad \{b_{t+1}, \dots, b_{n-2s}\} = \{\tilde{b}_{t+1}, \dots, \tilde{b}_{n-2s}\}.$$

Таким образом, найдутся числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$, равные ± 1, и подстановки

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & s \\ i_1 & \dots & i_s \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & t \\ j_1 & \dots & j_t \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} t+1 & \dots & n-2s \\ k_{t+1} & \dots & k_{n-2s} \end{pmatrix},$$

действующие соответственно на множествах

$$\{1, \dots, s\}, \qquad \{1, \dots, t\}, \qquad \{t+1, \dots, n-2s\},$$

для которых выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_i &= \varepsilon_i a_{\tau_1(i)}, & i &\in \{1,\dots,s\},\\
\tilde{b}_j &= b_{\tau_2(j)}, & j &\in \{1,\dots,t\},\\
\tilde{b}_k &= b_{\tau_3(k)}, & k &\in \{t+1,\dots,n-2s\}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Обратимся к анализу матриц A и $\widetilde{A}$. Так как (2.6) и (2.7) – регулярные полупростые матрицы, то легко видеть, что $A^{-1}\widetilde{A} = \omega d$, где d – диагональная матрица, а ω – блочно-диагональная матрица вида $\omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и ω_1, ω_2, ω_3 – мономиальные матрицы размеров соответственно $2s, t, n-2s-t$. Рассматривая в равенстве $\widetilde{A} = A\omega d$ первые строки, убеждаемся, что $d = 1$. Поскольку умножение справа на мономиальную матрицу равносильно перестановке столбцов, окончательно получаем, что A и $\widetilde{A}$ отличаются друг от друга перестановками столбцов, причем из (2.4), (2.5), (2.9) вытекает, что мономиальные матрицы ω_2, ω_3 соответствуют перестановкам τ_2, τ_3, а ω_1 обладает свойством

$$\omega_1\, \mathrm{diag}(\tilde{a}_1, -\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s, -\tilde{a}_s)\omega_1^{-1} = \mathrm{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s). \tag{2.10}$$

Для дальнейшего нам нужна более точная информация о строении ω_1 и $\widetilde{A}$. А именно, из (2.9) и (2.10) следует, что в зависимости от знака ε_i матрица ω_1 переводит (2×2)-блок $d_i = \mathrm{diag}\,(\tilde{a}_i, -\tilde{a}_i)$ либо в $\tilde{d}_{\tau_1^{-1}(i)}$, либо в $-\tilde{d}_{\tau_1^{-1}(i)}$. Следовательно, мономиальная матрица ω_1 должна иметь блочный вид $\omega_1 = (w_{i,j})$, где $w_{i,j}$ – (2×2)-блоки, определяемые формулой

$$w_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq \tau_1(j),\\ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, & \text{если } i = \tau_1(j),\ \varepsilon_i = 1,\\ \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, & \text{если } i = \tau_1(j),\ \varepsilon_i = -1.\end{cases} \tag{2.11}$$

Положим A_j (соответственно $\widetilde{A}_j$) – j-й столбец матрицы A (соответственно $\widetilde{A}$). Тогда из равенства $\widetilde{A} = A\omega$ с учетом (2.11) имеем:

$$(\widetilde{A}_{2j-1}, \widetilde{A}_{2j}) = \begin{cases} (A_{2\tau_1(j)-1}, A_{2\tau_1(j)}), & \text{если } \varepsilon_i = 1,\\ (A_{2\tau_1(j)}, A_{2\tau_1(j)-1}), & \text{если } \varepsilon_i = -1,\end{cases} \tag{2.12}$$

для всех $j \in \{1,\dots,s\}$ и

$$(\widetilde{A}_{2s+1}, \dots, \widetilde{A}_{2s+t}) = (A_{2s+\tau_2(1)}, \dots, A_{2s+\tau_2(t)}), \tag{2.13}$$

$$(\widetilde{A}_{2s+t+1}, \dots, \widetilde{A}_{n}) = (A_{2s+\tau_3(t+1)}, \dots, A_{2s+\tau_3(n-2s)}). \tag{2.14}$$

Чтобы завершить доказательство леммы, нам остается показать, что для матриц $\widetilde{Z}_1, \dots, \widetilde{Z}_s$ также существует лишь конечное число возможностей. С этой целью подставим выражение $\widetilde{A} = A\omega$ в равенство (2.5) и рассмотрим левый верхний угол размерности $2s$. После избавления от матрицы A имеем:

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}\bigl(&Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \dots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}\bigr) \\ &= \omega_1 \operatorname{diag}\bigl(\widetilde{Z}_1 \operatorname{diag}(\widetilde{a}_1, -\widetilde{a}_1) \widetilde{Z}_1^{-1}, \dots, \widetilde{Z}_s \operatorname{diag}(\widetilde{a}_s, -\widetilde{a}_s) \widetilde{Z}_s^{-1}\bigr) \omega_1^{-1}. \quad (2.15)\end{aligned}$$

Пусть $Z = \operatorname{diag}(Z_1, \dots, Z_s)$, $\widetilde{Z} = \operatorname{diag}(\widetilde{Z}_1, \dots, \widetilde{Z}_s)$. Тогда из (2.10) и (2.15) получаем, что

$$\begin{aligned}\operatorname{diag}(&a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s) \\ &= (Z^{-1}\omega_1 \widetilde{Z} \omega_1^{-1}) \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s) (Z^{-1}\omega_1 \widetilde{Z} \omega_1^{-1})^{-1},\end{aligned}$$

и тем самым $Z^{-1}\omega_1 \widetilde{Z} \omega_1^{-1} = t$ – диагональная матрица. Но как мы знаем (см. (2.11)), сопряжение при помощи ω_1 переводит блок $\widetilde{Z}_i$ матрицы $\widetilde{Z}$ либо в блок $\widetilde{Z}_{\tau_1^{-1}(i)}$ (если $\varepsilon_i = 1$), либо в блок

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{Z}_{\tau_1^{-1}(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{\tau_1^{-1}(i)} & 1 \\ 1 & \widetilde{u}_{\tau_1^{-1}(i)} \end{pmatrix},$$

получающийся из $\widetilde{Z}_{\tau_1^{-1}(i)}$ перестановкой диагональных элементов (если $\varepsilon_i = -1$).

Отсюда следует, что обязательно $t = 1$, а для элементов $\widetilde{u}_i, \tilde{v}_i$ имеем следующие выражения:

$$(\widetilde{u}_i, \tilde{v}_i) = \begin{cases} (u_{\tau_1(i)}, v_{\tau_1(i)}), & \text{если } \varepsilon_i = 1, \\ (v_{\tau_1(i)}, u_{\tau_1(i)}), & \text{если } \varepsilon_i = -1. \end{cases} \tag{2.16}$$

Итак, существует лишь конечное число точек $\widetilde{w} \in W$, для которых $\varphi_{s,t}(w) = \varphi_{s,t}(\widetilde{w})$, и все они описываются формулами (2.9), (2.12)–(2.14), (2.16). Лемма 2.5 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим конечную группу $G = S_s \times S_t \times S_{n-2s-t} \times \prod_{i=1}^s H_i$, где S_s, S_t, S_{n-2s-t} – симметрические группы и $H_i = \langle \sigma_i \mid \sigma_i^2 = 1 \rangle$ – группы второго порядка, и определим действие G на поле $\mathbb{Q}(W)$ следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(W) = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}, \\ u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s),\end{aligned}$$

где a_i, b_i, a_{ij}, u_i, v_i – соответствующие координатные функции. Тогда элементы группы S_s переставляют столбцы в матрицах

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_s \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2\,2s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{n\,2s-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_s \\ a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2\,2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{n\,2s} \end{pmatrix}$$

и элементы в множестве $\{a_1, \dots, a_s\}$; элементы групп S_t, S_{n-2s-t} переставляют столбцы соответственно в матрицах

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_t \\ a_{2\,2s+1} & \dots & a_{2\,2s+t} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,2s+1} & \dots & a_{n\,2s+t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{t+1} & \dots & b_{n-2s} \\ a_{2\,2s+t+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,2s+t+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

образующий σ_i группы H_i переводит элементы a_i, u_i, v_i, $a_{k\,2i-1}$, $a_{k\,2i}$ ($k \in \{2, \dots, n\}$) соответственно в $-a_i$, v_i, u_i, $a_{k\,2i}$, $a_{k\,2i-1}$ и оставляет неподвижными остальные переменные. Как мы знаем (см. (2.9), (2.12)–(2.14), (2.16)), поле $\mathbb{Q}$-рациональных функций $\mathbb{Q}(V_{s,t})$ отождествляется при помощи коморфизма $\varphi^*_{s,t}$ с полем инвариантов $\mathbb{Q}(W)^G$, которое, очевидно, совпадает с композитом полей

$$\begin{aligned}
&K_1 = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_s, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s, a_{21}, \dots, a_{2\,2s}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{n\,2s})^{S_s \times \prod H_i}, \\
&K_2 = \mathbb{Q}(b_1, \dots, b_t, a_{2\,2s+1}, \dots, a_{2\,2s+t}, a_{n\,2s+1}, \dots, a_{n\,2s+t})^{S_t}, \\
&K_3 = \mathbb{Q}(b_{t+1}, .., b_{n-2s}, a_{2\,2s+t+1}, \dots, a_{2n}, a_{n\,2s+t+1}, \dots, a_{nn})^{S_{n-2s-t}},
\end{aligned}$$

и поэтому достаточно установить рациональность каждого из них.

Рациональность K_2, K_3 – хорошо известный факт. В оставшемся случае нам понадобится утверждение, которое также хорошо известно.

Лемма 2.6. *Пусть G – произвольная конечная группа автоморфизмов поля L и $E = L^G$. Предположим также, что задано точное линейное действие группы G на конечномерном векторном пространстве V над полем L. Тогда поле инвариантов $L(V)^G$ является чисто трансцендентным расширением поля E.*

Утверждение леммы следует из того, что в пространстве V всегда найдется G-инвариантный базис, элементы которого и являются образующими поля $L(V)^G$ над E. Введем в поле

$$\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_s, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s, a_{21}, \dots, a_{2\,2s}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{n\,2s})$$

новый базис трансцендентности. Пусть

$$\begin{gathered}
\widetilde{u}_i = a_i(u_i - v_i),\ \tilde{v}_i = u_i + v_i,\ \tilde{a}_i = a_i, \quad i \in \{1, \dots, s\}, \\
\tilde{a}_{i\,2j-1} = a_j(a_{i\,2j-1} - a_{i\,2j}),\ \tilde{a}_{i\,2j} = a_{i\,2j+1} + a_{i\,2j}, \quad i \in \{2, \dots, n\},\ j \in \{1, \dots, s\}.
\end{gathered}$$

Ясно, что элементы группы $\prod_{i=1}^s H_i$ оставляют неподвижными $\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_s$, $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s, \tilde{a}_{21}, \dots, \tilde{a}_{n\,2s}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
K_1 &= \mathbb{Q}(\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_s, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s, \tilde{a}_{21}, \dots, \tilde{a}_{n\,2s}, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s)^{S_s \times \prod_{i=1}^s H_i} \\
&= \mathbb{Q}(\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_s, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s, \tilde{a}_{21}, \dots, \tilde{a}_{n\,2s}, \tilde{a}_1^2, \dots, \tilde{a}_s^2)^{S_s}.
\end{aligned}$$

Из нашего построения также вытекает, что элементы группы S_s переставляют столбцы в матрицах

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 & \dots & \widetilde{u}_s \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2\,2s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n3} & \dots & \tilde{a}_{n\,2s-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \dots & \tilde{v}_s \\ \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{24} & \dots & \tilde{a}_{2\,2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n4} & \dots & \tilde{a}_{n\,2s} \end{pmatrix}$$

и элементы в множестве $\{\tilde{a}_1^2, \dots, \tilde{a}_s^2\}$. Обозначим

$$L = \mathbb{Q}(\tilde{a}_1^2, \dots, \tilde{a}_s^2) \quad \text{и} \quad E = \mathbb{Q}(\tilde{a}_1^2, \dots, \tilde{a}_s^2)^{\mathrm{Sym}_s} = \mathbb{Q}(\sigma_1, \dots, \sigma_s),$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ – элементарные симметрические многочлены от $\tilde{a}_1^2, \dots, \tilde{a}_s^2$. Тогда по лемме 2.6 поле K_1, а значит, и $\mathbb{Q}(V_{s,t})$, является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{Q}$. Теорема 2.3 доказана.

