Точная оценка граничного поведения функций из классов Харди–Соболева в критическом случае // Матем.заметки. 1997. Т. 62, № 4. С. 527–539.

В. Г. Кротов

Аннотация

В критическом случае $\alpha p = n$ функции из пространств Харди–Соболева $H^p_\alpha(B^n)$ почти всюду на границе имеют предел вдоль некоторых областей экспоненциального контакта с границей. В работе доказано, что максимальный оператор, соответствующий этим областям, ограничен как оператор из $H^p_\alpha(B^n)$ в $L^p(\partial B^n)$.

Библиография: 10 названий.

1 Введение.

Целью настоящей работы является доказательство неравенства

$$\|E_a f\|_p \le c\|f\|_{H^p_\alpha(B^n)}, \qquad \frac{n}{\alpha} = p > 1, \tag{1}$$

для функций из классов Харди–Соболева. Здесь

$$E_a f(\zeta) = \sup\left\{|f(r\eta)| : |1 - \langle\zeta, \eta\rangle| < a\left(\ln\frac{e}{1-r}\right)^{-(p-1)/n}\right\}. \tag{2}$$

Приведем сначала необходимые определения и изложим историю вопроса.

Пусть B^n – единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \ge 1$. Класс Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, состоит из голоморфных в B^n функций f, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H^p(B^n)} = \sup_{0\le r<1} \|f_r\|_p.$$

Здесь $f_r(z) = f(rz)$,

$$\|g\|_p = \left(\int_S |g(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{1/p},$$

σ – поверхностная мера на границе шара $S = \partial B^n$, нормированная условием $\sigma(S) = 1$.

В терминах однородных разложений голоморфных функций [1], с. 27

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z), \qquad f_m(\lambda z) = \lambda^m f_m(z),$$

определим операторы дробного интегрирования

$$R_\alpha f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{\alpha-1} f(sz) \, ds$$

(см., например, [2], [3]) и классы Харди–Соболева

$$H^p_\alpha(B^n) = R_\alpha\big(H^p(B^n)\big)$$

с естественной нормировкой: если $f \in H^p_\alpha(B^n)$ и $f = R_\alpha g$, то

$$\|f\|_{H^p_\alpha(B^n)} = \|g\|_{H^p(B^n)}.$$

На сфере S имеется естественная квазиметрика [1], с. 72

$$d(\zeta, \eta) = |1 - \langle \zeta, \eta \rangle|, \tag{3}$$

где

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$$

для $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. С помощью квазиметрики d вводим области подхода к границе (допустимые области Кораньи)

$$D_a(\zeta) = \{ r\eta : d(\zeta, \eta) < a(1-r),\ 0 \le r < 1,\ \eta \in S \},$$

где $a > 0$, $\zeta \in S$. С этими областями естественным образом связывается понятие D_a-предела (см., например, [1], с. 79). Каждая функция $f \in H^p(B^n)$, $p > 0$, почти всюду на S имеет D_a-предел при каждом $a > 0$ (см., например, [1], с. 94). Кроме этого,

$$\|N_a f\|_p \le c \|f\|_{H^p(B^n)},$$

где
$$N_a f(\zeta) = \sup\{|f(z)| : z \in D_a(\zeta)\}$$
и $c > 0$ не зависит от f. Здесь и всюду дальше через c мы обозначаем различные положительные постоянные (различные в разных случаях), зависящие, возможно, от некоторых параметров.

Рассмотрим граничное поведение функций из классов Харди–Соболева $H^p_\alpha(B^n)$. Пусть $0 < \varepsilon \le 1$, $a > 0$ и

$$D^*_\varepsilon(\zeta) = \{r\eta : d(\zeta, \eta) < a(1-r)^\varepsilon\}, \qquad \zeta \in S,$$
$$N^*_\varepsilon f(\zeta) = \sup\{|f(z)| : z \in D^*_\varepsilon(\zeta)\}$$

(зависимость от a здесь не имеет большого значения, и мы не отражаем ее в обозначениях).

Теорема 1 *Пусть $0 < p < n/\alpha$. Тогда каждая функция $f \in H^p_\alpha(B^n)$ почти всюду на S имеет D^*_ε-предел, где $\varepsilon = 1 - (\alpha p)/n$, и*

$$\|N^*_\varepsilon f\|_p \le c\|f\|_{H^p_\alpha(B^n)}, \tag{4}$$

где c не зависит от f.

В случае $n = 1$ и $p > 1$ это утверждение доказали А. Нагель, У. Рудин и Дж. Шапиро [4]. В работе автора [5] было получено неравенство слабого типа

$$\sigma\{N^*_\varepsilon f > \lambda\} \le c\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{H^p_\alpha(B^n)}\right)^p, \qquad \lambda > 0,$$

(c не зависит от f и λ), из которого следует часть теоремы 1, относящаяся к сходимости почти всюду. Неравенство 4 было доказано в другой работе автора [3], а также в [6].

