Асимптотические характеристики решений динамических систем

Леваков А.А., Мазаник С.А., Размыслович Г.П.

В настоящей статье представлены результаты по асимптотической теории линейных дифференциальных систем, дифференциально-алгебраических систем и дифференциальных включений, полученные в последние годы сотрудниками кафедры высшей математики Белорусского государственного университета. Эти исследования непосредственно связаны с задачами устойчивости решений линейных и нелинейных дифференциальных систем, изучением асимптотической эквивалентности и асимптотических инвариантов линейных систем, выявлением структуры и асимптотических свойств решений дифференциальных систем. Работы по этим направлениям были начаты в Беларуси в конце 50-х годов прошлого столетия под руководством академика АН БССР Н.П.Еругина и профессора Ю.С.Богданова (заведующий кафедрой высшей математики со дня ее основания в 1971 г. по 1982 г.) и ведутся в настоящее время под руководством академика НАН Беларуси Н.В.Гайшуна и академика НАН Беларуси Н.А.Изобова (заведующий кафедрой высшей математики с 1995 г. по 1999 г.).

1. Системы линейных дифференциальных уравнений

Асимптотическая эквивалентность линейных дифференциальных систем. Рассмотрим множество линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \ (1.1)$$

где $A(t)$ – матрица размерности $n \times n$, элементами которой являются суммируемые (локально интегрируемые) на полуоси $I = [t_0, +\infty[$, $t_0 \in \boldsymbol{R}$, функции a_{ij}, $i,j = 1,...,n$. Под решением системы (1.1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию x, x: $I \to \boldsymbol{R}^n$, которая обращает (1.1) в тождество почти всюду на промежутке I. Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \boldsymbol{R}^n, \quad (1.2)$$

коэффициенты, которой имеют ту же гладкость, что и коэффициенты системы (1.1). Будем говорить, что линейное преобразование

$$x = Ly \qquad (1.3)$$

с абсолютно непрерывной невырожденной на I матрицей L переводит систему (1.1) в систему (1.2), если для любого решения у системы (1.2) функция $x = Ly$ – решение системы (1.1) (для любого решения x системы (1.1) функция $y = L^{-1}x$ – решение системы (1.2)).

Многие асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем, например, характеристические показатели Ляпунова $\lambda[x] = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{\ln\| x(t) \|}{t}$, являются инвариантами преобразований и обобщенных преобразований Ляпунова, т.е. линейных преобразований (1.3), у которых матрица преобразования L удовлетворяет соответственно условиям

$$\sup_{t\in I}(\| L(t)\| + \| L^{-1}(t)\| + \| \dot{L}(t)\|) < +\infty, \quad (1.4)$$

$$\max\{\lambda[L], \lambda[L^{-1}], \lambda[\dot{L}]\} = 0. \quad (1.5)$$

Поэтому исследование таких характеристик для системы (1.1) может быть, по крайней мере, в принципе, сведено к их исследованию для преобразованной системы (1.2), полученной из данной с помощью преобразования (обобщенного преобразования) Ляпунова. Следуя Ю.С.Богданову [9] две системы (1.1) и (1.2) назовем асимптотически эквивалентными (обобщенно асимптотически эквивалентными), если существует преобразование Ляпунова (обобщенное преобразование Ляпунова), переводящее одну из них в другую. Поскольку преобразования (обобщенные преобразования) Ляпунова образуют группу невырожденных линейных преобразований, действующую на множестве линейных систем, это позволяет разбить все множество систем на классы эквивалентных относительно заданной группы преобразований систем и тем самым провести их классификацию. Систематическое развитие этого подхода приводит к теории асимптотически эквивалентных [9; 10] линейных систем. Основными задачами этой теории являются задачи описания разбиения всего множества систем на классы эквивалентности, построение признаков эквивалентности и неэквивалентности систем, построение для каждого класса эквивалентности систем-представителей этого класса, т.е. систем, возможно более простой структуры, обладающих "хорошими" свойствами (интегрируемость в квадратурах, возможность построения решения в замкнутом виде на любом конечном промежутке изменения аргумента, возможность вычисления асимптотических характеристик системы непосредственно через коэффициенты системы и т.п.), и в то же время достаточно разнообразных в совокупности, чтобы для каждой системы нашлась эквивалентная ей система-представитель. Если при этом в каждом классе эквивалентности оказывается ровно одна система, то именно ее коэффициенты и образуют полную систему инвариантов [11]. Например, в работе [62] доказана следующая

Теорема 1.1. *Совокупность коэффициентов треугольных систем является полной независимой системой инвариантов линейных дифференциальных систем относительно группы ортогональных преобразований Ляпунова.*

Принципиальным в решении задачи построения систем-представителей классов асимптотически эквивалентных систем является следующий результат, полученный Ю.С.Богдановым.

Теорема 1.2 [10]. *Любая линейная система (1.1) с ограниченными коэффициентами*

$$\sup_{t\in I}\| A(t)\| = \alpha < +\infty, \quad (1.6)$$

может быть с помощью преобразования Ляпунова приведена к системе с кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими только два значения α *и* $-\alpha$.

Исследования асимптотических свойств решений кусочно-постоянных дифференциальных систем (см., например, [24; 25; 61; 79; 93]) показали, что существенным в данном случае является не столько разрывность коэффициентов, сколько характер распределения точек разрыва. В этой связи возникает вопрос о возможности построения для линейных систем асимптотически эквивалентных кусочно-постоянных систем с заранее заданными последовательностями точек возможного разрыва коэффициентов. Следующие два утверждения дают примеры таких последовательностей.

Теорема 1.3 [58]. *Среди кусочно-постоянных систем (1.2) асимптотически эквивалентных системе (1.1), удовлетворяющей условию (1.6), существует система с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов, элементы которой принимают только два значения, причем последовательность точек разрыва коэффициентов является подпоследовательностью последовательности* (t_k) *такой, что* $t_1 = t_0 = 0$, $t_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$ *и для* $t_k \in [m, m+1[$, $m = 0,1,\ldots$, *имеет место неравенство* $t_{k+1} - t_k \le b\exp(-\beta t)$, *где* b *– произвольное положительное число, а значение положительного числа* β *зависит только от* α.

Теорема 1.4 [59; 60]. *Любая линейная система (1.1) с ограниченной матрицей коэффициентов, удовлетворяющей (1.6), преобразованием Ляпунова может быть приведена к треугольной системе с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов, ненулевые элементы которой принимают только два значения* α *и* $-\alpha$ *и терпят разрывы разве лишь в точках последовательности* (t_k), $t_0 = 0$,
$t_k = kl$, $k = 1, 2,\ldots$, *а положительное число* l *удовлетворяет неравенству* $l < 0{,}25$
$\alpha^{-1} \ln 2$.

Отметим, что для указанных выше допустимых последовательностей разрывов коэффициентов приведенной кусочно-постоянной системы (1.2) расстояния между возможными точками разрыва являются ограниченными. Это условие оказывается существенным при построении кусочно-постоянных представителей классов асимптотически эквивалентных систем [66]. Более того, имеет место следующая

Теорема 1.5 [63; 64]. *Среди линейных систем (1.1) с ограниченными коэффициентами существуют системы, не приводимые преобразованием Ляпунова к кусочно-постоянным системам с неограниченной последовательностью длин промежутков постоянства коэффициентов.*

Однако, если расширить группу допустимых преобразований до группы обобщенных преобразований Ляпунова, то становиться возможным использовать в качестве представителей классов обобщенно асимптотически эквивалентных систем кусочно-постоянные системы, у которых последовательности длин промежутков постоянства коэффициентов могут быть бесконечно большими. А именно, имеет место

Теорема 1.6 [67]. *Для любой системы (1.1) с ограниченными коэффициентами существует обобщенное преобразование Ляпунова, переводящее ее в систему с кусочно-постоянными коэффициентами, имеющими разрывы разве лишь в точках последовательности* (t_k), *удовлетворяющей следующим условиям:* $t_0 = 0$, $t_{k+1} - t_k \ge t_k - t_{k-1} > 0$, $k = 1, 2,\ldots$, $t_{k+1} - t_k \to +\infty$, $t_{k+1}/t_k \to 1$ при $k \to +\infty$.