Доказательство следствия 2.2. Чтобы подсчитать число компонент многообразия $R_n(\Gamma_2)$, заметим, что при фиксированном s у нас есть $n-2s+1$ компонент $V_{s,t}$, так как t пробегает все значения от 0 до $n-2s$. Кроме того, само s может принимать значения от 0 до $[n/2]$. Поэтому при четном n общее число компонент равно

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{n/2}(n-2s+1) = 1+3+\dots+(n+1) &= \sum_{k=0}^{n/2}(2k+1) \\ &= \Big(\frac{n}{2}+1\Big)^2 = \frac{n^2+4n+4}{4},\end{aligned}$$

а при нечетном n число компонент равно

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{(n-1)/2}(n-2s+1) = 2+4+\dots+(n+1) &= 2\sum_{i=1}^{(n+1)/2} i \\ &= \frac{(n+1)(n+3)}{4} = \frac{n^2+4n+3}{4}.\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Доказательство следствия 2.3. Обозначим

$$W_1 = \bigcup_{t \text{ четно}} V_{s,t}, \qquad W_2 = \bigcup_{t \text{ нечетно}} V_{s,t}.$$

Очевидно, что $W_1 \cup W_2 = R_n(\Gamma_2)$ и что W_1 и W_2 не пересекаются, ибо регулярная функция $\det(XY^{-1})$ принимает на W_1 значение 1, а на W_2 – значение -1. Тем самым, достаточно установить, что W_i $(i=1,2)$ связно в комплексной топологии. Рассмотрим, например, W_1 (случай W_2 рассматривается аналогично). Пусть

$$\begin{aligned} X_0 &= \mathrm{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}), \\ Y_0 &= \mathrm{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, -b_1, \dots, -b_{2k}, b_{2k+1}, \dots, b_{n-2s}), \\ \widetilde{Y}_0 &= \mathrm{diag}(-a_1, a_1, \dots, -a_s, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}). \end{aligned}$$

Тогда $(X_0, Y_0) \in V_{s,2k} \cap V_{0,2k}$, и поэтому $\bigcup_{s=0}^{[n/2]} V_{s,2k}$ связно. Далее, $(X_0, \widetilde{Y}_0) \in V_{0,2k} \cap V_{k,0}$, $(X_0, X_0) \in V_{k,0} \cap V_{0,0}$. Отсюда следует, что $U_k = \big(\bigcup_{s=0}^{[n/2]} V_{s,2k}\big) \cup V_{k,0} \cup V_{0,0}$ связно. Поскольку $V_{0,0} \subset \bigcap_k U_k$, то $W_1 = \bigcup_k U_k$ также связное множество. Следствие доказано.

§ 3. Род $g \geqslant 3$

Начнем с рассмотрения случая, когда пара (n, g) отлична от $(2, 3)$. Пусть

$$W_1 = \{(X_1, \ldots, X_g) \in R_n(\Gamma_g) \mid \det(X_1 \cdots X_g) = 1\},$$
$$W_2 = \{(X_1, \ldots, X_g) \in R_n(\Gamma_g) \mid \det(X_1 \cdots X_g) = -1\}.$$

Ясно, что $R_n(\Gamma_g) = W_1 \cup W_2$ и $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Наша цель – установить, что W_1, W_2 – неприводимые $\mathbb{Q}$-рациональные многообразия.

Основная сложность состоит в доказательстве неприводимости W_1, W_2, которое проводится по следующей схеме. Для произвольной неприводимой компоненты $V \subset W_i$ мы построим коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & W \arrow[dl, "\varphi"] \\ & \mathrm{GL}_n(K)^{g-1} & \end{tikzcd} ,$$

где W – некоторое неприводимое многообразие размерности $(g-1)n^2$, φ, ψ – регулярные морфизмы, а π – проекция, задаваемая формулой $\pi(X_1, \ldots, X_g) = (X_2, \ldots, X_g)$. Далее мы покажем, что морфизмы π, φ, ψ являются доминантными и $[K(W) : \varphi^*(K(\mathrm{GL}_n(K)^{g-1}))] = 2^{n-1}$. Отсюда и из коммутативности диаграммы непосредственно следует, что листность морфизма π на некотором открытом множестве не меньше, чем 2^{n-1}. С другой стороны, легко убедиться, что слой $\widetilde{\pi}^{-1}(\alpha)$ для аналогичной проекции $\widetilde{\pi}\colon W_i \to \mathrm{GL}_n(K)^{g-1}$, где $\alpha \in \mathrm{GL}_n(K)^{g-1}$ – точка "общего" положения, состоит в точности из 2^{n-1} элементов. Это означает, что V обязано совпадать с W_i, т.е. W_i – неприводимое многообразие.

Предложение 3.1. *Образ $\pi(V)$ плотен в $\mathrm{GL}_n(K)^{g-1}$.*

Доказательство. Напомним, что многообразие $R_n(\Gamma_g)$ выделяется одним матричным уравнением $X_1^2 \cdots X_g^2 = 1$, и поэтому $\dim V \geqslant (g-1)n^2$. Тем самым достаточно установить, что π – конечнолистный морфизм, или, что эквивалентно, $\ker d\pi_{(X_1,\ldots,X_g)} = 0$, где $d\pi_{(X_1,\ldots,X_g)}$ – дифференциал морфизма π в произвольной общей точке $(X_1, \ldots, X_g)$ компоненты V.

Непосредственный подсчет с использованием двойных чисел показывает, что

$$\ker d\pi_{(X_1,\ldots,X_g)} \subset \{(X, 0, \ldots, 0) \in M_n \times \cdots \times M_n \mid X_1X + XX_1 = 0\}.$$

Если $X_1X + XX_1 = 0$, то $X_1^2X = XX_1^2$; отсюда следует, что $X = 0$, если X_1^2 – регулярная матрица, ибо в этом случае X записывается в виде полинома от X_1 и, следовательно, перестановочен с X_1. Осталось заметить, что согласно предложению 1.1 множество

$$V' = \{(V_1, \ldots, V_g) \in V \mid V_1^2 \text{ регулярен}\} \neq \varnothing,$$

и поэтому X_1^2 – регулярный элемент, если $(X_1, \ldots, X_g)$ – точка "общего" положения. Предложение 3.1 доказано.

Следствие 3.1. $\dim V = (g-1)n^2$.

Перейдем к построению многообразия W. Пусть для определенности $V \subset W_1$. Для произвольной матрицы A обозначим через $\sigma_1(A), \dots, \sigma_n(A)$ коэффициенты (с точностью до знака) ее характеристического многочлена, т.е. пусть

$$\det(tE_n - A) = t^n - \sigma_1(A)t^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(A).$$

В частности, для диагональной матрицы $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ полином $\sigma_i(A)$ является i-м элементарным симметрическим многочленом от $a_1, \dots, a_n$.

Пусть $t_1, \dots, t_n$ – алгебраически независимые над K переменные и $T = \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_n)$. Рассмотрим следующие поля

$$\begin{aligned} L_1 &= K(\sigma_1(T^2), \dots, \sigma_n(T^2)), & L_3 &= K(\sigma_1(T), \dots, \sigma_n(T)), \\ L_2 &= K(\sigma_1(T^2), \dots, \sigma_{n-1}(T^2), \sigma_n(T)), & L_4 &= K(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Легко видеть, что $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset L_4$ и L_4 является минимальным полем разложения многочлена

$$g(t) = (t^2)^n - \sigma_1(T^2)(t^2)^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(T^2),$$

определенного над L_1, так что группа $\operatorname{Gal}(L_4/L_1)$ есть полупрямое произведение группы H, порожденной автоморфизмами $\tau_1, \dots, \tau_n$, где

$$\tau_i(t_j) = \begin{cases} -t_j, & \text{если } i = j, \\ t_j, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

и симметрической группы S_n, элементы которой переставляют переменные $t_1, \dots, t_n$. Положим также

$$H_0 = \left\{ \tau_1^{\alpha_1} \cdots \tau_n^{\alpha_n} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \text{четное число} \right\}.$$

Ясно, что элементы из H_0 действуют тривиально на L_2; поэтому с учетом равенства $[L_2 : L_1] = 2$ имеем, что $\operatorname{Gal}(L_4/L_2) = H_0 \leftthreetimes S_n$, где знак $\leftthreetimes$ означает полупрямое произведение.

Лемма 3.1. $[L_2(\sigma_1(T)) : L_2] = 2^{n-1}$.

Доказательство. Очевидно, что $[L_4 : L_1] = 2^n n!$, $[L_2 : L_1] = 2$, $[L_4 : L_3] = n!$. Отсюда следует, что $[L_3 : L_2] = 2^{n-1}$, и тем самым достаточно установить совпадение полей $L_2(\sigma_1(T))$ и L_3.

Предположим, что $L_2(\sigma_1(T)) \neq L_3$. Так как $L_2(\sigma_1(T)) \subset L_3$ и $L_3 = L_4^{S_n}$, то найдется неединичный автоморфизм $\tau \in H_0$, оставляющий неподвижным поле $L_2(\sigma_1(T))$; в частности $\tau(t_1 + \dots + t_n) = t_1 + \dots + t_n$. С другой стороны, так как $\tau \neq 1$, то τ меняет знак по крайней мере у одной переменной t_i – противоречие, доказывающее лемму.

Рассмотрим минимальный многочлен $f(z)$ элемента $\sigma_1(T)$ над полем L_2. По лемме 3.1 его степень равна 2^{n-1}; следовательно, $f(z)$ совпадает с многочленом $\prod_{\tau\in H_0}\big(z-\tau(\sigma_1(T))\big)$, так как последний инвариантен относительно $H_0 \leftthreetimes S_n$ и имеет ту же степень 2^{n-1}. Заметим также, что коэффициенты $f(z)$ являются многочленами от $\sigma_1(T^2),\dots,\sigma_{n-1}(T^2),\sigma_n(T)$, ибо очевидно, что

$$K[t_1,\dots,t_n]\cap L_2 = K[\sigma_1(T^2),\dots,\sigma_{n-1}(T^2),\sigma_n(T)].$$

Пусть $\{x_{ij}^{(l)} \mid 1 \leqslant i,\ j \leqslant n,\ 2 \leqslant l \leqslant g\}$ – алгебраически независимые над $K(t_1,\dots,t_n)$ переменные и $X_2 = (x_{ij}^{(2)}),\dots,X_g = (x_{ij}^{(g)})$. Заменим в коэффициентах многочлена $f(z)$ переменные $\sigma_1(T^2),\dots,\sigma_{n-1}(T^2),\sigma_n(T)$ соответственно на $\sigma_1(X_g^{-2}\cdots X_2^{-2}),\dots,\sigma_{n-1}(X_g^{-2}\cdots X_2^{-2}),\sigma_n(X_g^{-1}\cdots X_2^{-1})$ и полученный в результате многочлен обозначим через $\overline{f}(z,x_{11}^{(2)},\dots,x_{nn}^{(g)})$.

Теорема 3.1. *Многообразие*

$$W=\big\{(z,X_2,\dots,X_g)\in\mathbb{A}^1\times \mathrm{GL}_n(K)^{g-1} \mid \overline{f}(z,x_{11}^{(2)},\dots,x_{nn}^{(g)})=0\big\}$$

является неприводимым и имеет размерность $(g-1)n^2$.

Доказательство. Пусть $F=K(x_{11}^{(2)},\dots,x_{nn}^{(g)})$. Поскольку многочлен $\overline{f}$, рассматриваемый как многочлен от одной переменной z, имеет старший коэффициент равный 1, то достаточно установить, что он неприводим над F. Обозначим через F_2,F_3,F_4 соответственно композиты $F\cdot L_2$, $F\cdot L_3$, $F\cdot L_4$ и положим

$$\begin{aligned}
A_2&=F[\sigma_1(T^2),\dots,\sigma_{n-1}(T^2),\sigma_n(T)],\\
A_3&=F[\sigma_1(T),\dots,\sigma_n(T)],\\
A_4&=F[t_1,\dots,t_n].
\end{aligned}$$

Очевидно, что кольца A_3, A_4 являются целыми замыканиями кольца A_2 соответственно в F_3 и F_4.

Введем также в рассмотрение максимальный идеал $I_2\subset A_2$, порожденный многочленами $\sigma_1(T^2)-\sigma_1(X_g^{-2}\cdots X_2^{-2}),\dots,\sigma_{n-1}(T^2)-\sigma_{n-1}(X_g^{-2}\cdots X_2^{-2})$, $\sigma_n(T)-\sigma_n(X_g^{-1}\cdots X_2^{-1})$, и пусть $I_4\subset A_4$ – произвольный максимальный идеал, лежащий над I_2. Ясно, что факторкольцо A_2/I_2 совпадает с F. Нам понадобится теперь

Предложение 3.2. A_4/I_4 *является конечным расширением поля* $A_2/I_2=F$ *степени* $2^{n-1}n!$.

Завершим доказательство теоремы 3.1, предполагая справедливым утверждение предложения 3.2.

В силу предложения 3.2 порядок подгруппы разложения $G_{I_4}\leqslant \mathrm{Gal}(F_4/F_2)$ идеала I_4 не меньше чем $2^{n-1}n!$. Но $|\,\mathrm{Gal}(F_4/F_2)|=|\,\mathrm{Gal}(L_4/L_2)|=2^{n-1}n!$, так что в действительности G_{I_4} совпадает с $\mathrm{Gal}(F_4/F_2)$, и, в частности, над I_2 лежит единственный идеал, а именно I_4. Тогда неприводимый над F_2 многочлен

$$f(z)\in K[\sigma_1(T^2),\dots,\sigma_{n-1}(T^2),\sigma_n(T)][z]\subset A_2[z]$$

при факторизации $A_2 \to \overline{A}_2 = A_2/I_2$ переходит в исследуемый многочлен $\overline{f}(z, x_{11}^{(2)}, \dots, x_{nn}^{(g)}) \in F[z]$, и последний обязан быть степенью некоторого неприводимого над F многочлена, так как $f(z)$ разлагается в A_4 на линейные множители (см. [10, гл. 9, § 2]).