Если $p > n/\alpha$, то, как нетрудно убедиться, функции из $H^p_\alpha(B^n)$ непрерывно продолжаются на S.

Переходим к рассмотрению критического случая $\alpha p = n$. Если $n/\alpha = p \le 1$, то
$$H^p_\alpha(B^n) \hookrightarrow A(B^n)$$
($A(B^n)$ – алгебра голоморфных в B^n функций, непрерывно продолжимых на S). Это вложение при $p = 1$ получено в [7], а при $0 < p \le 1$ – в [5], [8].

Если $n/\alpha = p > 1$, то каждая функция $f \in H^p_\alpha(B^n)$ почти всюду на S имеет предел вдоль областей

$$\Omega_a(\zeta) = \left\{ r\eta : d(\zeta,\eta) < a\left(\ln\frac{e}{1-r}\right)^{-(p-1)/n} \right\}, \qquad \zeta \in S.$$

В одномерном случае это доказано в [4], а для любого n – в работе автора [5]. Кроме того, для $n = 1$ в [4] было доказано неравенство 1, а в [5] – неравенство слабого типа

$$\sigma\{E_a f > \lambda\} \leq c\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{H^p_\alpha(B^n)}\right)^p, \qquad \lambda > 0, \tag{5}$$

при любом $n \geq 1$ (c не зависит от f и λ). Оставался открытым вопрос: имеет ли место неравенство 1 при всех $n \geq 1$? Положительный ответ на этот вопрос был дан в работе [8]. Именно, справедлива

Теорема 2 *Пусть $n/\alpha = p > 1$. Тогда каждая функция $f \in H^p_\alpha(B^n)$ почти всюду на S имеет Ω_a-предел. Более того, справедливо неравенство 1, где c не зависит от f.*

Неравенство 1, а также его обобщение на некоторые более широкие классы функций, будет доказано в п. 3. В п. 3 будет показано также, что области $\Omega_a(\zeta)$ в теореме 2 выбраны оптимальным образом – их нельзя существенно расширить. Доказательство неравенства 1 будет опираться на серию вспомогательных утверждений, которые изложены в п. 2. Наши рассуждения следуют схеме работы [4] и основаны на неравенстве 5 (точнее, на некотором поточечном неравенстве для максимального оператора $E_a f$, из которого следует 5), а также на новой экстремальной конструкции продолжения функций с границы шара S на его внутренность.

2 Вспомогательные утверждения.

Всюду в этом пункте $\delta_r = 1 - r$, где $r \in [0, 1)$.

Неизотропная квазиметрика 3 на сфере S порождает семейство шаров

$$B(\zeta, t) = \{\eta \in S : d(\zeta,\eta) < t\}, \qquad \zeta \in S, \quad t > 0.$$

С помощью этих шаров вводится максимальная функция Харди–Литтлвуда (см., например, [1], с. 76)

$$Mh(\zeta) = \sup \frac{1}{\sigma(B)} \int_B |h|\, d\sigma, \tag{6}$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(\eta, t)$, содержащим точку ζ. Эта максимальная функция обладает обычными свойствами

$$\sigma\{Mh > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda}\|h\|_1, \qquad \lambda > 0, \tag{7}$$

$$\|Mh\|_p \leq c\|h\|_p, \qquad p > 1, \tag{8}$$

с постоянными c, на зависящими от h и λ (см. [1], с. 76).

Введем, далее, продолжение функций со сферы S в шар B^n, играющее важную роль в дальнейшем. Для функции $h\ B^n \to \mathbb{C}$ и $a > 0$ положим

$$\Pi_a h(r\zeta) = \inf\{|h(\eta)| : d(\zeta, \eta) < a(1-r)\}. \tag{9}$$

Необходимые нам свойства продолжения Π_a перечислены в следующем утверждении.

Лемма 1 *Пусть $h\ S \to \mathbb{C}$, $a > 0$. Тогда*
1) $\Pi_a h(r\zeta)$ не убывает вместе с $r \in [0,1)$ при любом $\zeta \in S$;
2) при всех $\zeta \in S$ и $b \in [0, a]$

$$N_b \Pi_a h(\zeta) = \min\Big\{|h(\zeta)|, \varliminf_{\eta \to \zeta} |h(\eta)|\Big\},$$

где $N_0 g(\zeta) = \sup_{0 \leq r < 1} |g(r\zeta)|$;
3) если $\lambda > 0$, то

$$\{z \in B^n : \Pi_a h(z) \geq \lambda\} = T_a(\{|h| \geq \lambda\}),$$

где

$$T_a(G) = B^n \setminus \bigcup_{\eta \notin G} D_a(\eta).$$

Доказательство. Свойство 1) непосредственно следует из определения 9. Отсюда

$$N_0 \Pi_a h(\zeta) = \sup_{0 \leq r < 1} \Pi_a h(r\zeta)$$

$$\lim_{t\to+0}\min\bigl\{|h(\zeta)|,\inf\{|h(\eta)|:0<d(\zeta,\eta)<t\}\bigr\}$$
$$=\min\Bigl\{|h(\zeta)|,\varliminf_{\eta\to\zeta}|h(\eta)|\Bigr\}. \qquad (10)$$