Понятие асимптотической эквивалентности линейных систем может быть распространено на линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка, если уравнения

$$\xi^{(n)} + a_{n-1}(t)\xi^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{\xi} + a_0(t)\xi = 0,\ t \in I, \quad (1.7)$$

$$\eta^{(n)} + b_{n-1}(t)\eta^{(n-1)} + \ldots + b_1(t)\dot{\eta} + b_0(t)\eta = 0,\ t \in I, \quad (1.8)$$

отождествлять соответственно с системами (1.1) и (1.2), где $x = (\xi, \dot{\xi}, ..., \xi^{(n-1)})^T$, $y = (\eta, \dot{\eta}, ..., \eta^{(n-1)})^T$, $A(t) = (a_{ij}(t))$, $B(t) = (b_{ij}(t))$, $i,j = 1,...,n$, причем $a_{nj}(t) = -a_{j-1}(t)$, $b_{nj}(t) = -b_{j-1}(t)$, $j = 1,..., n$, $a_{i(i+1)}(t) = b_{i(i+1)}(t) \equiv 1$, $i = 1, ..., n - 1$, и $a_{ij}(t) = b_{ij}(t) \equiv 0$ для всех остальных пар индексов (i,j). При этом уравнения (1.7) и (1.8) будем считать асимптотически эквивалентными, если асимптотически эквивалентны соответствующие им системы. При таком подходе на уравнения автоматически переносятся основные определения теории асимптотически эквивалентных систем. Иначе обстоит дело с перенесением на уравнения результатов, полученных ранее для систем (см., например, [8]), и, в частности, результатов о приведении линейных систем к кусочно-постоянным системам, поскольку, например, в упомянутых выше результатах [59; 60] в качестве кусочно-постоянной матрицы приведенной системы используется верхне-треугольная матрица, а поэтому получаемая система не соответствует никакому линейному уравнению. Таким образом, оставались нерешенными задачи о приведении линейных уравнений к линейным уравнениям с кусочно-постоянными коэффициентами и, в частности, к уравнениям, последовательность длин промежутков постоянства коэффициентов которых обладала бы заранее заданными свойствами: была бы отделена от нуля, являлась бы бесконечно большой или неограниченной. Исследованию этих вопросов посвящены работы [66; 70], где, в частности, получен следующий результат.

Теорема 1.7. *Для любого уравнения (1.7) второго порядка с ограниченными коэффициентами существует асимптотически эквивалентное уравнение (1.8) второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими лишь конечное число значений, причем длины промежутков постоянства коэффициентов ограничены снизу некоторым положительным числом.*

Системы Лаппо-Данилевского. Одним из важных и интересных как с практической, так и теоретической точки зрения(см., например, [28]), классов линейных систем (1.1) является класс систем, у которых матрица коэффициентов A коммутирует со своим интегралом, т.е. при некоторых s и t выполнено равенство

$$A(t)\int_s^t A(u)du = \int_s^t A(u)du\, A(t). \quad (1.9)$$

Системы (1.1), для которых условие (1.9) выполнено назовем системами Лаппо-Данилевского. В тех случаях, когда условие (1.9) выполнено при всех $t \geq s$, фундаментальная нормированная при $t = s$ матрица $X_s(t)$ решений системы (1.1) может быть представлена в экспоненциальной форме

$$X_s(t) = \exp\left(\int_s^t A(u)\, du\right). \quad (1.10)$$

Частным случаем систем Лаппо-Данилевского являются системы с функционально коммутативными матрицами коэффициентов, т.е. с матрицами A, которые удовлетворяют при всех s и t из промежутка I условию $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Г.Н.Чеботаревым [95] для $n = 2$ и В.А.Винокуровым [26] в общем случае было показано, что для представления матрицы Коши $K(t,s)$ системы (1.1) в виде $K(t,s) = \exp\left(\int_s^t A(u)\, du\right)$ необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов системы (1.1) являлась функционально коммутативной. Иначе обстоит дело с необходимостью условия Лаппо-Данилевского для представления фундаментальной матрицы решений системы (1.1) в виде (1.10). Из результатов работ В.Н.Лаптинского [40] и J.F.P.Martin [110] следует, что, если $A(t)$ – аналитическая матричная функция на [s,+∞[, то выполнение (1.10) влечет выполнение соотношения (1.9) для всех $t \geq s$. Оставался открытым вопрос о построении системы (1.1) с неаналитической матрицей коэффициентов, для которой не было бы выполнено условие Лаппо-Данилевского, однако фундаментальная матрица решений системы была бы представима в виде (1.10). Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 1.8 [69]. *Для любого* n, $n \geq 3$, *любой постоянной действительной матрицы* C *существует матричное дифференциальное уравнение* $\dot{X} = A(t)X$ *с неаналитической действительной матрицей коэффициентов* A, *для которой не выполнено условие Лаппо-Данилевского (1.9), хотя решение этого матричного уравнения, удовлетворяющее начальному условию* $X(s) = \exp C$, *представимо в виде* $X(t) = \exp\left(C + \int_s^t A(u)\,du\right)$.

Еще одной отличительной чертой систем с функционально коммутативными матрицами коэффициентов и систем Лаппо-Данилевского является возможность эффективного установления асимптотических свойств их решений, в частности, в терминах матрицы коэффициентов системы. Исследованию такого рода систем посвящены работы [6; 7; 90 – 92]. Так, например, Т.Л.Сурин в [92] было доказано, что система Лаппо-Данилевского (1.1) правильна тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\operatorname{Re}\lambda_i(t)$, где $\lambda_i(t)$ – собственные числа матрицы $\int_s^t A(u)\,du$, и показатели системы можно найти по формулам $\lambda_i = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\operatorname{Re}\lambda_i(t)$, $i = 1,\dots, n$. В ее же работе [90] было показано, что множество неправильности, т.е. множество тех значений μ, при которых система $\dot{x} = \mu A(t)x$ является неправильной для правильной системы (1.1), является пустым, если (1.1) – правильная система Лаппо–Данилевского, в отличие от правильных систем общего вида, подробно изученных в работах Н.А.Изобова и Е.К.Макарова (см., например, [31; 78; 79]. В этой связи оставался открытым вопрос о возможности приведения любой системы (1.1) с помощью преобразований Ляпунова (1.3), (1.4) или с помощью обобщенных преобразований Ляпунова (1.3), (1.5) к системе с функционально коммутативной матрицей коэффициентов или к системе Лаппо-Данилевского. Решение этих задач содержится в работах [71 – 74; 108], из результатов которых следует

Теорема 1.9. *Для любого* n, $n \geq 2$, *существуют линейные системы (1.1), не являющиеся асимптотически эквивалентными системам Лаппо-Данилевского, для которых условие (1.9) выполнено при некотором* $s \in I$ *и всех* $t \geq s$ *(всех* $t \in I$*).*

Кроме того, имеет место

Теорема 1.10. *Во множестве двумерных линейных дифференциальных систем (1.1) существуют системы, не приводимые обобщенным преобразовани-*

ем Ляпунова к системам Лаппо-Данилевского, для которых условие (1.9) выполнено при некотором $s \in I$ и всех $t \geq s$ (всех $t \in I$).