С другой стороны, при специализации $X_2 \mapsto T^{-1}$, $X_3 \mapsto E_n, \dots, X_g \mapsto E_n$ многочлен $\overline{f}(z, x_{11}^{(2)}, \dots, x_{nn}^{(g)})$ переходит в $f(z)$, который не имеет кратных корней, и значит, $\overline{f}$ также не имеет кратных корней, что и требовалось доказать.

Для доказательства предложения 3.2 предварительно установим следующие две леммы.

Лемма 3.2. *Пусть $H \leqslant S_n$ и $|H| \geqslant (n-1)!$. Тогда H – максимальная подгруппа группы S_n.*

Доказательство. При $n = 2, 3, 4$ утверждение проверяется непосредственно. Пусть $n \geqslant 5$. Обозначим через d индекс $[S_n : H]$ и рассмотрим регулярное представление $\varphi\colon S_n \to S_d$ группы S_n на левых смежных классах $\{g_i H\}$. Без ограничения общности можем считать, что $H \neq A_n$. Тогда из простоты группы A_n вытекает, что $\varphi\big|_{A_n}$ – инъективный гомоморфизм, ибо $\ker\varphi \subset H$, и поэтому $n!/2 = |\varphi(A_n)| \leqslant d!$. Так как по условию $d \leqslant n$, то последнее возможно лишь в случае, когда $d = n$. Тем самым, φ – изоморфизм, и остается заметить, что образ $\varphi(H)$ совпадает со стабилизатором смежного класса $1 \cdot H = H$, и, в частности, $\varphi(H)$ (а значит, и H) – максимальная подгруппа. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Многочлен*

$$\overline{g}_1(t) = t^n - \sigma_1(X_g^{-2} \cdots X_2^{-2})t^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(X_g^{-2} \cdots X_2^{-2})$$

неприводим над F и его минимальное поле разложения E имеет степень $n!$ над F.

Доказательство будем вести индукцией по n. При $n = 2$ наше утверждение проверяется непосредственно. В общем случае пусть

$$A = K_1\bigl[x_{n1}^{(2)}, \dots, x_{nn}^{(2)}, x_{1n}^{(2)}, \dots, x_{n-1,n}^{(2)}, \dots, x_{n1}^{(g)}, \dots, x_{nn}^{(g)}, \dots, x_{1n}^{(g)}, \dots, x_{n-1,n}^{(g)}\bigr],$$

где

$$K_1 = K\bigl(x_{11}^{(2)}, \dots, x_{1,n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-1,1}^{(2)}, \dots, x_{n-1,n-1}^{(2)}, \dots, \\ x_{11}^{(g)}, \dots, x_{1,n-1}^{(g)}, \dots, x_{n-1,1}^{(g)}, \dots, x_{n-1,n-1}^{(g)}\bigr).$$

Тогда $A \subset F$ и пусть B – целое замыкание A в E. Элементы $x_{n1}^{(i)}, \dots, x_{nn}^{(i)}$, $x_{1n}^{(i)}, \dots, x_{n-1,n}^{(i)}$, где $2 \leqslant i \leqslant g$, порождают над K_1 максимальный идеал $\mathfrak{p} \subset A$. Обозначим через $\mathfrak{P} \subset B$ произвольный максимальный идеал, лежащий над $\mathfrak{p}$. Пусть $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/K)$ и $\Gamma_{\mathfrak{P}} \leqslant \Gamma$ – подгруппа разложения идеала $\mathfrak{P}$.

Имеется естественный сюръективный гомоморфизм $\Gamma_{\mathfrak{P}} \to \mathrm{Gal}(\overline{B}/\overline{A})$, где $\overline{B} = B/\mathfrak{P}$, $\overline{A} = A/\mathfrak{p}$. Покажем вначале, что $|\mathrm{Gal}(\overline{B}/\overline{A})| \geqslant (n-1)!$. Действительно, многочлен $\overline{g}_1(t)$ совпадает с $\det(tE_n - X_g^{-2} \cdots X_2^{-2})$ и по построению раскладывается в B на линейные множители. Следовательно, его образ при каноническом гомоморфизме $A \to \overline{A}$ также раскладывается в $\overline{B}$ на линейные множители, и тем самым $\overline{B}$ содержит минимальное поле разложения образа $\overline{g}_1(t)$. С другой стороны, очевидно, что $\overline{g}_1(t)$ переходит в многочлен $\det(tE_n - \overline{X}_g^{-2} \cdots \overline{X}_2^{-2})$, где

$$\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & \dots & x_{1,n-1}^{(2)} & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{n-1,1}^{(2)} & \dots & x_{n-1,n-1}^{(2)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \overline{X}_g = \begin{pmatrix} x_{11}^{(g)} & \dots & x_{1,n-1}^{(g)} & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{n-1,1}^{(g)} & \dots & x_{n-1,n-1}^{(g)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и поэтому по предположению индукции минимальное поле разложения последнего многочлена имеет степень $(n-1)!$.

Итак, мы установили, что $|\Gamma_{\mathfrak{P}}| \geqslant |\operatorname{Gal}(\overline{B}/\overline{A})| \geqslant (n-1)!$. Тогда в силу леммы 3.2 подгруппа $\Gamma_{\mathfrak{P}}$ является максимальной в S_n, и значит, либо $\Gamma = S_n$, либо $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{P}} \neq S_n$. Если $\Gamma = S_n$, то доказывать нечего. Пусть $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{P}} \neq S_n$. В этом случае над максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ лежит в точности один максимальный идеал. Отсюда следует, что $\det(tE_n - \overline{X}_g^{-2} \cdots \overline{X}_2^{-2})$ как образ многочлена $\overline{g}_1(t)$ при специализации $A \to \overline{A}$ обязан быть степенью неприводимого над $\overline{A}$ многочлена (см. [10, гл. 9, § 2]), что заведомо не так. Полученное противоречие доказывает лемму 3.3.

Теперь легко завершить доказательство предложения 3.2. А именно, многочлен $g(t)$ раскладывается в A_4 на линейные множители, и поэтому при переходе к вычетам $\overline{A}_4$ многочлен $g(t)$ переходит в

$$\overline{g}(t) = (t^2)^n - \sigma_1(X_g^{-2} \cdots X_2^{-2})(t^2)^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(X_g^{-2} \cdots X_2^{-2}),$$

который также раскладывается в поле $\overline{A}_4$ на линейные множители. Так как $[\overline{A}_4 : \overline{A}_2] \leqslant 2^{n-1} n!$, то достаточно установить, что минимальное поле разложения многочлена $\overline{g}(t)$ имеет над $\overline{A}_2 = F$ степень $2^{n-1} n!$.

Последнее поле можно построить в два этапа: вначале надо взять минимальное поле разложения E многочлена $\overline{g}_1(t)$, а затем добавить к нему квадратные корни из его корней. В силу леммы 3.3 $[E : F] = n!$. Поэтому если $\overline{g}_1(t) = \prod_{i=1}^n (t - \alpha_i)$, где $\alpha_i \in E$, то остается показать, что $[E(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n}) : E] = 2^{n-1}$. Другими словами, надо доказать, что между корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ многочлена $\overline{g}_1(t)$ по модулю квадратов в E существует только одно соотношение.

Одно соотношение очевидно, а именно имеем: $\prod_{i=1}^n \alpha_i = \det(X_g^{-1} \cdots X_2^{-1})^2$. Кроме того, при доказательстве леммы 3.3 было установлено, что при переходе к вычетам $B \to \overline{B} = B/\mathfrak{P}$ один из корней, скажем α_1, переходит в 0, а другие переходят в ненулевые корни $\overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n$ многочлена $\det(tE_n - \overline{X}_g^{-2} \cdots \overline{X}_2^{-2})$. Тогда по индукции $[E(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n}) : E] \geqslant [\overline{B}(\sqrt{\overline{\alpha}_1}, \dots, \sqrt{\overline{\alpha}_n}) : \overline{B}] = 2^{n-2}$ и поскольку дополнительно имеем, что модуль соотношений между $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ инвариантен относительно группы $\operatorname{Gal}(E/F) = S_n$, то отсюда немедленно получаем, что между $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ по модулю квадратов в E существует не более одного соотношения. Доказательство предложения 3.2, а вместе с ним и теоремы 3.1, завершено.

В соответствии с нашим планом доказательства укажем теперь морфизмы φ и ψ. Пусть

$$\varphi\colon W \to \mathrm{GL}_n(K)^{g-1}, \qquad (z, X_2, \dots, X_g) \mapsto (X_2, \dots, X_g),$$
$$\psi\colon V \to W, \qquad (X_1, X_2, \dots, X_g) \mapsto (\operatorname{tr}(X_1), X_2, \dots, X_g),$$

где через $\mathrm{tr}(X_1)$ обозначен след матрицы X_1. Ясно, что φ – доминантный морфизм и что $[K(W):\varphi^*(K(\mathrm{GL}_n^{g-1}))] = 2^{n-1}$, ибо степень $\overline{f}$ по переменной z равна 2^{n-1}. Кроме того, из конечнолистности π и следствия 3.1 с учетом равенства $\dim W = (g-1)n^2$ получаем, что ψ – также доминантный морфизм.

Для проверки корректности ψ отметим вначале, что для полупростой матрицы X_1 непосредственно из способа построения $\overline{f}$ вытекает равенство

$$\overline{f}\bigl(\mathrm{tr}(X_1), X_2, \dots, X_g\bigr) = 0.$$

В общем же случае согласно предложению 1.1 множество, состоящее из точек $(X_1, \dots, X_g) \in V$ с полупростым и регулярным X_1^2, непусто, открыто и поэтому плотно в V. Отсюда следует, что

$$\overline{f}\bigl(\mathrm{tr}(X_1), X_2, \dots, X_g\bigr) = 0$$

для всех $(X_1, \dots, X_g) \in V$, т.е. ψ – корректно определенный морфизм.

Теорема 3.2. *Многообразия W_1, W_2 являются (абсолютно) неприводимыми $\mathbb{Q}$-рациональными многообразиями, размерность которых равна $(g-1)n^2$.*

Доказательство. Неприводимость W_1, W_2 установлена выше. Для доказательства $\mathbb{Q}$-рациональности воспользуемся другой моделью многообразия $R_n(\Gamma_g)$. Рассмотрим замену переменных

$$(X_1, X_2, \dots, X_g) \mapsto (V_1, V_2, \dots, V_g),$$

где $V_1 = X_1X_3^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}$, $V_2 = X_1X_2X_3X_1X_2(X_1X_2X_3)^{-1}$, $V_3 = X_1X_2X_3$, $V_4 = X_4, \dots, V_g = X_g$. Эта замена является бирегулярной, ибо обратное отображение задается формулами

$$(V_1, V_2, \dots, V_g) \mapsto (X_1, X_2, \dots, X_g),$$

где $X_1 = V_1V_3$, $X_2 = V_3^{-1}V_1^{-1}V_3^{-1}V_2V_3$, $X_3 = V_3^{-1}V_2^{-1}V_3^2$, $X_4 = V_4, \dots, X_g = V_g$. При указанном выше морфизме многообразия W_1, W_2 переходят соответственно в

$$U_1 = \bigl\{(V_1, \dots, V_g) \in \mathrm{GL}_n(K)^g \mid [V_1, V_2]V_3^2 \cdots V_g^2 = 1,\ \det(V_3 \cdots V_g) = 1\bigr\},$$
$$U_2 = \bigl\{(V_1, \dots, V_g) \in \mathrm{GL}_n(K)^g \mid [V_1, V_2]V_3^2 \cdots V_g^2 = 1,\ \det(V_3 \cdots V_g) = -1\bigr\},$$

где $[V_1, V_2] = V_1V_2V_1^{-1}V_2^{-1}$.

Дальнейшее доказательство $\mathbb{Q}$-рациональности W_i осуществляется аналогично доказательству $\mathbb{Q}$-рациональности многообразия представлений $R_n(\Gamma_g)$ фундаментальной группы Γ_g компактной ориентируемой поверхности рода g (см. [5]) и заключается в следующем.

Очевидно, что многообразие

$$M_i = \bigl\{(V_3, \dots, V_g) \in \mathrm{GL}_n(K)^{g-2} \mid \det(V_3 \cdots V_g) = (-1)^{i-1}\bigr\}$$

рационально над $\mathbb{Q}$. Зафиксируем его общую точку $\omega_0 = (\widetilde{V}_3, \dots, \widetilde{V}_g) \in M_i$ и положим: $K_i = \mathbb{Q}(\omega_0)$ – поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ элементами матриц $\widetilde{V}_3, \dots, \widetilde{V}_g$. Тогда в силу неприводимости U_i поле $\mathbb{Q}$-рациональных функций $\mathbb{Q}(U_i)$ изоморфно полю K_i-рациональных функций $K_i(W_{h^{-1}})$ коммутаторного многообразия $W_{h^{-1}}$, задаваемого уравнениями

$$W_{h^{-1}} = \bigl\{(U, V) \in \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K) \mid [U, V] = h^{-1}\bigr\},$$

где $h = \widetilde{V}_3^2 \cdots \widetilde{V}_g^2$. Далее применяется

Предложение 3.3. *Существует такое непустое $\mathbb{Q}$-открытое подмножество $B \subset \mathrm{SL}_n(K)$, что для любого расширения $L/\mathbb{Q}$ и любой точки $b \in B(L)$ многообразие W_b является неприводимым L-рациональным многообразием размерности n^2+1.*

Доказательство этого утверждения содержится в [5].