Далее, пусть $\zeta\in S$, а $r\in[0,1)$ и $\eta\in S$ таковы, что $r\eta\in D_a(\zeta)$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon>0$ шар $B(\zeta,\varepsilon)$ целиком содержится в шаре $B(\eta,a\delta_r)$. Следовательно,

$$\Pi_a h(r\eta)\le\inf\{|h(\xi)|:\xi\in B(\zeta,\varepsilon)\}$$
$$=\min\bigl\{|h(\zeta)|,\inf\{|h(\xi)|:0<d(\xi,\zeta)<\varepsilon\}\bigr\}$$
$$\le\min\Bigl\{|h(\zeta)|,\varliminf_{\xi\to\zeta}|h(\xi)|\Bigr\}. \qquad (11)$$

Переходя в 11 к точной верхней грани по всем $r\eta\in D_a(\zeta)$, получим

$$N_a\Pi_a h(\zeta)\le\min\Bigl\{|h(\zeta)|,\varliminf_{\eta\to\zeta}|h(\eta)|\Bigr\}.$$

Отсюда, из 10 и из очевидного неравенства $N_0\Pi_a h(\zeta)\le N_a\Pi_a h(\zeta)$ получаем утверждение 2) леммы.

Для доказательства 3) положим $G=\{|h|\ge\lambda\}$ и возьмем точку $r\zeta\in T_a(G)$, где $r\in[0,1)$, $\zeta\in S$. Тогда если $\eta\in B(\zeta,a\delta_r)$, то $r\zeta\in D_a(\eta)$. По определению $T_a(G)$ из $r\zeta\in D_a(\eta)$ и $r\zeta\in T_a(G)$ следует $\eta\in G$. Таким образом, $B(\zeta,a\delta_r)\subset G$ и $|h(\eta)|\ge\lambda$ при всех $\eta\in B(\zeta,a\delta_r)$. Следовательно, $\Pi_a h(r\zeta)\ge\lambda$. Обратно, если $z\notin T_a(G)$, то $z\in\bigcup_{\eta\notin G}D_a(\eta)$ и для некоторого $\eta\notin G$ выполнено $z\in D_a(\eta)$. Поэтому $\Pi_a h(z)\le h(\eta)<\lambda$. Утверждение 3) доказано.

Замечание. Из утверждения 3) леммы 1, в частности, следует, что продолжение $\Pi_a h$ измеримо в B^n.

Далее, из утверждения 2) леммы 1 вытекает, что если h – неотрицательная полунепрерывная снизу функция на S, то

$$N_a\Pi_a h(\zeta)\equiv h(\zeta),\qquad \zeta\in S.$$

Поэтому функция $h\,S\to\mathbb{R}$ представима в виде $h=N_a g$ тогда и только тогда, когда h неотрицательна и полунепрерывна снизу.

Полезность рассмотрения продолжения Π_a можно продемонстрировать следующим образом. Если $g\,B^n\to\mathbb{C}$, то для всех $\zeta\in S$ и $z\in B^n$

$$N_a\Pi_a N_a g(\zeta)\equiv N_a g(\zeta),\qquad |g(z)|\le\Pi_a N_a g(z). \qquad (12)$$

Равенство в 12 следует из замечания (очевидно, что $N_a g$ полунепрерывна снизу). Для доказательства неравенства запишем

$$|g(r\zeta)| \le N_a g(\eta) \qquad \text{при} \quad \eta \in B(\zeta, a\delta_r)$$

и перейдем здесь к точной нижней грани по всем таким η.

Полученные соотношения 12 означают, что $\Pi_a N_a g$ является наибольшей в каждой точке $z \in B^n$ среди всех функций g с заданной мажорантой $N_a g$.

Следуя [2], введем неизотропные потенциалы

$$K_\alpha h(\zeta) = \int_S \frac{h(\eta)}{|1 - \langle \zeta, \eta \rangle|^{n-\alpha}}\, d\sigma(\eta), \qquad 0 < \alpha < n,$$

K_α – емкость множества $G \subset S$,

$$C^p_{\alpha,n}(G) = \sup \|h\|_p^p,$$

где точная верхняя грань берется по всем неотрицательным измеримым функциям h на S, для которых $K_\alpha h(\zeta) \ge 1$ при всех $\zeta \in G$.

Лемма 2 ([2], с. 432) *Если $p > 1$, то*

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1} C^p_{\alpha,n}\{K_\alpha h > \lambda\}\, d\lambda \le c\|h\|_p^p,$$

где c не зависит от h.