В работах [75: 109] исследовалось распределение систем Лаппо-Данилевского во множестве линейных систем, в частности доказана

Теорема 1.11. *Пусть (A_k) последовательность двумерных матриц, для каждой из которых условие (1.9) выполнено при некотором $s_k \in I$ и всех $t \in I$. Если $\sup_{t\in I} \| A_k(t) - A(t) \| \to 0$ при $k \to +\infty$, то матрица A удовлетворяет условию Лаппо-Данилевского (1.9) при некотором $s \in I$ и всех $t \in I$.*

Нижние показатели Перрона линейных систем. Инвариантами преобразований Ляпунова являются также и нижние показатели Перрона $\pi[x] = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{\ln\| x(t) \|}{t}$ нетривиальных решений линейных систем. Одним из открытых вопросов асимптотической теории линейных систем являлся вопрос о связи множества $\pi(A)$ нижних показателей системы (1.1) и множества $\pi(A + Q)$ нижних показателей возмущенной линейной системы

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \boldsymbol{R}^n. \quad (1.12)$$

Решению этой задачи посвящены работы Н.А.Изобова и А.В.Филлипцова [32 – 35]. Пусть X_A – фундаментальная матрица решений системы (1.1), столбцы которой образуют нормальную по Ляпунову систему решений, λ_i и δ_i – показатели Ляпунова i-го столбца матрицы X_A и i-й строки матрицы X_A^{-1}. Величиной неправильности системы (1.1) называется [32] число $\sigma(A) = \max_{1\le i<k\le n} \{\lambda_i + \delta_i + \lambda_k + \delta_k\}$. Следующая теорема устанавливает инвариантность множества нижних показателей Перрона линейных систем при экспоненциально убывающих возмущениях.

Теорема 1.12 [34]. *Множества $\pi(A)$ и $\pi(A + Q)$ нижних показателей Перрона соответственно систем (1.1) и (1.12) с ограниченными коэффициентами совпадают, если для матрицы возмущения $Q(t)$ выполнено условие $\lambda[Q] \le -\sigma(A)$.*

Неулучшаемость полученного условия инвариантности устанавливает следующая

Теорема 1.13 [33]. *Для произвольных натурального $n \geq 2$, числового множества P, мощности $\operatorname{card} P \in \{2, \dots, 2^n - 1\}$, величины $\sigma \geq 2 \max P - \min P - \min (P \setminus\{\min P\})$ чисел $\rho \in (0,1)$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует n-мерная линейная диагональная система (1.1) с ограниченной бесконечно дифференцируемой на полуоси I матрицей коэффициентов, множеством нижних показателей $\pi(A) = P$ и величиной неправильности $\sigma(A) = \sigma$, а также аналитическая матрица Q с показателем Ляпунова $\lambda[Q] \le \varepsilon - \sigma(A)$ такие, что r, $r = \min \{n, \operatorname{card} P - 1\}$, младших нижних показателей $\pi_i(A) \in \pi(A)$ и $\pi_i(A + Q) \in \pi(A + Q)$ являются различными между собой и удовлетворяют неравенствам $\rho\varepsilon \le \pi_i(A + Q) - \pi_i(A) \le \varepsilon$, $i = 1, \dots, r$.*

Указанная теорема, доказательство которой содержит способ построения диагональной системы (1.1) с произвольными, удовлетворяющими необходимым условиям, множеством нижних показателей Перрона и величиной неправильности, оставляет вне рассмотрения системы (1.1) с одноэлементными множествами $\pi(A)$. Для таких систем справедлива

Теорема 1.14 [33]. *Пусть диагональная система (1.1) с коэффициентом неправильности Гробмана* $\sigma_\Gamma(A)$ *и величиной неправильности* $\sigma(A)$ *имеет множество нижних показателей* $\pi(A)$, *мощность которого равна* 1. *Тогда при* $\lambda[Q] \le \varepsilon - \sigma(A) < 0$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *справедливо* 1) $\pi(A) = \pi(A + Q)$, если $\sigma(A) > \sigma_\Gamma(A)$; 2) $\pi(A) \subset \pi(A + Q)$, если $\sigma(A) = \sigma_\Gamma(A)$.

Вычисление максимального нижнего показателя Перрона решений линейной системы рассмотрено в работе [35], где доказана

Теорема 1.15. *Пусть* X_k – $n \times k$ – *матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы (1.1). Максимальный нижний показатель Перрона подпространства решений* $X_k(t)c$, $c \in \boldsymbol{R}^k$, *системы (1.1) равен нижнему показателю матрицы* X_k. *В случае, когда* $k = n$ *максимальный нижний показатель системы (1.1) равен нижнему показателю любой ее фундаментальной матрицы.*

Отражающая функция систем дифференциальных уравнений. Для исследования периодичности и устойчивости решений дифференциальных систем В.И.Мироненко было предложено использовать отражающую функцию (см., например, [82], которая в случае линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = P(t)x,\ x \in \boldsymbol{R}^n,\ P(t) = (p_{ij}(t)),\ i, j = 1,\dots,n,\ t \in \boldsymbol{R}, \quad (1.13)$$

с непрерывными на $\boldsymbol{R}$ коэффициентами p_{ij} имеет вид $\Phi(t,x) = F(t)x$, где $F(t) = X(-t)X^{-1}(t)$ – отражающая матрица системы, $X(t)$ – нормированная в нуле фундаментальная матрица решений системы (1.13). Использование Л.А.Альсевич отражающей матрицы системы (1.13) для исследования устойчивости ее решений позволило установить следующие результаты.

Теорема 1.16 [1]. *Пусть* ρ_i – *собственные значения матрицы* $F(-\omega)$, *где* F – *отражающая матрица системы (1.13) с* 2ω–*периодической матрицей коэффициентов. Тогда система (1.13) устойчива в том и только в том случае, когда модули всех собственных значений* ρ_i *не превосходят единицы, а тем собственным значениям* ρ_i *для которых* $|\rho_i| = 1$, *соответствуют простые элементарные делители матрицы* $F(-\omega)$. *Для асимптотической устойчивости системы (1.13) необходимо и достаточно, чтобы модули всех собственных значений* ρ_i *были меньше единицы.*

Теорема 1.17 [1]. *Если элементы* 2ω–*периодической матрицы коэффициентов системы (1.13) удовлетворяют равенствам*

$$p_{ij}(t)\exp\left(\int_{-t}^{t} p_{ii}(u)du\right) + p_{ij}(-t)\exp\left(-\int_{-t}^{t} p_{jj}(u)du\right) = 0, \quad i \ne j,\ \ i, j = 1,\dots,n,$$

то система (1.13) устойчива (асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда для всех i, $i = 1, \dots, n$, *выполняются неравенства* $\int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(u)du \le 0$ *(* $\int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(u)du < 0$ *).*

В работе [2] выделены случаи, для которых исследование вопроса о существовании и устойчивости периодических решений периодической системы (1.13) размерности $n = 4$, удается свести к его исследованию для двумерной системы. Кроме того, в случае четной размерности системы (1.13) доказана

Теорема 1.18 [3]. *Устойчивость (асимптотическая устойчивость) 2ω–периодической системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \exp(At)K(t)\exp(-At))\,x + \exp(At)L(t)\exp(-Bt)\,y, \\ \dot{y} = \exp(Bt)M(t)\exp(-At)\,x + (B + \exp(Bt)N(t)\exp(-Bt))\,y, \;\; x, y \in \boldsymbol{R}^m, \;\; t \in \boldsymbol{R}, \end{cases}$$

с постоянными A, B и непрерывными нечетными матрицами K, L, M, N, равносильна одновременной устойчивости (асимптотической устойчивости) стационарных систем $\dot{x} = Ax$, $\dot{y} = By$.