Так как h является точкой "общего" положения группы $\mathrm{SL}_n(K)$ над $\mathbb{Q}$, то h^{-1} лежит в открытом подмножестве B, построенном в предложении 3.3, и поэтому согласно этому предложению $W_{h^{-1}}$ является K_i-рациональным многообразием, т.е. расширение $K_i(W_{h^{-1}})/K_i$ чисто трансцендентно. Но K_i есть чисто трансцендентное расширение $\mathbb{Q}$, следовательно $\mathbb{Q}(U_i)$ также есть чисто трансцендентное расширение $\mathbb{Q}$. Последнее завершает доказательство теоремы 3.2.

В заключение рассмотрим случай, когда $n = 2$ и $g = 3$. Для удобства запишем $R_2(\Gamma_3)$ в виде

$$R_2(\Gamma_3) = \big\{(X,Y,Z) \in \mathrm{GL}_2(K)^3 \mid X^2 = Y^2Z^2\big\},$$

и пусть, как и выше,

$$W_1 = \big\{(X,Y,Z) \in R_2(\Gamma_3) \mid \det X = \det(YZ)\big\},$$
$$W_2 = \big\{(X,Y,Z) \in R_2(\Gamma_3) \mid \det X = -\det(YZ)\big\}.$$

Анализ предыдущего рассуждения показывает, что в W_i $(i = 1,2)$ существует в точности одна неприводимая компонента S_i, образ которой при проектировании на две последние координаты плотен в $\mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_2(K)$. Так как S_1, S_2 совпадают с замыканием множеств

$$\big\{(X,Y,Z) \in W_i \mid X^2 - \text{регулярный элемент}\big\},$$

то объединение V оставшихся компонент должно совпадать с замыканием

$$\widetilde{V} = \big\{(X,Y,Z) \in \mathrm{GL}_2(K)^3 \mid X^2 = Y^2Z^2;\ X^2, Y^2, Z^2 \text{ нерегулярны}\big\}.$$

Мы знаем также (см. предложение 1.3), что на любой неприводимой компоненте многообразия W_i найдется точка (X,Y,Z) с регулярными X, Y, Z. Но условие X – регулярный, а X^2 – нерегулярный элементы, эквивалентно тому, что X сопряжена диагональной матрице вида $\mathrm{diag}(a,-a)$; в частности, в этом случае X^2 – скалярная матрица. Поэтому V обязано совпадать с замыканием множества

$$V_1 = \big\{\big(X\,\mathrm{diag}(ab,-ab)X^{-1}, Y\,\mathrm{diag}(a,-a)Y^{-1}, Z\,\mathrm{diag}(b,-b)Z^{-1}\big) \mid \\ a,b \in K^*,\ X,Y,Z \in \mathrm{GL}_2(K)\big\}.$$

Ясно, что V_1 (а значит и V) – неприводимое многообразие, лежащее в W_2, и, таким образом, $R_2(\Gamma_3)$ состоит из трех неприводимых компонент: $S_1 = W_1$, S_2, V (заметим, что $\dim S_1 = \dim S_2 = \dim V = 8$, поэтому ни одно из них не лежит в другом).

Предложение 3.4. *Многообразия S_1, S_2, V являются $\mathbb{Q}$-рациональными многообразиями размерности 8.*

Доказательство. $\mathbb{Q}$-рациональность W_1 установлена в теореме 3.2. Почти очевидна и $\mathbb{Q}$-рациональность V. Наконец, $\mathbb{Q}$-рациональность S_2 может быть установлена прямыми вычислениями. А именно, как мы знаем, S_2 бирационально изоморфно гиперповерхности W, выделяемой уравнением

$$\overline{f}\big(z, \sigma_1(Y^2Z^2), -\sigma_2(YZ)\big) = 0.$$

В нашем случае $n = 2$ и поэтому легко проверить, что

$$f(z) = z^2 - \sigma_1(T^2) - 2\sigma_2(T).$$

Следовательно,

$$\overline{f}\big(z, \sigma_1(T^2Z^2), -\sigma_2(YZ)\big) = z^2 - \operatorname{tr}(Y^2Z^2) + 2\det(YZ).$$

Пусть $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(Y^2Z^2) = {} & (y_{11}^2 + y_{12}y_{21})(z_{11}^2 + z_{12}z_{21}) + (y_{22}^2 + y_{12}y_{21})(z_{22}^2 + z_{12}z_{21}) \\ & + y_{12}z_{21}(y_{11} + y_{22})(z_{11} + z_{22}) + y_{21}z_{12}(y_{11} + y_{22})(z_{11} + z_{22}). \end{aligned}$$

В частности, в уравнение

$$z^2 - \operatorname{tr}(Y^2Z^2) + 2\det(YZ) = 0$$

переменная y_{12} входит в первой степени. Это означает, что в поле $\mathbb{Q}$-рациональных функций $\mathbb{Q}(W)$ переменная y_{12} рациональным образом выражается через z, y_{11}, y_{22}, y_{21}, z_{11}, z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}, следовательно W – $\mathbb{Q}$-рациональное многообразие. Предложение 3.4 доказано.

Следствие 3.2. *Многообразие $R_n(\Gamma_g)_{\mathbb{C}}$ имеет две связные компоненты для всех $n \geqslant 2$, $g \geqslant 3$.*

Доказательство. Если $(n, g) \neq (2, 3)$, то в силу теоремы 3.2 многообразия $(W_1)_{\mathbb{C}}$ и $(W_2)_{\mathbb{C}}$ не пересекаются, неприводимы, а значит, связны; и поэтому доказывать нечего. В оставшемся случае, когда $n = 2$, $g = 3$, очевидно, что в обозначениях, введенных выше, $V \cap S_2 \neq \varnothing$ и, следовательно, $(W_2)_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}} \cup (S_2)_{\mathbb{C}}$ – также связное множество. Следствие доказано.

§ 4. Представления в $\mathrm{SL}_n(K)$

Цель настоящего параграфа – доказать теорему B, которая дает частичное описание многообразия представлений группы Γ_g в $\mathrm{SL}_n(K)$. Мы начнем с доказательства неприводимости $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ в случае, когда $g \geqslant 3$. Так как $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ выделяется в W_1 уравнениями $\det X_i = 1$ (где W_1 – неприводимая компонента многообразия $R_n(\Gamma_g)$ из § 3), то естественно постараться редуцировать доказательство к уже установленному в § 3 утверждению о том, что W_1 неприводимо.

Будем рассуждать от противного. Пусть многообразие $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ приводимо и $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K)) = R_1 \cup \cdots \cup R_t$ – разбиение на неприводимые компоненты. Рассмотрим морфизм:

$$\lambda\colon R\big(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K)\big) \times \mathbb{A}^{g-1} \to W_1 \subset R_n(\Gamma_g),$$
$$(X_1, \dots, X_g, a_1, \dots, a_{g-1}) \mapsto (X_1 a_1, \dots, X_{g-1} a_{g-1}, X_g (a_1 \cdots a_{g-1})^{-1}).$$

Лемма 4.1. *Для любой точки*

$$X = (X_1, \dots, X_g, a_1, \dots, a_{g-1}) \in R\big(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K)\big) \times \mathbb{A}^{g-1}$$

слой $\lambda^{-1}(\lambda(X))$ *конечен.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$\widetilde{X} = (\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_g, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{g-1}) \in \lambda^{-1}\big(\lambda(X)\big).$$

Тогда $X_1 a_1 = \widetilde{X}_1 \tilde{a}_1, \dots, X_{g-1} a_{g-1} = \widetilde{X}_{g-1} \tilde{a}_{g-1}$. Перейдя к определителям, получаем, что $\tilde{a}_1^n = a_1^n, \dots, \tilde{a}_{g-1}^n = a_{g-1}^n$, так что для $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{g-1}$ а тем самым и для $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{g-1}$, существует лишь конечное число возможностей. Лемма доказана.

Многообразие $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ выделяется $g-1$ уравнением в W_1. Поэтому размерность любой компоненты R_i не меньше, чем

$$\dim W_1 - (g-1) = n^2(g-1) - (g-1) = (n^2-1)(g-1).$$

Тогда из конечнолистности λ получаем, что

$$\dim \lambda(R_i \times \mathbb{A}^{g-1}) = \dim(R_i \times \mathbb{A}^{g-1}) \geqslant n^2(g-1),$$

т.е. образ $\lambda(R_i \times \mathbb{A}^{g-1})$ плотен в W_1 для всех $i = 1, \dots, t$.

Обозначим через R_i' открытое в R_i множество $R_i \setminus \big\{\bigcup_{j \neq i} (R_i \cap R_j)\big\}$. Из предыдущего рассуждения вытекает, что пересечение $\bigcap_{i=1}^t \lambda(R_i' \times \mathbb{A}^{g-1})$ не является пустым и содержит открытое в W_1 множество. В силу леммы 4.1 для любого $w \in \bigcap_{i=1}^t \lambda(R_i' \times \mathbb{A}^{g-1})$ слой $\lambda^{-1}(w)$ конечен, и по построению $\lambda^{-1}(w)$ содержит точки из всех непересекающихся открытых множеств $R_1' \times \mathbb{A}^{g-1}, \dots, R_t' \times \mathbb{A}^{g-1}$. Но если

$$(X_1, \dots, X_g, a_1, \dots, a_{g-1}) \in \lambda^{-1}(w),$$

то все остальные точки из слоя, как было установлено выше, имеют вид

$$\big(X_1 \varepsilon_1, \dots, X_{g-1} \varepsilon_{g-1}, X_g (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{g-1})^{-1}, a_1 \varepsilon_1^{-1}, \dots, a_{g-1} \varepsilon_{g-1}^{-1}\big),$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{g-1}$ – корни n-й степени из 1. Таким образом, чтобы завершить доказательство неприводимости $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$, остается установить

Предложение 4.1. *Если* $(X_1,\dots,X_g)\in R_i'$ – *точка "общего" положения, то для любого набора* $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{g-1}$ *корней* n*-й степени из единицы элемент*

$$\bigl(X_1\varepsilon_1,\dots,X_{g-1}\varepsilon_{g-1},X_g(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{g-1})^{-1}\bigr)$$

также принадлежит R_i.

Для доказательства предложения мы построим неприводимое подмножество $V\subset R(\Gamma_g,\mathrm{SL}_n(K))$, содержащее как $(X_1,\dots,X_g)$, так и $(X_1\varepsilon_1,\dots,X_{g-1}\varepsilon_{g-1}$, $X_g(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{g-1})^{-1})$. Поскольку по условию первая точка лежит только на i-й неприводимой компоненте, то в силу неприводимости многообразие V также содержится в R_i; в частности, это будет означать, что и вторая точка принадлежит R_i.

Чтобы реализовать этот план, воспользуемся преобразованиями, введенными при доказательстве предложения 1.3. Пусть

$$\widetilde{W}_1=\bigl\{(X_1,\dots,X_g)\in W_1\mid X_1X_2,\dots,X_{g-1}X_g\text{ – регулярные полупростые элементы}\bigr\}.$$

Ясно, что $\widetilde{W}_1$ – непустое открытое в W_1 множество, и поскольку $\lambda(R_i\times\mathbb{A}^{g-1})$ плотно в W_1, то пересечение $\widetilde{R}_i=\widetilde{W}_1\cap R_i$ также непусто и открыто в R_i для всех $i=1,\dots,t$. Зафиксируем неприводимую компоненту R_i и обозначим через U_1, $U_1^{(1)}$, соответственно, множества

$$U_1=\bigl\{((X_1,\dots,X_g),A)\in\widetilde{R}_i\times\mathrm{GL}_n(K)\mid A(X_1X_2)=(X_1X_2)A\bigr\},$$
$$U_1^{(1)}=\bigl\{((X_1,\dots,X_g),A)\in U_1\mid\det A=1\bigr\}.$$

Положим также

$$\varphi\colon U_1^{(1)}\to R\bigl(\Gamma_g,\mathrm{SL}_n(K)\bigr),\quad ((X_1,\dots,X_g),A)\mapsto(X_1A,A^{-1}X_2,X_3,\dots,X_g).$$

Лемма 4.2. *Множество* $U_1^{(1)}$ – *неприводимое многообразие.*

Доказательство. Пусть $U_1^{(1)}=S_1\cup\dots\cup S_l$ – разбиение на неприводимые компоненты и

$$\pi\colon U_1^{(1)}\to\widetilde{R}_i,\qquad((X_1,\dots,X_g),A)\mapsto(X_1,\dots,X_g).$$

Покажем вначале, что образ $\pi(S_j)$ плотен в $\widetilde{R}_i$ для всех $j=1,\dots,l$. Действительно, из регулярности X_1X_2 и леммы 2.1 непосредственно вытекает, что U_1 – неприводимое многообразие размерности $\dim R_i+n$. Так как размерность любой компоненты многообразия $U_1^{(1)}$ понижается на 1, то для всех j имеем $\dim S_j=\dim R_i+n-1$. Но тогда $\dim\pi(S_j)\geqslant\dim R_i$, ибо размерность слоя $\pi_j^{-1}(\alpha)$, где $\alpha\in\widetilde{R}_i$ и $\pi_j=\pi\big|_{S_j}$, не больше чем $n-1$. Последнее и означает, что $\pi(S_j)$ плотно в R_i.