Кроме того, нам понадобятся неравенства, связывающие K_α и оператор

$$I_\alpha g(z) = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g(sz)\, ds.$$

"Граничную функцию" для $I_\alpha g$ будем обозначать

$$I^0_\alpha g(\zeta) = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g(s\zeta)\, ds \tag{13}$$

(если, например, интеграл сходится для почти всех $\zeta \in S$).

Лемма 3 *Выполнены неравенства*

$$K_\alpha h(\zeta) \le c I^0_\alpha \Pi_a M h(\zeta), \tag{14}$$

$$N_a I_\alpha g(\zeta) \le c K_\alpha N_{4a} g(\zeta), \tag{15}$$

где постоянные c не зависят от h и g.

Доказательство. Неравенство 14 получается из следующих двух цепочек неравенств, в которых используются определения 6 и 9, а также утверждение 1) леммы 1.

С одной стороны,

$$K_\alpha h(\zeta) \le \sum_{j=0}^{\infty} \int_{a2^{-j}<d(\zeta,\eta)\le a2^{1-j}} |h(\eta)|\big(d(\zeta,\eta)\big)^{\alpha-n}\, d\sigma(\eta)$$

$$\le c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(\alpha-n)} \int_{B(\zeta,a2^{1-j})} |h|\, d\sigma$$

$$\le c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \inf\{Mh(\eta) : d(\zeta,\eta) < a2^{1-j}\}$$

$$\le c\Big(\Pi_a Mh(0) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\alpha j}\Pi_a Mh\big((1-2^{-j})\zeta\big)\Big)$$

$$\le c\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\alpha j}\Pi_a Mh\big((1-2^{-j})\zeta\big),$$

если $a<1$, то надо еще учесть оценку

$$\int_{2a<d(\zeta,\eta)\le 2} |h(\eta)|\big(d(\zeta,\eta)\big)^{\alpha-n}\, d\sigma(\eta) \le c\Pi_a Mh(0).$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\Pi_a Mh(s\zeta)\, ds = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{1-2^{-j}}^{1-2^{-j-1}}$$

$$\ge c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-\alpha)} 2^j \Pi_a Mh\big((1-2^{-j})\zeta\big).$$

Докажем теперь неравенство 15. Пусть $\zeta\in S$ и $r\eta\in D_a(\zeta)$, где $r\in[0,1)$, $\eta\in S$. Пусть еще $0<s<1$. Тогда если $\xi\in B(\zeta,a\delta_s)$, то

$$d(\xi,\eta) \le 2\big(d(\xi,\zeta)+d(\zeta,\eta)\big) \le 4a(1-sr).$$

Следовательно, $B(\zeta,a\delta_s)\subset B(\eta,4a\delta_{rs})$. Отсюда и из утверждения 2) леммы 1 следует

$$|g(sr\eta)| \le \inf\{N_{4a}g(\xi) : \xi\in B(\eta,4a\delta_{sr})\}$$

$$\leq \inf\{N_{4a}g(\xi) : \xi \in B(\zeta, a\delta_s)\} = \Pi_a N_{4a} g(s\zeta).$$

Таким образом, мы показали, что при $r\eta \in D_a(\zeta)$

$$I_\alpha g(r\eta) \leq \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} |g(sr\eta)|\, ds \leq \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \Pi_a N_{4a} g(s\zeta)\, ds.$$

Переходя здесь к точной верхней грани по $r\eta \in D_a(\zeta)$, получаем

$$N_a I_\alpha g(\zeta) \leq \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \Pi_a N_{4a} g(s\zeta)\, ds. \tag{16}$$

Для оценки правой части неравенства 16 возьмем $a_1 \in (0,a)$ настолько малым, чтобы

$$\sigma\big(B(\zeta, a_1 2^{-j-1})\big) - \sigma\big(B(\zeta, a_1 2^{-j-2})\big) \geq c 2^{-jn}$$

(см. [1], с. 74). Тогда, если обозначить $g_1(z) = \Pi_a N_{4a} g(z)$, то

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} g_1(s\zeta)\, ds = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{1-2^{-j}}^{1-2^{-j-1}} (1-s)^{\alpha-1} g_1(s\zeta)\, ds$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \inf\{N_{a_1} g_1(\eta) : \eta \in B(\zeta, a_1 2^{-j-1})\}$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(n-\alpha)} \int_{a_1 2^{-j-2} < d(\zeta,\eta) \leq a_1 2^{-j-1}} N_{a_1} g_1\, d\sigma$$

$$\leq c \int_S \frac{N_{a_1} g_1\, d\sigma(\eta)}{|1 - \langle \zeta, \eta \rangle|^{n-\alpha}}. \tag{17}$$

Кроме того, в силу утверждения 2) леммы 1

$$N_{a_1} g_1(\eta) = N_{4a} g(\eta),$$

поэтому из неравенств 17 и 16 получаем 15.