Условия, при которых отображение за период сохраняет норму любого решения системы получены Л.А.Альсевич и О.А.Кастрицей для случая трехмерной ситемы (1.13), в частности, имеет место

Теорема 1.19 [5]. *Если коэффиценты системы (1.13) удовлетворяют условиям*

$$p_{11}(t) = -p_{11}(-t),\; p_{22}(t) = p_{11}(t),\; p_{12}(t) = -p_{21}(t),\; p_{33}(t) = -p_{33}(-t),$$
$$(p_{13}(t) - p_{13}(-t))\sin\alpha(t) + (p_{23}(t) + p_{23}(-t))\cos\alpha(t) = 0,$$
$$(p_{31}(t) - p_{31}(-t))\sin\alpha(t) + (p_{32}(t) + p_{32}(-t))\cos\alpha(t) = 0,$$
$$(p_{13}(t) + p_{13}(-t))\cos\alpha(t) + (p_{23}(t) - p_{23}(-t))\sin\alpha(t) = 0,$$
$$(p_{31}(t) + p_{31}(-t))\cos\alpha(t) + (p_{32}(t) - p_{32}(-t))\sin\alpha(t) = 0,$$

где $\alpha(t) = 0{,}5\int_{-t}^{t} p_{12}(u)\,du$, то $\| x(t) \| = \| x(-t)\|$ *для любого решения x. Если к тому же коэффициенты системы (1.13) – периодические функции, то система (1.13) устойчива и имеет семейство периодических решений с начальными условиями* $(0, 0, a)^T$, $(b, 0, 0)^T$, $(0, c, 0)^T$, *где* $a, b, c \in \boldsymbol{R}$.

В случае произвольного n имеет место

Теорема 1.20 [36]. *Если для* 2ω-*системы (1.13) выполнено условие* $P^T(t) + P(t) = m(t)\,E$, *где E – единичная* $n \times n$*–матрица, причем* $m_0 = \int_{-\omega}^{\omega} m(u)\,du = 0$, *то отображение за период системы (1.13) сохраняет норму любого решения системы. Кроме того, система (1.13) асимптотически устойчива при* $m_0 > 0$, *устойчива при* $m_0 = 0$, *и неустойчива при* $m_0 < 0$.

Аналогичные условия устойчивости получены [36] и в случае, когда матрица коэффициентов системы (1.13) имеет блочную структуру специального вида.

2. Дифференциально-алгебраические системы

Построение решений. Рассмотрим систему стационарных неразрешенных относительно производной дифференциальных уравнений вида

$$A_0\dot{x}(t) + Ax(t) + A_1x(t-h) = f(t),\; t \in I = [0,+\infty[, \qquad (2.1)$$

$$x_0(\cdot) = x(t) = \varphi(t),\; -h \le t < 0,\; x(0) = x_0, \qquad (2.2)$$

где A_0, A, A_1, – $n \times n$ матрицы; x– n – вектор-функция; $f(t)$, $\varphi(t)$ – n – вектор-функции, принадлежащие определенному классу гладкости; h(h>0) – запаздывание; x_0 – заданный n-вектор. Сразу считаем, что $A_0 \neq 0$ и $\det A_0 = 0$.

Системы (2.1), (2.2) возникают во многих областях науки и техники, например, в теории сингулярных возмущений, теории электрических цепей, систем с малым параметром, компьютерных системах, в теории управления и аэрокосмических исследований, в экономике и др. Они называются дескрипторными (descriptor), сингулярными (singular) или дифференциально-алгебраическими системами (differential-algebraic systems – *DAE*'s).

В последние несколько десятков лет теория дифференциально-алгебраических систем, как стационарных так и нестационарных, очень бурно развивается. Среди огромного числа публикаций посвященных исследованию таких систем отметим лишь несколько работ, влияние которых на развитие этой теории значительно. В первую очередь это монография Гантмахера Ф.Р. «Теория матриц» [29], затем монографии Бояринцева Ю.Е. [12], Griepentrog E., März R. [102], Dai L. [101], Hairer E., Wanner G. [103], Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. [98], Kaczorek T. [104], Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. [97], Чистяков В.Ф. [96]. Наиболее полная библиография по этим системам содержится в работах [26,105,103].

При исследовании таких систем возникает множество проблем (см., например, [81]):

а) существование решений, их единственность и способы построения (аналитические, численные);

б) управляемость, управление спектром и построение передаточной матрицы (если $f(t)=Bu(t)$, B – $n\times r$–матрица, $u(t)$ – r-мерное управление) и др.

В данном разделе рассмотрим лишь некоторые аспекты обозначенных выше проблем, ибо в отличие от обыкновенных дифференциальных систем ($\det A_0\neq 0$), система (2.1), (2.2) не для каждого начального состояния (2.2) и неоднородности $f(t)$, $t\in I$ имеет решение, тем более единственное.

Действительно, рассмотрим частный случай системы (2.1), (2.2), а именно: простейшую дифференциально-алгебраическую систему вида

$$A_0\dot{x}(t) = f(t),\ t\in I, \tag{2.3}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2.4}$$

при условии, что $f(t)$ – кусочно-непрерывная n–вектор-функция.

Требуется выяснить вопрос о существовании и единственности решений этой системы.

Матрицу $X\in \boldsymbol{C}_{n,n}$ назовем полуобратной для матрицы $A_0\in \boldsymbol{C}_{n,n}$ и обозначим её через A_0^{-}, если она удовлетворяет матричному уравнению $A_0XA_0=A_0$. Известно [12], что для любой матрицы A_0 матричное уравнение $A_0XA_0=A_0$ разрешимо относительно X и это решение определяется неоднозначным образом. Если матрица A_0 является невырожденной, то $A_0^{-}=A_0^{-1}$.

Теорема 2.1[89]**.** Для того чтобы задача (2.3), (2.4) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы для любого $t\in I$ функция $f(t)$ удовлетворяла бы равенству

$$(E_n - A_0A_0^{-})f(t) = 0. \tag{2.5}$$

Общее решение задачи (2.3), (2.4) в этом случае описывается формулой

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A_0^- f(\tau)d\tau + \int_0^t (E_n - A_0^- A_0)u(\tau)d\tau,$$

где E_n – единичная $n\times n$–матрица, а $u(t)$, $t\geq 0$ – произвольная n–вектор-функция кусочно-непрерывная на промежутке I.

Отметим, что хотя полуобратная матрица A_0^- определяется неоднозначным образом результаты теоремы 2.1 не зависят от её выбора и задача Коши (2.3), (2.4) имеет неединственное решение. Если матрица A_0 является невырожденной, то для любой кусочно-непрерывной n–вектор-функции $f(t)$, $t\in I$, существует единственное решение, которое описывается известной формулой $x(t) = x_0 + \int_0^t A_0^{-1} f(\tau)d\tau.$

Введем несколько определений и обозначений.