Рассмотрим множества $\widetilde{S}_j=S_j\setminus\bigl\{\bigcup_{k\neq j}S_k\bigr\}$ и их образы $\pi_j(\widetilde{S}_j)$. В силу уже доказанного пересечение $\bigcap_{j=1}^{l}\pi_j(\widetilde{S}_j)$ не является пустым. Тогда если

$$\alpha=(X_1,\dots,X_g)\in\bigcap_{j=1}^{l}\pi_j(\widetilde{S}_j),$$

то с одной стороны множество $\pi^{-1}(\alpha)$ неприводимо, ибо X_1X_2 – регулярный полупростой элемент, а с другой – $\pi^{-1}(\alpha)$ по построению содержит точки из непересекающихся множеств $\widetilde{S}_1, \dots, \widetilde{S}_l$, и значит, $\pi^{-1}(\alpha) \cap S_j \neq \pi^{-1}(\alpha)$, что противоречит неприводимости $\pi^{-1}(\alpha)$. Лемма 4.2 доказана.

Множество $V_1 = \varphi_1(U_1^{(1)})$, будучи образом $U_1^{(1)}$, является неприводимым. Поэтому, рассуждая аналогично, легко показать, что множества

$$U_2 = \big\{((X_1, \dots, X_g), A) \in \widetilde{V}_1 \times \mathrm{GL}_n(K) \mid A(X_2X_3) = (X_2X_3)A\big\},$$

где $\widetilde{V}_1 = V_1 \cap \widetilde{W}_1$ и

$$U_2^{(1)} = \big\{((X_1, \dots, X_g), A) \in U_2 \mid \det A = 1\big\}$$

неприводимы, а значит неприводимо и $V_2 = \varphi_2(U_2^{(1)})$, где

$$\varphi_2 \colon U_2^{(1)} \to R\big(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K)\big), \quad ((X_1, \dots, X_g), A) \mapsto (X_1, X_2A, A^{-1}X_3, X_4, \dots, X_g)$$

и т. д. Окончательно в качестве искомого множества V можно взять V_{g-1}, ибо очевидно, что для любой точки $(X_1, \dots, X_g) \in \widetilde{R}_i$ и для любого набора $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{g-1}$ корней из единицы степени n, полагая $\widetilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1, \widetilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2, \dots, \widetilde{\varepsilon}_{g-1} = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{g-1}$, имеем:

$$\begin{gathered}
(X_1\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_1^{-1}X_2, X_3, \dots, X_g) = (X_1\varepsilon_1, X_2\varepsilon_1^{-1}, X_3, \dots, X_g) \in \widetilde{V}_1, \\
(X_1\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_1^{-1}X_2\widetilde{\varepsilon}_2, \widetilde{\varepsilon}_2^{-1}X_3, X_4, \dots, X_g) = (X_1\varepsilon_1, X_2\varepsilon_2, X_3(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}, X_4, \dots, X_g) \in \widetilde{V}_2, \\
\vdots \\
(X_1\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_1^{-1}X_2\widetilde{\varepsilon}_2, \dots, \widetilde{\varepsilon}_{g-2}^{-1}X_{g-1}\widetilde{\varepsilon}_{g-1}, \widetilde{\varepsilon}_{g-1}^{-1}X_g) \\
= (X_1\varepsilon_1, \dots, X_{g-1}\varepsilon_{g-1}, X_g(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{g-1})^{-1}) \in V_{g-1}.
\end{gathered}$$

Предложение 4.1 доказано.

В отличие от $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$, где род $g \geqslant 3$, многообразие $R(\Gamma_2, \mathrm{SL}_n(K))$ является приводимым. Тем не менее описание его неприводимых компонент может быть получено аналогичным образом. А именно, дословно повторяя рассуждения из доказательств лемм 4.1, 4.2 и предложения 4.1, легко установить, что если множество $V_{s,t}^{(1)} = V_{s,t} \cap R(\Gamma_2, \mathrm{SL}_n(K))$ непусто, то оно неприводимо (здесь $V_{s,t}$ – неприводимые компоненты многообразия $R_n(\Gamma_2)$, явные описания которых содержатся в § 2). Легко видеть также, что $V_{s,t}^{(1)}$ непусто тогда и только тогда, когда t – четное число. Действительно, по построению (см. § 2) $V_{s,t}$ – замыкание образа морфизма

$$\varphi_{s,t} \colon \mathbb{A}^s \times \mathbb{A}^{n-2s} \times \mathrm{GL}_2^s \times \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K),$$

переводящего элемент

$$\alpha = (a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, Z_1, \dots, Z_s, A)$$

в точку (X,Y), где

$$\begin{aligned}X &= A\operatorname{diag}\bigl(a_1,-a_1,\dots,a_s,-a_s,b_1,\dots,b_{n-2s}\bigr)a^{-1},\\ Y &= A\operatorname{diag}\bigl(Z_1\operatorname{diag}(a_1,-a_1)Z_1^{-1},\dots,Z_s\operatorname{diag}(a_s,-a_s)Z_s^{-1},\\ &\qquad\qquad -b_1,\dots,-b_t,b_{t+1},\dots,b_{n-2s}\bigr)A^{-1}.\end{aligned}$$

Поскольку для матриц X, Y из $\operatorname{Im}\varphi_{s,t}$ справедливо соотношение $\det(XY^{-1}) = (-1)^t$, то это соотношение выполняется и для всех точек из $V_{s,t}$. Поэтому, если дополнительно $\det X = \det Y = 1$, то непустота $V_{s,t}^{(1)}$ эквивалентна условию $(-1)^t = 1$, т.е. t должно быть четным числом.

Предложение 4.2. *Число неприводимых компонент $R(\Gamma_2,\mathrm{SL}_n(K))$ равно $(n^2+6n+8)/8$, если n – четно, и $(n^2+4n+3)/8$, если n – нечетно; при этом каждая компонента является $\mathbb{Q}$-унирациональным многообразием.*

Доказательство. Нам надо подсчитать число пар (s,t), для которых $0\leqslant s\leqslant [n/2]$, $0\leqslant t\leqslant n-2s$ и t четно. Пусть вначале $n=2l$ – четное число. Тогда при фиксированном s имеется ровно $(l-s)+1$ четных чисел, не превосходящих $n-2s$. Поэтому общее число таких пар равно

$$\sum_{s=0}^{l}\bigl((l-s)+1\bigr) = 1+2+\dots+(l-1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2} = \frac{n^2+6n+8}{8}\,.$$

В случае нечетного $n=2l+1$ при фиксированном s опять имеется $(l-s)+1$ четных чисел, не превосходящих $n-2s$; отсюда общее число пар равно

$$\sum_{s=0}^{l}\bigl((l-s)+1\bigr) = 1+2+\dots+(l+1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2} = \frac{n^2+4n+3}{8}\,.$$

Покажем теперь, что для различных двух пар (s,t) и (s_1,t_1) многообразия $V_{s,t}^{(1)}$, $V_{s_1,t_1}^{(1)}$ не содержатся друг в друге. Для этого можно действовать следующим образом. Поскольку $\dim V_{s,t}^{(1)} = \dim V_{s,t}-1$, то морфизм

$$\lambda_{s,t}\colon V_{s,t}^{(1)}\times\mathbb{A}^1\to V_{s,t},\qquad (X,Y,a)\mapsto(aX,aY),$$

очевидно, доминантен, т.е. образ $\lambda_{s,t}(V_{s,t}^{(1)}\times\mathbb{A}^1)$ плотен в $V_{s,t}$. Тогда, например, если $V_{s,t}^{(1)}\subset V_{s_1,t_1}^{(1)}$, то имели бы

$$\lambda_{s,t}(V_{s,t}^{(1)}\times\mathbb{A}^1) = \lambda_{s_1,t_1}(V_{s,t}^{(1)}\times\mathbb{A}^1)\subset\lambda_{s_1,t_1}(V_{s_1,t_1}^{(1)}\times\mathbb{A}^1),$$

и, следовательно, $V_{s,t}$ содержалось бы в V_{s_1,t_1}, что, как мы знаем, невозможно.

Для доказательства свойства $\mathbb{Q}$-унирациональности многообразия $V_{s,t}^{(1)}$ рассмотрим ограничение морфизма $\varphi_{s,t}$ на подмногообразие $V\subset\mathbb{A}^s\times\mathbb{A}^{n-2s}\times$

$\mathrm{GL}_2^s \times \mathrm{GL}_n(K)$, состоящее из всех точек $\alpha = (a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_{n-2s}, Z_1, \ldots, Z_s, A)$ таких, что

$$(-1)^s \prod_{i=1}^{s} \alpha_i^2 \prod_{i=1}^{n-2s} b_i = 1.$$

Из размерностных соображений немедленно вытекает, что образ $\operatorname{Im} \varphi_{s,t}(V)$ плотен в $V_{s,t}^{(1)}$. Поэтому остается лишь отметить, что если $2s < n$, то V – неприводимое $\mathbb{Q}$-рациональное многообразие, а в случае $n = 2s$ многообразие V состоит из двух непересекающихся неприводимых $\mathbb{Q}$-рациональных компонент. Предложение 4.2 доказано.

Перейдем к доказательству $\mathbb{Q}$-унирациональности $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ в случае $g \geqslant 3$. Предлагаемое ниже доказательство опирается на понятие цепной эквивалентности двух пар матриц (см. введение), которое впервые было использовано А.С. Рапинчуком и авторами при описании многообразий представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых поверхностей (см. [5]). Так как наши рассуждения в целом аналогичны рассуждениям для случая ориентируемых поверхностей, то мы приведем лишь схему доказательства свойства $\mathbb{Q}$-унирациональности $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$, опуская доказательства технических утверждений. Все недостающие детали могут быть найдены в работе [5].

Идея доказательства состоит в следующем. Из доказательства теоремы 3.2 следует, что $R(\Gamma_g, \mathrm{SL}_n(K))$ бирегулярно изоморфно многообразию

$$S = \bigl\{(V_1, \ldots, V_g) \in \mathrm{SL}_n(K)^g \mid [V_1, V_2] V_3^2 \cdots V_g^2 = 1\bigr\}.$$

Согласно результату Томсона (см. [11]) любая нецентральная матрица $Z \in \mathrm{SL}_n(K)$ является коммутатором двух матриц $X, Y \in \mathrm{SL}_n(K)$. Поэтому морфизм проектирования на последние $(g-2)$ компоненты

$$\pi \colon S \to \mathrm{SL}_n(K)^{g-2}, \qquad (V_1, V_2, \ldots, V_g) \mapsto (V_3, \ldots, V_g),$$

доминантен, и тем самым достаточно установить L-унирациональность слоя $\pi^{-1}(\alpha)$, где α – общая точка многообразия $\mathrm{SL}_n(K)^{g-2}$, а $L = K(\alpha)$.

Предложение 4.3. *Существует $\mathbb{Q}$-определенное открытое подмножество $U \subset \mathrm{SL}_n(K)$ такое, что для любого расширения $L/\mathbb{Q}$ и любой точки $Z \in U(L)$ многообразие*

$$W_Z' = \bigl\{(X, Y) \in \mathrm{SL}_n(K) \times \mathrm{SL}_n(K) \mid [X, Y] = Z\bigr\}$$

(абсолютно) неприводимо и унирационально над L.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $(X, Y) \in W_Z'$ и покажем, что любая другая точка $(U, V) \in W_Z'$, находящаяся в "общем" положении, получается из (X, Y) при помощи некоторой естественной процедуры, которая может быть проинтерпретирована как движение вдоль унирационального подмногообразия. По техническим причинам удобнее определить и проанализировать эту процедуру вначале для элементов в $\mathrm{GL}_n(K)$.

Определение 4.1. Две пары матриц $a_i = (X_i, Y_i) \in \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K)$ $(i = 1, 2)$ будем называть *эквивалентными*, если $[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2]$ и либо $X_1 = X_2$, либо $Y_1 = Y_2$.

Это означает, что a_2 получается из a_1 при помощи единственного стандартного преобразования, под которым мы понимаем умножение справа произвольной компоненты элемента $a = (X, Y)$ на элемент из централизатора второй. Пусть $R \subset \mathrm{GL}_n(K)$ – множество регулярных полупростых элементов.

Определение 4.2. Будем говорить, что $a, b \in \mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K)$ (соответственно $a, b \in R \times R$) *цепно эквивалентны* (соответственно *строго цепно эквивалентны*), если существуют элементы $c_1, \dots, c_k$ в $\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K)$ (соответственно в $R \times R$) такие, что $c_1 = a$, $c_k = b$ и для любого $i = 1, \dots, n-1$ элементы c_i и c_{i+1} эквивалентны.