Следующая лемма является ключевой – именно в ней учитывается специфика областей

$$\left\{ r\eta \in B^n : \alpha(\zeta, \eta) < a \left(\ln \frac{e}{1-r} \right)^{-(p-1)/n} \right\},$$

участвующих в определении максимального оператора E_a из 2. Пусть $r_0 \leq r < 1$ и

$$\rho = 1 - \left(\ln \frac{e}{1-r} \right)^{-(p-1)/n}, \tag{18}$$

где r_0 выбрано так, чтобы $\rho < r$ при $r_0 \le r < 1$. Обозначение (18) используется в следующих двух леммах.

Лемма 4 *Пусть $p > 1$, $\alpha = n/p$ и g – неотрицательная функция на B^n, измеримая на любом радиусе в B^n, причем $N_a g \in L^p(S)$. Тогда для любых $\zeta \in S$, $r_0 \le r < 1$ и $\eta \in B(\zeta, 1-\rho)$*

$$\int_\rho^r (1-s)^{\alpha-1} g(s\eta)\, ds \le cM^{1/p}(N_a^p g)(\zeta), \tag{19}$$

где c не зависит от r, η, ζ и g.

Это утверждение доказано в [5] (в [5] g была модулем голоморфной функции, но доказательство без изменений проходит и при сделанных предположениях). С помощью неравенства 19 в [5] доказывалось 5.

Пусть функция $h \in L^1(S)$, тогда ее продолжение $\Pi_a h$ измеримо на B^n в силу утверждения 3) леммы 1. Поэтому в силу теоремы Фубини для почти всех $\eta \in S$ интеграл $I_\alpha^0 \Pi_a h(\eta)$ (см. 13) сходится. Это замечание делает корректным следующее определение:

$$J_\alpha h = \Pi_a I_\alpha^0 \Pi_a h. \tag{20}$$

Лемма 5 *Пусть $1 < p = n/\alpha$, $a \ge 4$ и $h \in L^p(S)$. Тогда*

$$\sigma\{E_1 J_\alpha h > \lambda\} \le c\left(\frac{1}{\lambda}\|h\|_p\right)^p, \qquad \lambda > 0, \tag{21}$$

где c не зависит от λ и h.

Доказательство. Прежде всего отметим, что неравенство (21) достаточно доказать для $\lambda > c_1\|h\|_p$, где c_1 – некоторая постоянная, которая будет выбрана ниже (независимо от λ и h). Далее, точную верхнюю границу в определении E_a (см. 2) достаточно брать по $r \in [r_0, 1)$ и $d(\zeta, \eta) < (1-\rho)a$. В самом деле, если $0 \le r \le r_0$ и $\zeta \in S$, то (см. утверждение 2) в лемме 1)

$$J_\alpha h(r\zeta) \le \left(\frac{1}{\sigma(B(\zeta, a\delta_r))}\int_{B(\zeta,a\delta_r)} (N_a J_\alpha h)^p\, d\sigma\right)^{1/p}$$

$$\le c\|I_\alpha^0 \Pi_a h\|_p \le c\|N_a \Pi_a h\|_p \le c\|h\|_p.$$

Оценим теперь $J_\alpha h$. Пусть $r \in [0,1)$, $\zeta \in S$. Покажем, что

$$\Pi_a h(\rho\eta) \le \Pi_{a/4} h(\rho\zeta), \qquad \eta \in B(\zeta, a\delta_r). \tag{22}$$

В самом деле, если $\xi \in B(\zeta, a\delta_\rho)$, то (так как $\rho < r$)

$$d(\xi,\eta) \le 2\big(d(\xi,\zeta) + d(\zeta,\eta)\big) \le 4a(1-\rho)$$

и $\xi \in B(\eta, 4a\delta_\rho)$. Отсюда следует 22. Аналогично доказывается, что

$$\Pi_a h(s\eta) \le \Pi_{a/4} h(s\zeta), \qquad \eta \in B(\zeta, a\delta_r), \quad \rho < s < r. \tag{23}$$

С помощью неравенств 22 и 23 получаем

$$J_\alpha h(r\zeta) \le \inf_{\eta \in B(\zeta, a\delta_r)} \left\{ \left(\int_0^\rho + \int_\rho^r + \int_r^1 \right) (1-s)^{\alpha-1} \Pi_a h(s\eta)\, ds \right\}$$

$$\le \inf_{\eta \in B(\zeta, a\delta_r)} \left\{ \Pi_{a/4} h(\rho\zeta) + \int_\rho^r (1-s)^{\alpha-1} \Pi_{a/4} h(s\zeta)\, ds + (1-r)^\alpha \Pi_a h(\eta) \right\}$$

$$\le \Pi_{a/4} h(\rho\zeta) + \int_\rho^r (1-s)^{\alpha-1} \Pi_{a/4} h(s\zeta)\, ds + (1-r)^\alpha \Pi_a h(r\zeta).$$