Пару $\{x_0(\cdot), f(t)\}$, состоящую из начального состояния $x_0(\cdot)$ и неоднородности $f(t)$, $t\in I$ будем называть допустимой, если система (2.1), (2.2) имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t\in I$, такое, что $x(t)=\varphi(t)$ при $t\in[-h,0)$ и $x(0)=x_0$. Если для каждой допустимой пары $\{x_0(\cdot), f(t)\}$ система (2.1), (2.2) имеет единственное решение, то её будем называть совместной. Отметим, что указанное определение является корректным ибо ясно, что множество всех допустимых пар не является пустым.

Обозначим $\Omega(\lambda)=\lambda A_0+A+\exp(-\lambda h)A_1$, где $\lambda\in\boldsymbol{C}$. Тройку матриц (A_0, A, A_1) назовем регулярной, если найдется $\lambda^*\in\boldsymbol{C}$ такое, что матрица $\Omega(\lambda^*)$ обратима, т.е. $\det\Omega(\lambda^*)\neq 0$. Систему (2.1) будем называть регулярной, если соответствующая ей тройка матриц является регулярной.

Теорема 2.2 [86]. Для того чтобы стационарная система (2.1), (2.2) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярной.

Отсюда, так как система (2.3), (2.4) является нерегулярной, то она несовместна и поэтому задача Коши имеет не единственное решение.

Этот факт значительно усложняет исследования дифференциально-алгебраических систем, поэтому большинство работ связанных со стационарными дифференциально-алгебраическими системами посвящено именно регулярным системам.

Итак, пусть система (2.1), (2.2) является регулярной, матрица A_1=0 и $f(t)$=0, для всех $t\in I$, т.е. рассмотрим однородную систему

$$A_0\dot{x}(t) + Ax(t) = 0,\ t\in I, \tag{2.6}$$

при условии, что найдется $\lambda^*\in C$ такое, что

$$\det\Omega(\lambda^*)=\det(\lambda^* A_0+A)\neq 0. \tag{2.7}$$

Для регулярных систем Л.А.Альсевич и В.И.Булатов получили следующий результат.

Теорема 2.3 [4]. Решение $x(t)$ однородной регулярной системы представимо в виде

$$x(t) = \lim_{p\to 0}(e^{t(-\lambda^* E+(G+pE)^{-1})}x_0), \tag{2.8}$$

где число λ^* определяется соотношением (2.7), а $G=(\lambda^* A_0+A)^{-1}A$.

Хотя в представлении (2.8) решения $x(t)$ регулярной системы (2.6), (2.4) фигурирует произвольное число λ^*, удовлетворяющее (2.7), можно показать, что предельная функция $x(t)$ в (2.8) не зависит от λ^* и поэтому может быть найдено по формуле $x(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(e^{-t(A_0+\varepsilon A)^{-1}A}x_0)$.

В работе [20] В.И.Булатовым введено понятие обобщенной фундаментальной матрицы системы (2.6): матричную функцию $\Phi(t)=\begin{cases}F(t),\text{ для } t>0\\ G(t),\text{ для } t<0,\end{cases}$ $\Phi(0)=F(+0)=G(-0)$, где $F(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\exp((A_0-\varepsilon A)^{-1}At)$, $G(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to-0}\exp((A_0-\varepsilon A)^{-1}At)$ назовем обобщенной фундаментальной матрицей однородной системы (2.6).

Теорема 2.4 [20]. Регулярная система (2.6) тогда и только тогда имеет решение $x(t)$, соответствующее начальному условию (2.4), когда $\Phi(0)x_0=x_0$, при этом $x(t)=\Phi(t)x_0$, где $\Phi(t)$ – обобщенная фундаментальная матрица рассматриваемой системы.

Рассмотрим теперь неоднородную регулярную систему

$$A_0\dot{x}(t)+Ax(t)=f(t),\ t\in I, \tag{2.9}$$

с начальным условием (2.4).

Проблема построения решения системы (2.9) исследовалась во многих работах, в частности в работах [12,29,98,99,102,103]. Например, в [29] общее решение системы (2.9) строится на основании теории элементарных делителей пучка матриц λA_0+A, в работе [99] решение в замкнутой форме получено с привлечением специальной матрицы – матрицы Дразина; конструктивному построению решений посвящены работы [12,98,102,103]: с использованием цепочек полуобратных матриц [12] или численных методов [98,102,103].

В отличии от указанных в работе [83] на основании предположения, что $f(t)$ $t\in I$, является дифференцируемой функцией и при помощи теории полуобратных матриц решение строится в замкнутой форме. Предлагаемый способ построения решения системы (2.9) не требует k_0 раз дифференцируемости функций $f(t)$ ($k_0=\mathrm{ind}A_0$).

Прейдем теперь к построению решения регулярной системы (2.1), (2.2) при условии, что функция $\varphi(t)$, $t\in[-h,0)$, является кусочно-непрерывной.

Наименьшее неотрицательное число k_0 называется индексом матрицы A_0, если $\mathrm{rank}A_0^{k_0+1}=\mathrm{rank}A_0^{k_0}$. Индекс матрицы A_0 обозначается $\mathrm{ind}A_0$.

Матрица X, являющаяся решением трех матричных уравнений $XA_0=A_0X$, $XA_0X=X$, $XA_0^{k_0+1}=A_0^{k_0}$, где $k_0=\mathrm{ind}A_0$, называется обратной матрицей Дразина для матрицы A_0. Для любой квадратной матрицы обратная матрица Дразина существует, единственна и обозначается A_0^D [99]. Используя матрицу Дразина, в работах [37,38], совместно с В.В.Крахотко, доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.5 [37,38]. Пусть для любого m, $m\in\boldsymbol{C}$ выполняются условия

$$A_0(A+mA_1)=(A+mA_1)A_0,\ \ \mathrm{Ker}A_0\cap\mathrm{Ker}(A+mA_1)=\{0\}. \tag{2.10}$$

Тогда система (2.1) совместна и вектор-функция

$$x(t)=F(t)A_0^DA_0q+\int_{-h}^{0}F(t-\tau-h)A_0^DA_1A_0^DA_0\psi(\tau)d\tau,$$

где $q\in\boldsymbol{R}^n$, $\psi(\tau)$, $-h\le\tau<0$, – кусочно-непрерывная функция из множества

$$\{\psi(\cdot):A_1(E_n-A_0^DA_0)\psi(t)\equiv 0,-h\le t<0\},\tag{2.11}$$

$F(t)$ – решение уравнения $\dot F(t)+A_0^DAF(t)+A_0^DA_1F(t-h)=0$, $F(0)=E_n$, $F(t)\equiv 0$, $t<0$, является общим решением системы (2.1).

Теорема 2.6 [37,38]. Предположим, что выполнены условия (2.10), и функция $f(t)$, $t\in I$, k_0-1 раз непрерывно дифференцируема, тогда общее решение $x(t)$ системы (2.1) задается формулой

$$\begin{aligned}x(t)=F(t)A_0^DA_0q+\int_{-h}^{0}F(t-\tau-h)A_0^DA_1A_0^DA_0\psi(\tau)d\tau+A_0^D\int_0^tF(t-\tau)f(\tau)d\tau+\\+(E_n-A_0^DA_0)\sum_{i=0}^{k_0-1}(-1)^iA_0^i[(A+e^{-ph}A_1)^D]^{i+1}f^{(i)}(t),\end{aligned}\tag{2.12}$$

где $q\in\boldsymbol{R}^n$, $\psi(\tau)$ – произвольная кусочно-непрерывная функция из множества (2.11),

e^{-ph} – оператор сдвига ($e^{-ph}x(t)\equiv x(t-h)$).