Таким образом, цепная эквивалентность пар означает, что одна из них получается из другой при помощи цепочки стандартных преобразований. Очевидно, что отношение цепной эквивалентности является отношением эквивалентности.

Из определения цепной эквивалентности следует, что для любых двух цепно эквивалентных пар $a_i = (X_i, Y_i)$ $(i = 1, 2)$ коммутаторы $[X_i, Y_i]$ совпадают. Естественно возникает обратный вопрос: означает ли факт совпадения коммутаторов $[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2]$, что a_1 и a_2 цепно эквивалентны? Мы сейчас покажем, что для двух пар a_1, a_2, находящихся в “общем” положении, ответ действительно положителен, и этот факт играет решающую роль при доказательстве предложения 4.3.

Теорема 4.1. *Существует открытое $\mathbb{Q}$-определенное множество $V \subset R^4$, обладающее следующим свойством: любые две пары $a_i = (X_i, Y_i) \in R^2$ $(i = 1, 2)$ строго цепно эквивалентны, если $[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2]$ и $(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \in V$.*

Доказательство. Зафиксируем целое число $t \geqslant 0$ и рассмотрим подмногообразие
$$X_t \subset R^2 \times \mathrm{GL}_n(K)^{2t},$$
состоящее из точек $(X, Y, A_1, \dots, A_t, B_1, \dots, B_t)$, удовлетворяющих следующим условиям:
$$[X, B_1] = 1, \quad [XA_1 \cdots A_i, B_{i+1}] = 1 \ \text{ для } \ i = 1, \dots, t-1,$$
$$[A_i, YB_1 \cdots B_i] = 1 \ \text{ и } \ XA_1, \dots, A_i, YB_1 \cdots B_i \in R \ \text{ для } \ i = 1, \dots, t.$$

Рассмотрим также морфизм $\varphi_t \colon X_t \to R^4$, задаваемый формулой
$$\varphi_t(X, Y, A_1, \dots, A_t, B_1, \dots, B_t) = (X, Y, XA_1 \cdots A_t, YB_1 \dots B_t).$$

Из определения φ_t следует, что если $(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \in \operatorname{Im} \varphi_t$, то пара (X_1, Y_1) может быть связана с (X_2, Y_2) при помощи следующей цепочки пар:
$$\dots, (XA_1 \cdots A_i, YB_1 \cdots B_i),\ (XA_1 \cdots A_i, YB_1 \cdots B_{i+1}),$$
$$(XA_1 \cdots A_{i+1}, YB_1 \cdots B_{i+1}), \dots .$$

Все пары в этой цепочке принадлежат R^2 и каждая следующая получается из предыдущей при помощи стандартного преобразования. Это означает, что (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) строго цепно эквивалентны и, в частности, $[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2]$. Положим

$$Y = \{(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \in R^4 \mid [X_1, Y_1] = [X_2, Y_2]\}.$$

Тогда $\varphi_t(X_t) \subset Y$ и чтобы доказать теорему 4.1, достаточно установить, что $\varphi_t(X_t)$ плотно в Y для некоторого целого числа t.

Лемма 4.3. *X_t и Y – неприводимые многообразия размерностей соответственно $2(n^2 + t)$ и $3n^2 + 1$.*

Доказательство см. в [5].

По теореме о размерности слоя морфизма плотность $\varphi_t(X_t)$ в Y эквивалентна тому, что для некоторого $d \in Y$ выполняется неравенство

$$\dim \varphi_t^{-1}(d) \leqslant \dim X_t - \dim Y = 2nt - n^2 - 1.$$

Для пары $(U, V) \in R^2$ положим

$$Z_t(U, V) = X_t \cap \bigl((U, V) \times \mathrm{GL}_n(K)^{2t}\bigr).$$

Лемма 4.4. 1) *$Z_t(U, V)$ – неприводимое многообразие размерности $2nt$.*

2) *Существует пара $(U_0, V_0) \in R^2$ такая, что для некоторого t выполняется неравенство $\dim \overline{\varphi_t(Z_t(U_0, V_0))} \geqslant n^2 + 1$.*

Используя лемму 4.4, легко завершить доказательство теоремы 4.1. Действительно, для любого $d \in \varphi_t(Z_t(U_0, V_0))$ имеем $\varphi_t^{-1}(d) \subset Z_t(U_0, V_0)$. Поэтому, используя значения размерностей из леммы 4.4, заключаем, что обязательно найдется точка $d \in \varphi_t(Z_t(U_0, V_0))$ такая, что

$$\dim \varphi_t^{-1}(d) = \dim Z_t(U_0, V_0) - \dim \overline{\varphi_t(Z_t(U_0, V_0))} \leqslant 2tn - n^2 - 1,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 4.4. Первое утверждение доказывается так же, как и лемма 4.3. Чтобы установить 2), рассмотрим матрицы

$$U_0 = \mathrm{diag}(1, \rho, \dots, \rho^{n-1}), \qquad V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ – примитивный корень из единицы степени n. Очевидно, что $(U_0, V_0) \in R$ и $[U_0, V_0] = \xi$, где $\xi = \mathrm{diag}(\rho, \dots, \rho)$. Рассмотрев композицию φ_t и проекции $Y \to \mathrm{GL}_n(K)^2$ на вторую пару компонент, получаем морфизм

$$\rho_t \colon Z_t(U, V) \to W_Z = \{(X, Y) \in \mathrm{GL}_n(K)^2 \mid [X, Y] = Z\},$$

где $Z=[U,V]$, и нам достаточно доказать, что для некоторого t

$$\dim \overline{\rho_t(Z_t(U_0,V_0))} \geqslant n^2+1.$$

Из наших определений вытекает, что

$$\cdots \subset \rho_t\bigl(Z_t(U_0,V_0)\bigr) \subset \rho_{t+1}\bigl(Z_{t+1}(U_0,V_0)\bigr) \subset \cdots .$$

Поэтому найдется t такое, что размерность многообразия $F=\overline{\rho_t(Z_t(U_0,V_0))}$ является максимально возможной. Тогда из предыдущей цепочки получаем, что $\rho_s(Z_s(U_0,V_0)) \subset F$ для всех целых s. Однако $\bigcup_{s\geqslant 0}\rho_s(Z_s(U_0,V_0))$ совпадает с классом эквивалентности $E=[(U_0,V_0)]$ относительно строгой цепной эквивалентности, и, следовательно, остается доказать, что $\dim\overline{E}\geqslant n^2+1$.

Так как ξ принадлежит центру $\mathrm{GL}_n(K)$, то последняя группа действует на W_ξ сопряжениями. Кроме того, очевидно, что для любых $(U,V)\in W_\xi$ и $g\in\mathrm{GL}_n(K)$ классы эквивалентности $g[(U,V)]$ и $[(gUg^{-1},gVg^{-1})]$ совпадают. Это означает, что E инвариантно относительно централизаторов $Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(U_0)$, $Z_{\mathrm{GL}_n(K)}(V_0)$ и, в частности, относительно подгруппы H, порожденной ими.

Лемма 4.5. $H=\mathrm{GL}_n(K)$.

Доказательство см. в [5].

Из леммы 4.5 следует, что образ морфизма

$$\delta\colon G_m\times G_m\times \mathrm{GL}_n(K)\to \mathrm{GL}_n(K)^2,\quad (\alpha,\beta,h)\mapsto \bigl(h(\alpha U_0)h^{-1},h(\beta V_0)h^{-1}\bigr)$$

содержится в E, и это завершает доказательство теоремы 4.1

Лемма 4.6. *Для любого $l=(\alpha,\beta,h)$ имеем $\dim\delta^{-1}(\delta(l))=1$.*

Доказательство см. в [5].

Продолжим доказательство предложения 4.3. Положим $R'=R\cap\mathrm{SL}_n(K)$ и для $(U,V)\in R'\times R'$ пусть

$$Z_t'(U,V)=Z_t(U,V)\cap\bigl((U,V)\times\mathrm{SL}_n(K)^{2t}\bigr).$$

Ограничение $\rho_t\big|_{Z_t'(U,V)}$ определяет морфизм

$$\rho_t'\colon Z_t'(U,V)\to W_Z'=W_Z\cap\mathrm{SL}_n(K)^2$$

и ρ_t' доминантен, если доминантен ρ_t (и W_Z' неприводимо).

Лемма 4.7. 1) *Для любого $t\geqslant 0$, любого расширения $L/\mathbb{Q}$ и любой пары $(U,V)\in R'(L)^2$ многообразие $Z_t'(U,V)$ неприводимо и L-унирационально.*

2) *Существует целое $t>0$ и $\mathbb{Q}$-определенное открытое множество $C'\subset R'\times R'$ такое, что для $(U,V)\in C'$ морфизм $\rho_t'\colon Z_t'(U,V)\to W_Z'$ доминантен.*

Доказательство. 2) немедленно следует из рассуждений выше. Для доказательства пункта 1) можно применить индукцию по t. Случай $t = 0$ очевиден. В общем случае введем промежуточное многообразие $M'_{t+1}(U,V)$, получаемое добавлением одной компоненты, и покажем, что на каждом шаге, т.е. при переходе от Z'_t к M'_{t+1} и от M'_{t+1} к Z'_{t+1}, мы получаем неприводимое L-унирациональное многообразие. Итак, пусть

$$M_{t+1}(U,V) = \big\{(U,V,A_1,\dots,A_t,B_1,\dots,B_{t+1}) \in Z'_t(U,V) \times \mathrm{GL}_n(K) \mid \\ [UA_1\cdots A_t, B_{t+1}] = 1,\ VB_1\cdots B_{t+1} \in R\big\}$$

и M'_{t+1} – подмногообразие M_{t+1}, определяемое условием $B_{t+1} \in \mathrm{SL}_n(K)$. Тогда, так же, как и в лемме 4.4, показывается, что M_{t+1} неприводимо. После этого, дословно повторяя рассуждения из леммы 4.2, легко убедиться, что и M'_{t+1} – неприводимое многообразие. Наконец, если $\omega = (U,V,A_1,\dots,A_t,B_1,\dots,B_t)$ – общая точка $Z'_t(U,V)$ над L и $L_1 = L(\omega)$, то $L(M'_{t+1}(U,V))$ можно отождествить с полем $L_1(T)$, где $L_1(T)$ – поле L_1-рациональных функций L_1-тора $T = Z_{\mathrm{SL}_n(L)}(UA_1\cdots A_t)$. Однако, каждый тор унирационален над своим полем определения (см. [12]), поэтому $L_1(T)$ унирационально над L_1. Применяя предположение индукции, окончательно получаем, что M'_{t+1} унирационально над L. Переход от M'_{t+1} к Z'_{t+1} осуществляется аналогичным образом. Лемма 4.7 доказана.

Лемма 4.7 означает, что для любой пары $(U,V) \in C'_L$ соответствующее коммутаторное многообразие W'_Z, где $Z = [U,V]$, L-унирационально. Поэтому чтобы завершить доказательство предложения 4.3, нам достаточно показать, что существует $\mathbb{Q}$-определенное открытое множество $P \subset \mathrm{SL}_n(K)$ такое, что для любого $Z \in P(L)$ многообразие W'_Z содержит точку $(U,V) \in C'_L$. Последнее непосредственно следует из следующего утверждения, представляющего независимый интерес.

Предложение 4.4. *Пусть $D \subset \mathrm{SL}_n(K)^2$ – $\mathbb{Q}$-определенное открытое множество. Тогда существует $\mathbb{Q}$-определенное рациональное отображение $\theta\colon \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{SL}_n(K)^2$ такое, что для любого Z из области определения θ имеем $\theta(Z) \in W'_Z$ и $\operatorname{Im}\theta \cap D \neq \varnothing$.*

Доказательство см. в [5].

§ 5. Многообразия характеров

Теорема 5.1. *Число неприводимых компонент многообразия характеров $X_n(\Gamma_g)$ равно:*

а) $n+1$, *если* $g = 1$;
б) $(n^2+4n+4)/4$, *если* $g = 2$ *и* n *четно*;
в) $(n^2+4n+3)/4$, *если* $g = 2$ *и* n *нечетно*;
г) 3, *если* $g = 3$ *и* $n = 2$;
д) 2, *если* $g \geqslant 3$ *и пара* (n,g) *отлична от* $(2,3)$.

Доказательство. Рассмотрим канонический морфизм

$$\mu\colon R_n(\Gamma_g) \to X_n(\Gamma_g).$$

Из результатов §§ 2, 3 вытекает, что число $d = d(X_n(\Gamma_g))$, указанное в формулировке, во всех случаях а)–д) совпадает с числом неприводимых компонент многообразия представлений $R_n(\Gamma_g)$. Пусть $R_n(\Gamma_g) = V_1 \cup \dots \cup V_d$ – разложение на неприводимые компоненты. Поскольку μ – сюръективный морфизм, то $X_n(\Gamma_g) = \bigcup_{i=1}^d \mu(V_i)$, и тем самым достаточно установить, что $\overline{\mu(V_1)}, \dots, \overline{\mu(V_d)}$ – неприводимые компоненты $X_n(\Gamma_g)$, или, что эквивалентно, $\overline{\mu(V_i)} \neq \overline{\mu(V_j)}$ для $i \neq j$, ибо ниже будет проверено, что размерности $\overline{\mu(V_i)}$ и $\overline{\mu(V_j)}$ совпадают для всех $i, j = 1, \dots, d$. Положим $V_i' = \{\rho \in V_i \mid \rho \text{ вполне приводимо}\}$.