Далее, так как $\Pi_a h(r\zeta) \le h(\eta)$ при $\eta \in B(\zeta, a\delta_r)$ (см. утверждение 2) в лемме 1), то

$$\Pi_a h(r\zeta) \le \left(\frac{1}{\sigma(B(\zeta, a\delta_r))} \int_{B(\zeta, a\delta_r)} |h|^p\, d\sigma \right)^{1/p} \le c(1-r)^{-n/p} \|h\|_p.$$

Таким образом, мы приходим к оценке

$$\Pi_a J_\alpha h(r\zeta) \le c\left(\|h\|_p + \Pi_{a/4} h(\rho\zeta) + \int_\rho^r (1-s)^{\alpha-1} \Pi_{a/4} h(s\zeta)\, ds \right).$$

Если теперь зафиксировать $\zeta \in S$ и взять точку $r\eta \in B^n$ так, что $r_0 \le r < 1$ и $d(\zeta,\eta) < (1-\rho)a$, то $\rho\eta \in D_1(\zeta) \subset D_{a/4}(\zeta)$ (так как $a \ge 4$ согласно утверждению 2) леммы 1). Отсюда, а также из леммы 4, выводим

$$\sup_{\eta \in B(\zeta, \delta_\rho),\, r_0 \le r < 1} \Pi_a J_\alpha h(r\eta) \le c\big(\|h\|_p + M^{1/p}(h^p)(\zeta) \big). \tag{24}$$

Теперь неравенство слабого типа 7 и сказанное в начале доказательства леммы (с постоянной $c_1 = 2c$, где c взята из 24) дают нам утверждение леммы.

3 Оценки для максимального оператора E_a.

В этом пункте мы покажем, что основное неравенство 1 справедливо для более широкого класса функций, чем $H^p_\alpha(B^n)$, $p = n/\alpha > 1$.

Пусть $\mathcal{H}^p(B^n)$ – класс комплекснозначных функций $f \in C(B^n)$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(B^n)} = \|N_a f\|_p.$$

Отметим, что выбор числа a в этом определении не играет существенной роли. Именно, если $0 < a < b$, то

$$\|N_b f\|_p \le c\left(\frac{b}{a}\right)^{n/p} \|N_a f\|_p, \tag{25}$$

где постоянная c не зависит от a, b и f.

Для доказательства этого обозначим $E_a(\lambda) = \{N_a f > \lambda\}$. Если $\zeta \in E_b(\lambda)$, то найдется точка $r\eta \in D_b(\zeta)$, для которой $|f(r\eta)| > \lambda$. Поэтому $N_b f(\xi) > \lambda$ при всех $\xi \in B(\eta, a\delta_r) \equiv B_\zeta$. Из покрытия $\{B_\zeta : \zeta \in E_b(\lambda)\}$ можно выделить не более чем счетное семейство шаров $\{B_{\zeta_j}\}$ со свойствами

$$B_{\zeta_k} \cap B_{\zeta_j} = \varnothing, \qquad \sigma\big(E_b(\lambda)\big) \le c \sum_j \sigma(B_{\zeta_j})$$

(см. [1], с. 75). Если $B_j^* = B\big(\eta_j, a(1 - r_j)\big)$, то $B_j^* \subset E_a(\lambda)$ и

$$\sigma\big(E_b(\lambda)\big) \le c \sum_j \frac{\sigma(B_{\zeta_j})}{\sigma(B_j^*)} \sigma(B_j^*) \le c\left(\frac{b}{a}\right)^n \sigma\big(E_a(\lambda)\big).$$

Отсюда и из равенства

$$\|h\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \sigma\{|h| > \lambda\}\, d\lambda$$

вытекает 25.

Положим

$$\mathcal{H}^p_\alpha(B^n) = R_\alpha\big(\mathcal{H}^p(B^n)\big)$$

с естественной нормировкой. Тогда, очевидно (см. п. 1),

$$H^p(B^n) \hookrightarrow \mathcal{H}^p(B^n), \qquad H^p_\alpha(B^n) \hookrightarrow \mathcal{H}^p_\alpha(B^n).$$

В работе [3] доказано, что при $0 < p < n/\alpha$

$$\|N_\varepsilon^* f\|_p \le c\|f\|_{\mathcal{H}_\alpha^p(B^n)}, \qquad \varepsilon = 1 - \frac{\alpha p}{n}$$

(c не зависит от f). Это является обобщением неравенства 4 из теоремы 1. Подобное обобщение допускает и 1.

Теорема 3 *Если $p = n/\alpha > 1$, то*

$$\|E_a f\|_p \le c\|f\|_{\mathcal{H}_\alpha^p(B^n)}, \qquad f \in \mathcal{H}_\alpha^p(B^n), \tag{26}$$

где постоянная c не зависит от f.