Следствие 1. Пусть матрица $A_1=0$, т.е. система (2.1) имеет вид (2.9). Тогда из формулы (2.12) получаем общее решение системы (2.9):

$$x(t)=e^{A_0^DAt}A_0^DA_0q+A_0^D\int_0^te^{A_0^DA(t-\tau)}f(\tau)d\tau+(E-A_0^DA_0)\sum_{i=0}^{k_0-1}(-1)^iA_0^i(A^D)^{i+1}f^{(i)}(t),$$

которое совпадает с результатом, полученным в работе [99].

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2.6 система (2.1) для каждого начального состояния (2.2) с кусочно-непрерывной функцией $\varphi(\tau)$, $-h\le\tau<0$, принадлежащей множеству (2.11), имеет единственное решение тогда и только тогда, когда вектор x_0 удовлетворяет соотношению

$$x_0=A_0^DA_0z+(E_n-A_0^DA_0)\sum_{i=0}^{k_0-1}(-1)^iA_0^i[(A+e^{-ph}A_1)^D]^{i+1}f^{(i)}(0).\tag{2.13}$$

для некоторого вектора $z\in\boldsymbol{R}^n$.

Решение системы (2.1) при условиях (2.2), (2.10), (2.11) описывается формулой (2.12), если положить $z=q$, $\varphi(\tau)=\psi(\tau)$, $\tau\in[-h,0[$.

Управляемые системы. Рассмотрим линейную стационарную систему

$$D(p)x(t)=Bu(t).\tag{2.14}$$

Здесь $p=\dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования; $D(\lambda)$ – $n\times n$ – матрица, элементами которой являются аналитические функции комплексной переменной λ; $x-n$ – вектор; $u-r$ – вектор; B – постоянная $n\times r$ – матрица. Спектром системы (2.14) назовем множество Λ корней характеристического уравнения $\Delta(\lambda)\equiv\det D(\lambda)=0$. Набор $\Lambda_m=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}\subset\Lambda$ считаем согласованным, если числа с ненулевой мнимой частью входят в него комплексно-сопряженными парами. Пусть $M_m=\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}$ – другой наперед заданный согласованный набор, причем множества M_m и Λ_m не имеют общих точек. Требуется выбрать вещественное управление в виде

$$u(t)=R(p)x(t), \tag{2.15}$$

где $R(\lambda)$ – аналитическая $r\times n$ – матрица, чтобы спектр замкнутой системы (2.14), (2.15) имел вид $(\Lambda\backslash\Lambda_m)\cup M_m$. Решению этой и некоторых других задач посвящены, в частности, работы В.И.Булатова [13–19].

Теорема 2.7 [13]. Для того, чтобы указанная задача управления спектром имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $c^T B\neq 0$ для всех левых собственных векторов c оператора $D(\lambda)$, соответствующих элементам множества Λ_m.

Рассмотрим систему управления

$$A_0\,\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \quad t\in I, \tag{2.16}$$

с начальным условием (2.4) и соответствующую ей дискретную систему

$$A_0 x(t+1)=Ax(t)+Bu(t), \quad t\in \mathbf{Z}^+=\{0,1,2,...\}. \tag{2.17}$$

Считаем, что системы (2.16), (2.17) являются регулярными, т.е. найдется $\lambda^*\in \boldsymbol{C}$ такое, что

$$\det(\lambda^* A_0-A)\neq 0. \tag{2.18}$$

Для системы (2.16), (2.17) введем определяющее уравнение

$$A_0 x_{k+1}=Ax_k+Bu_k,\ k=\overline{0,n-1}, \tag{2.19}$$

и рассмотрим функцию

$$f(\lambda)=\frac{h(\lambda)}{g(\lambda)}, \tag{2.20}$$

где $h(\lambda)$ является наибольшим общим делителем миноров n-го порядка λ-матрицы $[\lambda A-A_0;B]$, а $g(\lambda)$ означает наибольший общий делитель миноров n-го порядка расширенной λ-матрицы $[\lambda A-A_0;B;\,Ax_0]$.

Теорема 2.8 [18]. Следующие утверждения равносильны:

(a) Регулярная дискретная система (2.17) имеет решение, соответствующее начальному условию (2.4).

(b) При заданном n–векторе x_0 и выполнении (2.18) определяющее уравнение (2.19) разрешимо относительно n-векторов x_1, x_2,...,x_n и r-векторов u_0, u_1,...,u_{n-1}.

(c) Для регулярных систем (2.16) и (2.17) с начальным условием (2.4) полином (2.20) удовлетворяет соотношению $f(0)\neq 0$.

(d) Линейная регулярная система (2.16) имеет бесконечно дифференцируемое решение $x(t)$, соответствующее начальному условию (2.4).

Систему (2.16) будем считать управляемой, если для любого n–вектора x_0 найдутся число $t_1>0$ и достаточно гладкие вектор-функции $x(t)$, $u(t)$, $t\in I$, такие, что $x(0)=x_0$, $x(t_1)=0$.

Предположим, что система (2.16) является регулярной и пусть $P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k P_k$, где P_k – соответствующие $n\times n$–матрицы, $k=\overline{0,n-1}$, есть присоединенная матрица к матрице (λA_0-A).

Теорема 2.9 [17]. Регулярная система (2.16) управляема тогда и только тогда, когда rank$[P_0B; P_1B; \ldots; P_{n-1}B]=n$.

Обозначим через $L(P)$ линейное пространство, натянутое на вектор-столбцы матрицы $P=[H;GH;\ldots;G^{n-1}H]$, где $G=(A-\lambda^*A_0)^{-1}A_0$, $H=(A-\lambda^*A_0)^{-1}B$.

Систему (2.16) назовем условно управляемой в множестве $M\subset\mathbb{R}^n$, если для любого $x_0\in M$ начальное условие (2.4) системы (2.16) управляемо.

Теорема 2.10 [19]. Регулярная система (2.16) условно управляема в множестве $M\subset\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $M\subset L(P)$.

Рассмотрим теперь систему с запаздыванием

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t),\ t\in I, \tag{2.21}$$

с выходом

$$y(t)=Cx(t), \tag{2.22}$$

где C – $m\times n$ – матрица.

Для системы (2.21) требуется выбрать целые неотрицательные числа $\alpha,\beta,k,l,$ и соответствующие $r\times r$–матрицы G_{ij} и $r\times m$–матрицы Q_{ij} так, чтобы замыкание системы (2.21), (2.22) регулятором

$$G(p)u(t)=Q(p)y(t), \tag{2.23}$$

где $G(\lambda)=\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{j=0}^{k}G_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}$, $Q(\lambda)=\sum_{i=0}^{\beta}\sum_{j=0}^{k}Q_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}$ приводило к системе (2.21–2.23), спектр которой конечен, т.е. конечно множество корней характеристической функции $\delta(\lambda)=\det\begin{bmatrix} D(\lambda); & B \\ Q(\lambda)C; & G(\lambda)\end{bmatrix}$, где $D(\lambda)=\lambda A_0-A-A_1e^{-\lambda h}$.

Система (2.21) в этом случае называется спектрально приводимой в классе регуляторов (2.23) по выходу (2.22).

Теорема 2.11 [16]. Дифференциально-алгебраическая система (2.21) спектрально приводима в классе динамических регуляторов (2.23) по выходу (2.22) тогда и только тогда, когда конечно каждое из множеств общих корней миноров n-го порядка матриц $[D(\lambda);B]$ и $\begin{bmatrix} D(\lambda) \\ C \end{bmatrix}$.