Предложение 5.1. *V_i' – непустое открытое множество для всех $i = 1, \dots, d$.*

Доказательство непосредственно следует из явного описания компонент V_i (см. теоремы 2.1, 2.2, 3.2, предложения 3.1, 3.4).

Нам понадобится также

Предложение 5.2. *Если $\rho, \rho' \in R_n(\Gamma_g)$ – вполне приводимые представления, то $\rho' \in \mu^{-1}(\mu(\rho))$ тогда и только тогда, когда ρ' принадлежит $\mathrm{GL}_n(K)$-орбите $\mathscr{O}(\rho)$.*

Доказательство см. в [2].

Используя предложения 5.1, 5.2, легко завершить доказательство теоремы 5.1. Действительно, если $\overline{\mu(V_i)} = \overline{\mu(V_j)}$, то найдутся вполне приводимые представления $\rho_i \in V_i \setminus V_j$, $\rho_j \in V_j \setminus V_i$, образы $\mu(\rho_i)$, $\mu(\rho_j)$ которых совпадают. Тогда в силу предложения 5.2 ρ_j лежит в $\mathrm{GL}_n(K)$-орбите $\mathscr{O}(\rho_i)$. С другой стороны, по лемме 1.6 каждая компонента V_i замкнута относительно сопряжения и, следовательно, замкнуты относительно сопряжения $V_i \setminus V_j$, $V_j \setminus V_i$. Это означает, что орбиты $\mathscr{O}(\rho_i)$, $\mathscr{O}(\rho_j)$ не пересекаются – противоречие, доказывающее теорему 5.1.

Предложение 5.3. *Все компоненты многообразия характеров $X_n(\Gamma_g)$ являются $\mathbb{Q}$-унирациональными многообразиями размерности*

а) 0, *если* $g = 1$;
б) n, *если* $g = 2$;
в) $n^2(g-2)+1$, *если* $g \geqslant 3$.

Доказательство. Свойство $\mathbb{Q}$-унирациональности вытекает из $\mathbb{Q}$-рациональности неприводимых компонент V_i многообразия представлений $R_n(\Gamma_g)$. Далее, по теореме о размерности слоя $\dim \overline{\mu(V_i)} = \dim V_i - \dim \mathscr{O}(\rho)$, где $\rho \in V_i$ – точка "общего" положения. В свою очередь $\dim \mathscr{O}(\rho) = n^2 - \dim \mathrm{St}(\rho)$, где $\mathrm{St}(\rho)$ – стабилизатор ρ. В случае $g = 1$ из теоремы 2.1 следует, что $V_i = \mathscr{O}(\rho)$, и поэтому $\dim \overline{\mu(V_i)} = 0$.

Пусть $g = 2$. В качестве ρ рассмотрим представление $\rho = (X, Y) \in V_{s,t}$, где

$$X = \mathrm{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, c_1, \dots, c_t, d_1, \dots, d_{n-2s-t}),$$
$$Y = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1^2 - b_1^2 & -b_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_s & 1 \\ a_s^2 - b_s^2 & -b_s \end{pmatrix}, -c_1, \dots, -c_t, d_1, \dots, d_{n-2s-t}\right)$$

и $V_{s,t}$ – компонента многообразия $R_n(\Gamma_2)$ (см. теорему 2.2). Если X – регулярная матрица, то непосредственно проверяется, что

$$\mathrm{St}(\rho) = \bigl\{\mathrm{diag}(u_1, u_1, \ldots, u_s, u_s, u_{s+1}, \ldots, u_{n-s}) \mid u_i \in K^*\bigr\},$$

откуда $\dim \overline{\mathscr{O}(\rho)} = n^2 - n - s$. Так как $\dim V_{s,t} = n^2 + s$, то окончательно получаем, что $\dim \overline{\mu(V_{s,t})} = n$.

Наконец, пусть $g \geqslant 3$. В этом случае $R_n(\Gamma_g)$ состоит из двух компонент W_1, W_2 (теорема 3.2), если $(n, g) \neq (2, 3)$, и из трех компонент S_1, S_2, V (предложение 3.4), если $(n, g) = (2, 3)$. Согласно предложению 3.1 компоненты W_1, W_2, S_1, S_2 содержат неприводимые представления, и непосредственно проверяется, что и V обладает этим же свойством. Поэтому во всех случаях $\dim \mathscr{O}(\rho) = n^2 - 1$ и, следовательно, $\dim \overline{\mu(V_i)} = n^2(g-1) - n^2 + 1 = n^2(g-2) + 1$. Предложение 5.3 доказано.

Для малых значений n и g мы можем усилить утверждение предложения 5.3.

Предложение 5.4. *Неприводимые компоненты многообразия характеров $X_n(\Gamma_g)$ являются $\mathbb{Q}$-рациональными многообразиями в следующих случаях*:

1) $g = 2$ *и* n *произвольное*;
2) $g \geqslant 4$ *и* $n \leqslant 3$;
3) $g = 3$, $n = 2$.

Доказательство. 1) Для рода $g = 2$ можно рассуждать так же, как и в теореме 2.3. А именно, рассмотрим n-мерное $\mathbb{Q}$-рациональное подмногообразие $U \subset V_{s,t}$, состоящее из всех пар (X, Y) вида

$$X = \mathrm{diag}(a_1, -a_1, \ldots, a_s, -a_s, c_1, \ldots, c_t, d_1, \ldots, d_{n-2s-t}),$$
$$Y = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ a_1^2 - b_1^2 & -b_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_s & 1 \\ a_s^2 - b_s^2 & -b_s \end{pmatrix}, -c_1, \ldots, -c_t, d_1, \ldots, d_{n-2s-t}\right).$$

Зададим действие конечной группы $G = S_s \times S_t \times S_{n-2s-t} \times \prod_{i=1}^{s} H_i$, где $H_i = \langle \sigma_i \mid \sigma_i^2 = 1\rangle$, на многообразии U: элементы симметрических групп S_t, S_{n-2s-t} действуют перестановками соответственно на множествах $\{c_1, \ldots, c_t\}$, $\{d_1, \ldots, d_{n-2s-t}\}$, а элементы группы S_s – на множествах $\{a_1, \ldots, a_s\}$, $\{b_1, \ldots, b_s\}$; образующая σ_i группы H_i переводит a_i, b_i соответственно в $-a_i$, $-b_i$ и оставляет неподвижными остальные переменные.

Непосредственно проверяется, что два элемента "общего" положения $u_1, u_2 \in U$ переходят при канонической проекции $\mu\colon R_n(\Gamma_2) \to X_n(\Gamma_2)$ в один элемент тогда и только тогда, когда u_2 лежит в G-орбите элемента u_1. Это означает, что поле $\mathbb{Q}\bigl(\overline{\mu(V_{s,t})}\bigr)$ изоморфно полю инвариантов

$$\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t, d_1, \ldots, d_{n-2s-t})^G.$$

Ясно, что последнее поле совпадает с композитом полей

$$K_1 = \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s)^{S_s \times \prod_{i=1}^{s} H_i},$$
$$K_2 = \mathbb{Q}(c_1, \ldots, c_t)^{S_t},$$
$$K_3 = \mathbb{Q}(d_1, \ldots, d_{n-2s-t})^{S_{n-2s-t}},$$

и что два последних поля являются чисто трансцендентными расширениями $\mathbb{Q}$. Кроме того,

$$K_1 = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_s)^{S_s \times \prod_{i=1}^s H_i} = \mathbb{Q}(a_1^2, \dots, a_s^2, a_1 b_1, \dots, a_s b_s)^{S_s}.$$

Положим $L = \mathbb{Q}(a_1^2, \dots, a_s^2)$, $E = L^{S_s}$. Ясно, что E – чисто трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}$; отсюда в силу леммы 2.6 K_1 также является чисто трансцендентным расширением $\mathbb{Q}$.

2) Пусть $g \geqslant 4$, $n \leqslant 3$. Группа Γ_g имеет представление вида (см. § 3)

$$\Gamma_g = \langle x_1, \dots, x_g \mid [x_1, x_2] = x_3^2 \cdots x_g^2 \rangle.$$

Согласно теореме 3.2 многообразие представлений $R_n(\Gamma_g)$ состоит из двух неприводимых компонент

$$W_i = \bigl\{(X_1, \dots, X_g) \in \mathrm{GL}_n(K)^g \mid [X_1, X_2] = X_3^2 \cdots X_g^2,\ \det(X_3 \cdots X_g) = (-1)^{i-1}\bigr\}, \qquad i = 1, 2.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\ \mu\ } & \mu(W_1) \subset X_n(\Gamma_g) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \mathrm{GL}_n(K)^{g-3} \times \mathrm{SL}_n(K) & \xrightarrow{\ \tau\ } & Y, \end{array} \tag{5.1}$$

где Y – категорный фактор $[\mathrm{GL}_n(K)^{g-3} \times \mathrm{SL}_n(K)]/\mathrm{GL}_n(K)$ (относительно естественного действия $\mathrm{GL}_n(K)$ на $\mathrm{GL}_n(K)^{g-3} \times \mathrm{SL}_n(K)$), τ, μ – канонические проекции, $\varphi(X_1, \dots, X_g) = (X_3, \dots, X_{g-1}, X_3 \cdots X_g)$, а δ – морфизм, соответствующий φ (отметим, что существование δ вытекает из GL_n-эквивариантности φ, μ, τ).

Пусть ξ – общая точка многообразия Y над $\mathbb{Q}$, так что поле $L = \mathbb{Q}(\xi)$ совпадает с $\mathbb{Q}(Y)$. Положим $Z = \delta^{-1}(\xi)$ – общий слой δ. Тогда поле $\mathbb{Q}(\mu(W_1))$ отождествляется с $L(Z)$ и наша цель – показать, что при $n \leqslant 3$ Z и Y являются рациональными многообразиями соответственно над L и $\mathbb{Q}$.

Пусть $\eta \in \tau^{-1}(\xi)$ и $M = \varphi^{-1}(\mu)$. Очевидно, что η и M определены над некоторым конечным расширением поля L. Утверждается, что μ индуцирует биекцию (и, следовательно, $\overline{L}$-определенный бирациональный изоморфизм) между M и Z (отметим, что в случае $g = 3$ морфизм μ индуцирует сюръективное, но не инъективное отображение между M и Z).

Действительно, легко видеть, что компоненты $\eta \in \mathrm{GL}_n(\overline{L})^{g-3} \times \mathrm{SL}_n(\overline{L})$ порождают над $\overline{L}$ всю матричную алгебру $M_n(\overline{L})$. Тогда для любого $m \in M$ соответствующее представление группы Γ_g неприводимо, и поэтому если $\sigma(m_1) = \sigma(m_2)$ для $m_1, m_2 \in M$, то из предложения 5.2 следует, что m_1, m_2 определяют эквивалентные представления, т.е. $m_2 = (\mathrm{Int}\, g)m_1$ для некоторого $g \in \mathrm{GL}_n(\overline{L})$. Применяя φ, получаем равенство $\eta = (\mathrm{Int}\, g)\eta$, откуда следует, что g – скалярная матрица, т.е. $m_2 = m_1$, что и требовалось показать.

Последнее означает, что Z бирационально $\overline{L}$-изоморфно коммутаторному многообразию

$$W_b = \bigl\{(X, Y) \in \mathrm{GL}_n(\overline{L}) \mid [X, Y] = b\bigr\},$$

где

$$b=\eta_1^2\cdots\eta_{g-3}^2(\eta_{g-3}^{-1}\cdots\eta_1^{-1}\eta_{g-2})^2$$

(здесь η_i – компоненты точки $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_{g-3},\eta_{g-2})$), и, следовательно, рационально по меньшей мере над $\overline{L}$ (см. [5]).

Однако мы стремимся доказать L-рациональность Z, поэтому нам надо перейти к скручиванию Галуа над L. Так как точка ξ определена над L, то для любого $\theta\in\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ имеем $\tau(\theta(\eta))=\tau(\eta)$, откуда $\theta(\eta)=\mathrm{Int}(a_\theta)(\eta)$ для некоторого единственным образом определенного $a_\theta\in\mathrm{PSL}_n(\overline{L})$. Семейство $a=\{a_\theta\}$ определяет коцикл в $Z^1(L,\mathrm{PSL}_n)$, поэтому мы можем рассмотреть скрученную группу $H={}^a\,\mathrm{GL}_n$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} {}^aW_1 \arrow[r, "\widetilde{\mu}"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & {}^a\mu(W_1)=\mu(W_1) \arrow[d, "\widetilde{\delta}=\delta"] \\ H^{g-3}\times{}^a\mathrm{SL}_n \arrow[r, "\widetilde{\tau}"] & {}^aY=Y, \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

которая получается из (5.1) при помощи операции скручивания (заметим, что скручивая внутренними автоморфизмами, мы не изменяем соответствующие категорные факторы).