Доказательство. Прежде всего отметим, что рассуждение, проведенное при доказательстве неравенства 25, показывает справедливость оценки

$$\|E_b f\|_p \le c\|E_a f\|_p, \qquad 0 < a < b$$

(c не зависит от f). Поэтому можно считать, что в определении 2 $a = 1$.

Пусть $W \subset B^n$. Введем обозначение

$$V(W) = \{\zeta \in S : \Omega_1(\zeta) \cap W \ne \varnothing\}$$

и докажем неравенство

$$\sigma\big(V\big(T_1(G)\big)\big) \le cC_{\alpha,n}^p(G), \qquad G \subset S. \tag{27}$$

Пусть функция h на S измерима, неотрицательна и $K_\alpha h(\zeta) \ge 1$ на G. Тогда по лемме 1 $\Pi_1 K_\alpha h(z) \ge 1$ при всех $z \in T_1(G)$. Отсюда следует, что если $\zeta \in V\big(T_1(G)\big)$, то $\Omega_1(\zeta)$ пересекает $T_1(G)$ и $E_1\Pi_1 K_\alpha h(\zeta) \ge 1$. Следовательно,

$$V\big(T_1(G)\big) \subset \{E_1\Pi_1 K_\alpha h \ge 1\}.$$

По лемме 3 (см. 14 и 20)

$$\Pi_1 K_\alpha h(z) \le \Pi_1 I_\alpha^0 \Pi_1 M h(z) = J_\alpha M h(z).$$

Поэтому, используя лемму 5 и неравенство 8 для максимальной функции M, получаем

$$\sigma\big(V\big(T_1(G)\big)\big) \le \sigma\{E_1\Pi_1 K_\alpha h \ge 1\}$$

$$\leq \sigma\left\{E_1 J_\alpha M h \geq \frac{1}{c}\right\} \leq c\|Mh\|_p^p \leq c\|h\|_p^p.$$

Переходя к точной верхней грани по всем функциям h с указанными выше свойствами, получим 27.

Теперь докажем неравенство 26. Пусть функция $f \in \mathcal{H}^p_\alpha(B^n)$ и $f = R_\alpha g$, где $g \in \mathcal{H}^p(B^n)$. Тогда $|g(z)| \leq \Pi_1 N_1 g(z)$ в силу неравенства в 12 и

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} g(sz)\,ds\right|$$

$$\leq c\left(\Pi_1 N_1 g\left(\frac{z}{2}\right) + \int_{1/2}^1 (1-s)^{\alpha-1}\Pi_1 N_1 g(sz)\,ds\right) \leq c I_\alpha \Pi_1 N_1 g(z). \tag{28}$$

Далее, если $\lambda > 0$, то

$$\{E_1 f > \lambda\} \subset V\big(T_1(\{N_1 f > \lambda\})\big). \tag{29}$$

В самом деле, если $E_1 f(\zeta) > \lambda$, то найдется точка $z \in \Omega_1(\zeta)$, в которой $|f(z)| > \lambda$. Но последнее неравенство выполняется только в точках из $T_1(\{N_1 f > \lambda\})$, поэтому $\Omega_1(\zeta)$ и $T_1(\{N_1 f > \lambda\})$ пересекаются. Таким образом, вложение 29 доказано.

Переходя в 29 к мерам и используя неравенство 27, получим

$$\sigma\{E_1 f > \lambda\} \leq \sigma\Big(V\big(T_1(\{N_1 f > \lambda\})\big)\Big) \leq c\, C^p_{\alpha,n}(\{N_1 f > \lambda\}).$$

Отсюда выводим

$$\|E_1 f\|_p^p \leq c\int_0^\infty \lambda^{p-1} C^p_{\alpha,n}(\{N_1 f > \lambda\})\,d\lambda$$

$$\leq c\int_0^\infty \lambda^{p-1} C^p_{\alpha,n}\left(\left\{N_1 I_\alpha \Pi_1 N_1 g > \frac{\lambda}{c}\right\}\right) d\lambda$$

$$\leq c\int_0^\infty \lambda^{p-1} C^p_{\alpha,n}\left(\left\{K_\alpha N_4 \Pi_1 N_1 g > \frac{\lambda}{c}\right\}\right) d\lambda$$

$$\leq c\|N_4 \Pi_1 N_1 g\|_p^p \leq c\|N_1 g\|_p^p = c\|g\|^p_{\mathcal{H}^p(B^n)}.$$

Здесь последовательно использовались 28, 15 из леммы 3, лемма 2, 25, утверждение 2) леммы 1. Теорема доказана.