Систему (2.21) назовем полностью управляемой, если для каждого начального условия (2.2) найдется момент $t_1>0$ и пара $\{x(t);u(t)\}$ из кусочно-непрерывной r–вектор-функции $u(t)$ и дифференцируемой n–вектор-функции $x(t)$, удовлетворяющих системе (2.21) и соотношению $x(t)=0$ при $t>t_1$.

Теорема 2.12 [14]. Система (2.21) тогда и только тогда полностью управляема, когда

$$\begin{cases} rank[A_0;B] = rank[A_0;A;A_1;B], \\ \underset{\forall\lambda}{rank}[\lambda A_0 - A - A_1e^{-\lambda h};B] = rank[A_0;A;A_1;B]. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь дискретную систему управления вида

$$A_0x(t+1)=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t),\ t\in\mathbf{Z}^+, \tag{2.24}$$

$$x_0(\cdot)=\{x(\tau)=q_\tau,\ \tau=-h,-h+1,\ldots,0\}, \tag{2.25}$$

где $x,q_\tau\in\boldsymbol{R}^n$; $u\in\boldsymbol{R}^m$; а запаздывание $h\in N(h\geq1)$.

Пусть rankA_0=r<n. Без ограничения общности считаем, что матрица A_0 имеет вид $A_0=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ \hline A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)} \end{array}\right]$, где квадратная матрица $r\times r$–матрица $A_{11}^{(0)}$ имеет полный ранг. Так как $\operatorname{rank} A_{11}^{(0)}=r$, то это влечёт условие $A_{22}^{(0)}-A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}=0.$

В соответствии с блочным разбиением матрицы A_0 представим матрицы A, A_1, B в виде $A=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$, $A_1=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(1)} & A_{21}^{(1)} \\ \hline A_{12}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{array}\right]$, $B=\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]$, и введём матрицы $F_{ij},\ i,j=\overline{1,2}$:

$$F_{11}=A_{11},\ F_{12}=-A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}+A_{12},\ F_{21}=-A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11}+A_{21},$$

$$F_{22}=A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}-(A_{21}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}+A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12})+A_{22}.$$

Следуя [106], будем говорить, что система (2.24) является каузальной (causal systems), если матрица F_{22} является невырожденной. Условие каузальности системы (2.24) обеспечивает регулярность тройки матриц (A_0,A,A_1), которая в свою очередь является необходимым и достаточным условием совместности системы (2.24).

Обозначим $\left[\begin{array}{c|c} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \hline \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{array}\right]=D_1\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ \hline A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{array}\right]D_2,\left[\begin{array}{c} \bar{B}_1 \\ \hline \bar{B}_1 \end{array}\right]=D_1\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right]$,

$\Omega=A_{11}^{(0)^{-1}}(F_{11}-F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})$,

$D_1=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)^{-1}} & 0 \\ \hline 0 & F_{22}^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & -F_{12}F_{22}^{-1} \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline -A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}} & E_{n-r} \end{array}\right]$,

$D_2=\left[\begin{array}{c|c} E_r & -A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{0} \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline -F_{22}^{-1}F_{21} & E_{n-r} \end{array}\right]$,

а также введём в рассмотрение так называемые определяющие уравнения:

$$Y_{t+1}^i=\Omega Y_t^i+\Omega_{11}Y_{t-h}^i+\Omega_{12}Z_{t-h}^i,$$

$$Z_t^i=-\Omega_{21}Y_{t-h}^i-\Omega_{22}Z_{t-h}^i,\ i=\overline{0,3},\ t=1,2,...,$$

при условиях:

$$Y_0^0=E_{r,r},Y_1^0=\Omega,Z_0^0=0;\ Y_0^{-1}=0,Y_1^1=\Omega_{11},Z_0^1=-\Omega_{21};$$

$$Y_0^2=0,Y_1^2=\Omega_{12},Z_0^2=-\Omega_{22};\ Y_0^3=0,Y_1^3=\bar{B}_1,Z_0^3=-\bar{B}_2,\ Z_t^i=Y_t^i=0,\ \text{при}\,t<0.$$

Вектор $x\in\boldsymbol{R}^n$ является допустимым в момент времени t, $t\in\mathbf{Z}^+$ для системы (2.24), если существуют векторы $\bar{x}\in\boldsymbol{R}^n$ и $u\in\boldsymbol{R}^m$ такие, что

$$A_0\bar{x}(t+1)=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t).$$

Пусть $R_0(t)$ – множество всех допустимых векторов системы (2.24) в момент t.

Можно точно описать множество $R_0(t)$ допустимых векторов $x(t)$ для системы (2.24) в любой момент времени t, $t\in\mathbf{Z}^+$. Так, например, множество $R_0(0)$ начальных векторов в момент времени t=0 описывается формулой

$q_0 = D_2[y^T(0) \mid z^T(0)]^T$, где $y(0)$ – произвольный r-вектор, а $(n–r)$–вектор $z(0)$ принадлежит множеству

$$\{z(0) \mid z(0) = -[\Omega_{21}, \Omega_{22}]D_2^{-1}q_{-h} - \overline{B}_2 u(0),\ u \in \boldsymbol{R}^m\}.$$

Система (2.24) называется R_0–управляемой в момент времени t_1 (t_1–заданное время, $t_1 \in N$), если для любого допустимого начального состояния (2.25) и любого вектора $x_1 \in R_0(t_1)$ существует последовательность управлений $\{u(0),u(1),...,u(t_1\text{-}1)\}$ такая, что решение системы (2.24), (2.25) удовлетворяет условию $x(t_1)=x_1$.

Система (2.24) называется t_1 – управляемой, если она R_0 – управляема в момент t_1 и $R_0(t_1)$ совпадает со всем пространством $\boldsymbol{R}^n$.

Теорема 2.13 [85]. Каузальная система (2.24) R_0 – управляема в момент времени t_1 тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\{Y_1^3, Y_2^3, ..., Y_{t_1}^3\} = \operatorname{rank} A_0$.

Теорема 2.14 [85]. Каузальная система (2.24) t_1–управляема тогда и только тогда, когда она R_0–управляема в момент t_1 и $\operatorname{rank}\{Z_0^3, Z_1^3, ..., Z_{t_1}^3\} = n - \operatorname{rank} A_0$.

Рассмотрим не разрешённую относительно производной систему управления нейтрального типа, вида

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h) + Bu(t),\ t \in T, \tag{2.26}$$

$$x_0(\cdot)=\{x(t)=\varphi(t),\ -h \le t \le 0\}, \tag{2.27}$$

с выходом (2.22), где $x \in \boldsymbol{R}^n$, $u \in \boldsymbol{R}^m$, $y \in \boldsymbol{R}^m$; A_0,A,A_1,A_2,B,C – заданные матрицы соответствующих размерностей; $\varphi(t)$ – абсолютно-непрерывная на отрезке $[0,h]$ функция. Пусть система совместна, т.е. существует число $\lambda^* \in \boldsymbol{C}$ такое, что матрица $\Omega(\lambda^*)=\lambda^*A_0+A+A_1\exp(-\lambda^*h)+\lambda^*A_2\exp(-\lambda^*h)$ является невырожденной. Укажем алгоритм построения передаточной матрицы

$$G(p)=C(pA_0-A-A_1\exp(-ph)-pA_2\exp(-ph))^{-1}B \tag{2.28}$$

системы (2.26),(2.27) с выходом (2.22). Передаточные матрицы широко применяются в теории автоматического регулирования и являются одним из основных инструментов анализа системы (2.26) на устойчивость.