Тогда η соответствует L-определенной точке (обозначаемой той же буквой), лежащей в $\widetilde{\tau}^{-1}(\xi)$, и те же аргументы, что и выше, показывают, что слой $\delta^{-1}(\xi)=\widetilde{\delta}^{-1}(\xi)$ бирационально L-изоморфен слою $\widetilde{\varphi}^{-1}(\eta)$.

С другой стороны, $\widetilde{\varphi}^{-1}(\eta)$ совпадает с коммутаторным многообразием

$$\widetilde{W}_b=\bigl\{(X,Y)\in H\times H\mid [X,Y]=b\bigr\}$$

с тем же самым b, что и выше. Далее, хорошо известно, что $H={}^a\ \mathrm{GL}_n$ является группой вида $\mathrm{GL}_1(D)$ для некоторой простой центральной алгебры D над L размерности n^2; поэтому остается лишь показать, что для $n\leqslant 3$ существует L-открытое множество $U\subset{}^a\mathrm{SL}_n=\mathrm{SL}_1(D)$ со следующим свойством: для любого расширения E/L и любого $z\in U(E)$ коммутаторное многообразие $\widetilde{W}_z$ рационально над E.

С этой целью введем регулярные функции $\widetilde{\sigma}_1,\dots,\widetilde{\sigma}_n$ на D, которые аналогичны функциям $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ из §3, и для $z\in\mathrm{SL}_1(D)$ определим многообразие

$$\widetilde{T}_z=\bigl\{y\in H\mid \widetilde{\sigma}_i(y)=\widetilde{\sigma}_i(zy),\ i=1,\dots,n-1\bigr\}.$$

Хорошо известно, что $\widetilde{\sigma}_1,\dots,\widetilde{\sigma}_n$ – регулярные функции на D, удовлетворяющие свойствам:

(i) $\widetilde{\sigma}_i$ задается однородным L-определенным полиномом степени i;

(ii) если C – алгебраически замкнутое поле, содержащее L, и $\chi\colon D\otimes_L C\to M_n(C)$ – изоморфизм C-алгебр (который всегда существует, см. [13]), то $\widetilde{\sigma}_i(d)=\sigma_i(\chi(d))$ для всех $d\in D$.

Покажем, что если $z \in \mathrm{SL}_1(D)$ – точка "общего" положения, то многообразие $\widetilde{T}_z$ неприводимо и рационально над L при $n \leqslant 3$. Действительно, если $n = 2$, то $\widetilde{T}_z$ определяется одним линейным уравнением, и поэтому доказывать нечего. При $n = 3$ мы имеем два уравнения: одно из них линейное, а второе – квадратичное. Выражая одну из переменных в линейном уравнении через остальные и подставляя полученное выражение во второе, получаем, что $\widetilde{T}_z$ изоморфно над L квадрике, и чтобы установить L-рациональность $\widetilde{T}_z$, достаточно показать, что эта квадрика обладает L-рациональными точками.

Пусть $F \subset D$ – максимальное подполе и C – алгебраически замкнутое поле, содержащее M. Так как F расщепляет D, то изоморфизм в (ii) может быть найден над F. Тогда $\widetilde{T}_z$ над F изоморфно многообразию

$$T_{\chi(z)} = \bigl\{y \in \mathrm{GL}_n(C) \mid \sigma_i(y) = \sigma_i(\chi(z)y),\ i = 1, \dots, n-1\bigr\}.$$

Ввиду теоремы Томпсона (см. [11]) $W_{\chi(z)}(F) \neq \varnothing$, откуда $T_{\chi(z)}(F) \neq \varnothing$ и, следовательно, $\widetilde{T}_z(F) \neq \varnothing$. Это означает, что квадратичное уравнение, определяющее $\widetilde{T}_z$, имеет рациональную точку над расширением F поля L степени 3. Но тогда по теореме Спрингера (см. [14]) $\widetilde{T}_z(L) \neq \varnothing$, что и требовалось установить.

Теперь уже легко завершить доказательство рациональности коммутаторного многообразия $\widetilde{W}_z$. А именно, для фиксированного $z \in \mathrm{SL}_1(D)$ рассмотрим естественное доминантное отображение

$$\nu\colon \widetilde{W}_z \to \widetilde{T}_z, \qquad (x, y) \mapsto y.$$

Очевидно, что слой $\nu^{-1}(y)$ задается уравнением $xy = (zy)x$, которое сводится к системе линейных уравнений относительно координат точки $x \in D$ в произвольном базисе D над L; в частности, если $\nu^{-1}(y) \neq \varnothing$, то $\nu^{-1}(y)$ – рациональное многообразие над $L(z, y)$. Беря в качестве y общую точку многообразия $\widetilde{T}_z$, отсюда с учетом неприводимости $\widetilde{W}_z$ и непустоты $\nu^{-1}(y)$ (см. [5]) получаем рациональность $\widetilde{W}_z$.

Итак, проверено, что при $n \leqslant 3$ многообразие Z является рациональным над L. Перейдем к Y. Многообразие $\mathrm{GL}_n(K)^{g-3} \times \mathrm{SL}_n(K)$ выделяется в $\mathrm{GL}_n(K)^{g-3} \times \mathrm{GL}_n(K)$ уравнением $\det(X_{g-2}) = 1$. В силу результатов Прочези и Форманека (см. [15], [16]) категорный фактор $\mathrm{GL}_n(K)^{g-2}/\mathrm{GL}_n(K)$ является $\mathbb{Q}$-рациональным многообразием, и кроме того, в базис трансцендентности поля $\mathbb{Q}(\mathrm{GL}_n(K)^{g-2}/\mathrm{GL}_n(K))$ над $\mathbb{Q}$ можно включить функцию $\det(X_{g-2})$. Последнее означает, что Y также рационально над $\mathbb{Q}$.

Рассуждения для компоненты W_2 аналогичны и поэтому будут опущены.

3) В обозначениях предложения 3.4 имеются три неприводимые компоненты S_1, S_2, V многообразия $R_2(\Gamma_3)$. Доказательство $\mathbb{Q}$-рациональности их категорных факторов чисто вычислительное.

V совпадает с замыканием множества

$$\left\{X \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} X^{-1}, Y \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} Y^{-1}, Z \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix} Z^{-1} \;\middle|\; a, b \in K^*,\ X, Y, Z \in \mathrm{GL}_2(K)\right\}.$$

Положим
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 1 \\ c & -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ y & -d \end{pmatrix} \right\} \subset V,$$
где $y = \dfrac{a^2(b^2+c)-d^2}{e}$, и пусть $\mu\colon U \to V/\mathrm{GL}_2(K)$ – каноническая проекция. Прямыми вычислениями легко убедиться, что образы двух различных точек в "общем" положении
$$u_1 = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 1 \\ c & -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ y & -d \end{pmatrix} \right),$$
$$u_2 = \left(\begin{pmatrix} \tilde a & 0 \\ 0 & -\tilde a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde b & 1 \\ \tilde c & -\tilde b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde d & \tilde e \\ \widetilde y & -\widetilde d \end{pmatrix} \right)$$
совпадают тогда и только тогда, когда
$$\tilde a = -a, \quad \tilde b = -b, \quad \tilde d = -d, \quad \tilde c = c, \quad \tilde e = \frac{a^2(b^2+c)-d^2}{ce}.$$

Принимая во внимание равенство $\dim U = \dim V/\mathrm{GL}_2(K)$, отсюда получаем, что поле $\mathbb{Q}(V/\mathrm{GL}_2(K))$ отождествляется с подполем инвариантов поля $\mathbb{Q}(a,b,c,d,e)$ относительно автоморфизма φ второго порядка, переводящего a, b, c, d, e соответственно в $-a$, $-b$, c, $-d$, $(a^2(b^2+c)-d^2)/(ce)$ (здесь a, b, c, d, e – алгебраически независимые над $\mathbb{Q}$ переменные).

Рассмотрим рациональные функции
$$\overline{a} = a\left(e - \frac{a^2(b^2+c)-d^2}{ce}\right), \qquad \overline{b} = b\left(e - \frac{a^2(b^2+c)-d^2}{ce}\right), \qquad \overline{c} = c,$$
$$\overline{d} = d\left(e - \frac{a^2(b^2+c)-d^2}{ce}\right), \qquad \overline{e} = e + \frac{a^2(b^2+c)-d^2}{ce}.$$

Очевидно, что $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}$ инвариантны относительно φ и порождают подполе степени 2; последнее в точности и означает, что $\mathbb{Q}(V/\mathrm{GL}_2(K))$ – чисто трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}$.

Докажем в заключение $\mathbb{Q}$-рациональность категорного фактора $S_1/\mathrm{GL}_2(K)$ ($\mathbb{Q}$-рациональность $S_2/\mathrm{GL}_2(K)$ устанавливается аналогично). В § 3 нами установлено, что морфизм
$$\psi\colon S_1 \to \mathbb{A}^1 \times \mathrm{GL}_2(K)^2, \qquad (X,Y,Z) \mapsto (\operatorname{tr} X, Y, Z),$$
является бирациональным изоморфизмом между S_1 и гиперповерхностью $W \subset \mathbb{A}^1 \times \mathrm{GL}_2(K)^2$, задаваемой уравнением
$$t^2 - \operatorname{tr}(Y^2Z^2) - 2\det(YZ) = 0. \tag{5.3}$$

Задав действие $\mathrm{GL}_2(K)$ на W посредством $A \cdot (t,Y,Z) = (t, AYA^{-1}, AZA^{-1})$, мы видим, что ψ является GL_2-эквивариантным изоморфизмом, и поэтому $S_1/\mathrm{GL}_2(K)$ бирационально изоморфно $W/\mathrm{GL}_2(K)$ – гиперповерхности в

$\mathbb{A}^1 \times (\mathrm{GL}_2(K)^2/\mathrm{GL}_2(K))$, задаваемой (5.3). Из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что

$$\operatorname{tr}(Y^2Z^2) = \operatorname{tr} Y \operatorname{tr} Z \operatorname{tr}(YZ) - (\operatorname{tr} Y)^2 \det Z - (\operatorname{tr} Z)^2 \det Y + 2\det(YZ). \tag{5.4}$$

Используя (5.4), запишем (5.3) в виде

$$t^2 - \operatorname{tr} Y \operatorname{tr} Z \operatorname{tr}(YZ) + (\operatorname{tr} Y)^2 \det Z + (\operatorname{tr} Z)^2 \det Y + 2\det Y \det Z = 0. \tag{5.5}$$

Поскольку

$$\mathbb{Q}\big(\mathrm{GL}_2(K)^2/\mathrm{GL}_2(K)\big) = \mathbb{Q}\big(\operatorname{tr} Y, \det Y, \operatorname{tr} Z, \det Z, \operatorname{tr}(YZ)\big)$$

(см. [16]) и $\operatorname{tr}(YZ)$ линейно входит в (5.5), то

$$\mathbb{Q}(W/G) = \mathbb{Q}(t, \operatorname{tr} Y, \det Y, \operatorname{tr} Z, \det Z),$$

что и завершает доказательство $\mathbb{Q}$-рациональности $S_1/\mathrm{GL}_2(K)$. Предложение 5.4 доказано.

Замечание. Это рассуждение не проходит в случае представлений степени $\geqslant 3$, поскольку даже при $n = 3$ в уравнение гиперповерхности $W/\mathrm{GL}_3(K)$ все функции из базиса трансцендентности поля $\mathbb{Q}(\mathrm{GL}_3(K)^2/\mathrm{GL}_3(K))$ (см. [16]) входят нелинейно.

Список литературы

1. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1979.
2. *Lubotzky A., Magid A.* Varieties of representations of finitely generated groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. V. 58. P. 1–116.
3. *Rudnick Z.* Representation varieties of solvable groups // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 45. P. 261–272.
4. *Goldman W.* Topological components of spaces of representations // Invent. Math. 1988. V. 93. P. 557–607.
5. *Rapinchuk A. S., Benyash-Krivetz V. V., Chernousov V. I.* Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces // Israel J. Math. 1996. V. 93. P. 29–71.
6. *Simpson C. T.* Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety, I // Publ. Math. I. H. E. S. 1994. V. 79. P. 47–129; II // Publ. Math. I. H. E. S. 1994. V. 80. P. 5–79.
7. *Спрингер Т. А., Стейнберг Р.* Классы сопряженных элементов // Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С. 162–262.
8. *Djoković D. Ž.* Cosets of centralizers in the general linear groups contain regular elements // Proceedings of the Eighth Haifa Matrix Theory Conference. Haifa. June 7–10, 1993.
9. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
10. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
11. *Thompson R. C.* Commutators in the special and general linear groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. №3. P. 16–33.
12. *Борель А.* Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
13. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
14. *Lam T. Y.* The algebraic theory of quadratic forms. Reading: Addison Wesley–Benjamin, 1973.

15. *Procesi C.* Non-commutative affine rings // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. Ia (8). 1967. V. 6. P. 239–255.
16. *Formanek E.* The center of the ring of 3 by 3 generic matrices // Linear and Multilinear Algebra. 1979. V. 7. P. 203–212.

Институт математики АН Беларуси, Минск
E-mail: `imanb%imanb.belpak.minsk.by@demos.su`

Поступила в редакцию
09.04.1996