П. М. Волняков [9] доказал, что каждая функция $f \in \mathcal{H}^p_{n/p}(B^n)$ почти всюду на S имеет предел вдоль областей Ω_a. Этот результат не является следствием неравенства 1 (см. теорему 2) или соответствующего неравенства слабого типа, так как в классе $\mathcal{H}^p(B^n)$ нет плотного подмножества функций, непрерывно продолжимых на S. Метод [9] основан на уточнении рассуждений из работы [10], где подобный результат доказан для случая $\alpha p < n$.

В заключение покажем, что все области подхода к границе, участвующие в формулировке теорем 1 и 2, выбраны оптимальным образом и не могут быть существенно расширены.

Теорема 4 *Пусть* Φ *– положительная функция на* $(0,1]$,

$$\lim_{t\to+0}\Phi(t) = +\infty$$

и

$$N^*_{\varepsilon,\Phi}f(\zeta) = \sup\{|f(r\eta)| : d(\zeta,\eta) < \Phi(1-r)(1-r)^\varepsilon\}.$$

Тогда если $0 < p < n/\alpha$, $\varepsilon = 1-(\alpha p)/n$, *то максимальный оператор* $N^*_{\varepsilon,\Phi}$ *не действует из* $H^p_\alpha(B^n)$ *в пространство*

$$L^p_{\mathrm{weak}} = \Big\{g : \sup_{\lambda>0}\lambda^p\sigma\{|g|>\lambda\} < \infty\Big\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\beta > n/p$, $\zeta_0 \in S$, $\rho \in (0,1)$ и рассмотрим функцию

$$g(z) = (1-\langle\rho z,\zeta_0\rangle)^{-\beta}.$$

Легко видеть, что $R_\alpha g(\rho\zeta_0) \geq c(1-\rho)^{\alpha-\beta}$. Кроме того, $\|g\|_{H^p} \asymp (1-\rho)^{n/p-\beta}$ [1], с. 26. Из оценки снизу для $R_\alpha g(\rho\zeta_0)$ и определения $N^*_{\varepsilon,\Phi}$ вытекает, что

$$N^*_{\varepsilon,\Phi}(R_\alpha g)(\zeta) \geq c(1-\rho)^{\alpha-\beta}, \qquad \zeta\in B\big(\zeta_0,\Phi(1-\rho)(1-\rho)^\varepsilon\big).$$

Следовательно,

$$\sigma\{N^*_{\varepsilon,\Phi}(R_\alpha g) > c(1-\rho)^{\alpha-\beta}\} \geq c\Phi^n(1-\rho)(1-\rho)^{\varepsilon n}$$

$$\geq c\Phi^n(1-\rho)\big(\|g\|_{H^p}(1-\rho)^{\beta-\alpha}\big)^p,$$

и так как $\Phi(1-\rho)$ за счет выбора ρ может быть сделано сколь угодно большим, наше утверждение доказано.

Теорема 5 *Пусть функция Φ такая же, как в теореме 3, и*

$$E_\Phi f(\zeta) = \sup\left\{ |f(r\eta)| : d(\zeta,\eta) < \Phi(1-r)\left(\ln\frac{e}{1-r}\right)^{-(p-1)/n} \right\}.$$

Тогда максимальный оператор E_Φ не действует из $H^p_\alpha(B^n)$ в L^p_{weak}, $p = n/\alpha > 1$.

Доказательство проводится точно так же, как и предыдущее, только надо взять $\beta = n/p$.

Список литературы

[1] Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbf{C}^n$. М.: Мир, 1984.

[2] Ahern P., Cohn W. Exceptional sets for Hardy–Sobolev function // Indiana Univ. Math. J. 1989. V. 38, №2. P. 417–452

[3] Кротов В.Г. Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением, и их приложения // Труды МИАН им.В.А.Стеклова. 1989. Т.190. С.117–138.

[4] Nagel A., Rudin W., Shapiro J. Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces // Ann. Math. 1982. V.116. N2. P.331–360.

[5] Кротов В. Г. О граничном поведении дробных интегралов голоморфных функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$ // Изв. вузов. Матем. 1988. №4. P.3–75

[6] Sueiro J. Tangential boundary limits and exceptional sets for harmonic function in Dirichlet-type spaces // J. Math. Ann. 1990. V. 286, N 4. P. 661–678.

[7] Beatrous F. Boundary continuity of holomorphic Sobolev function in the ball // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 97, №1. P. 29–41

[8] Кротов В.Г. Точная оценка граничного поведения функций из классов Харди-Соболева в критическом случае // Матем. заметки. 1997. Т.62. №4, С.527–539.

[9] Волняков П. М. Оценки свойства Фату для функций из классов типа Харди–Соболева // Дисс. … к. ф.-м. н. Одесса, ОГУ. 1992

[10] Кротов В.Г. О граничном поведении функций из пространств типа Харди // Известия АН СССР, сер.матем. 1990. Т.54. N 1. С. 957–974.

[11] Ahern P. Exceptional sets for holomorphic Sobolev functions // Michigan Math. J. 1988. V. 35, №1. P. 29–41