Метод построения такой передаточной матрицы для систем с запаздыванием разработан в [84]. Следуя этой работе введём обозначения:

$\mu=p+\lambda^*$, $\nu=\exp(-\lambda^*h)\text{-}\exp(-ph)$, $\delta=\lambda^*\exp(-\lambda^*h)\text{-}p\exp(-ph)$, $\hat{A}_i=\Omega^{-1}(\lambda^*)A_i$, $i=\overline{0,2}$.

Пусть далее $n\times n$–матрицы B_{n-1}, $B_{\alpha\beta\gamma}$ и числа $a_{\alpha\beta\gamma}$ вычисляются рекуррентным образом по матрицам $\hat{A}_0$, $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$:

$$B_{n-1}=E_n,$$

$$a_{1,0,0}^{(n-1)} = -Sp\hat{A}_0B_{n-1}, \qquad B_{1,0,0}^{(n-2)} = a_{1,0,0}^{(n-2)}E_n + \hat{A}_0B_{n-1},$$

$$a_{0,1,0}^{(n-1)} = -Sp\hat{A}_1B_{n-1}, \qquad B_{0,1,0}^{(n-2)} = a_{0,1,0}^{(n-2)}E_n + \hat{A}_1B_{n-1},$$

$$a_{0,0,1}^{(n-1)} = -Sp\hat{A}_2B_{n-1}; \qquad B_{0,0,1}^{(n-2)} = a_{0,0,1}^{(n-1)}E_n + \hat{A}_2B_{n-1};$$

$$a_{n-i,0,0}^{(i)} = -\frac{1}{n-i}Sp(\hat{A}_0B_{n-i-1,0,0}^{(i)}), \qquad B_{n-j-1,0,0}^{(j)} = a_{n-j-1,0,0}^{(j+1)}E_n + \hat{A}_0B_{n-j-2,0,0}^{(j+1)},$$

$$a_{0,n-i,0}^{(i)} = -\frac{1}{n-i}Sp(\hat{A}_1B_{0,n-i-1,0}^{(i)}), \qquad B_{0,n-j-1,0}^{(j)} = a_{0,n-j-1,0}^{(j+1)}E_n + \hat{A}_1B_{0,n-j-2,0}^{(j+1)},$$

$$a^{(i)}_{0,0,n-i} = -\frac{1}{n-i} Sp(\hat{A}_2 B^{(i)}_{0,0,n-i-1}),\qquad B^{(j)}_{0,0,n-j-1} = a^{(j+1)}_{0,0,n-j-1} E_n + \hat{A}_2 B^{(j+1)}_{0,0,n-j-2},$$

$$a^{(i)}_{\alpha,\beta,\gamma} = -\frac{1}{n-i} Sp(\hat{A}_0 B^{(i)}_{\alpha-1,\beta,\gamma} + \hat{A}_1 B^{(j+1)}_{\alpha,\beta-1,\gamma} + \hat{A}_2 B^{(j+1)}_{\alpha,\beta,\gamma-1},\qquad B^{(j)}_{\alpha.\beta,\gamma} = a^{(j+1)}_{\alpha,\beta,\gamma} E_n + \hat{A}_0 B^{(j+1)}_{\alpha-1,\beta,\gamma} + \hat{A}_1 B^{(i)}_{\alpha,\beta-1,\gamma} + \hat{A}_2 B^{(i)}_{\alpha,\beta,\gamma-1},$$

$$i = \overline{n-2,0},\ \ \alpha,\beta,\gamma = \overline{n-i-1,0};\qquad j = \overline{n-3,0},\ \ \alpha,\beta,\gamma = \overline{n-2-j,0},$$

причём считается, что $B^{(i)}_{\alpha\beta\gamma} = 0$, если один из индексов α,β или γ меньше нуля.

Теорема 2.15 [86, 88]. Для передаточной матрицы $G(p)$ системы (2.26) верна формула

$$G(p) = \left(\hat{B}_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=i} \hat{B}_{\alpha\beta\gamma} \mu^{\alpha} \upsilon^{\beta} \delta^{\gamma} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha+\beta+\gamma=i} a^{(n-i)}_{\alpha\beta\gamma} \mu^{\alpha} \upsilon^{\beta} \delta^{\gamma} \right)^{-1}, \tag{2.29}$$

где $\hat{B}_{n-1} = -CB_{n-1}\Omega^{-1}(\lambda^*)B,\ \hat{B}^{(j)}_{\alpha\beta\gamma} = -CB^{(j)}_{\alpha\beta\gamma}\Omega^{-1}(\lambda^*)B,\ i = \overline{n-2,0},\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{n-1-j,0}.$

Отметим, что вычисление матрицы $G(p)$ по формуле (2.29) не зависит от выбора числа $\lambda^* \in \boldsymbol{C}$ обеспечивающего невырожденность матрицы $\Omega(\lambda)$ и может быть перенесено на дифференциально-алгебраические системы более сложного вида.

Нестационарные динамические системы. Рассмотрим систему

$$A_0(t)\dot{x}(t) + A(t)x(t) = 0,\ t \in I, \tag{2.30}$$

где $A_0(t)$, $A(t)$ – абсолютно непрерывные $n\times n$ матричные функции, ограниченные на промежутке I.

Абсолютно непрерывную матричную функцию X размерности $n\times k$ назовем фундаментальной матрицей решений системы (2.30), если для любого постоянного вектора c размерности k функция $x(t)=X(t)c$ является решением системы (2.30), и для любого решения $x(t)$ системы (2.30) существует единственный постоянный вектор c такой, что $x(t)=X(t)c$. В дальнейшем рассматриваем только такие системы, для которых существуют фундаментальные матрицы решений.

Аналогично как и для линейных дифференциальных систем введем понятие асимптотической эквивалентности для линейных дифференциально-алгебраических систем.

Системы (2.30) и

$$P(t)\,\dot{y} + Q(t)y=0,\ t\in I, \tag{2.31}$$

где P и Q - абсолютно непрерывные $n\times n$ матричные функции, ограниченные на промежутке I, причем $\det P(t)=0$ при всех $t\in I$, назовем асимптотически эквивалентными, если существует такая матрица Ляпунова L, что для любого решения y системы (2.31) функция $x=Ly$ – решение системы (2.30), и для любого решения x системы (2.30) функция $y=L^{-1}x$ – решение системы (2.31).

При определенных условиях на коэффициенты (см., например, [107]) система (2.30) оказывается асимптотически эквивалентной системе (2.31), где матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ имеют вид

$$P(t)=\mathrm{diag}\{O_{n-k,n-k}, E_{n-k}\},\ \ Q(t)=\mathrm{diag}\{E_k, Q_0(t)\}, \tag{2.32}$$

и $Q_0(t)$ – $k\times k$ матричная функция, локально суммируемая и ограниченная на I.

Специальная структура приведенной системы позволяет применить к исследованию систем линейных уравнений, не разрешенных относительно производных, методику, разработанную для исследования асимптотических свойств решений обыкновенных дифференциальных систем, и тем самым, в частности, получить условия асимптотической эквивалентности систем вида (2.30) и систем с кусочно-постоянными [107] и постоянными матрицами коэффициентов [66,68]. В частности, систему (2.30) назовем приводимой, если она асимптотически эквивалентна системе (2.31) с постоянными матрицами коэффициентов P и Q. Аналогом критерия Еругина приводимости обыкновенных линейных дифференциальных систем является следующее утверждение.

Теорема 2.16 [65]. Для того чтобы система (2.30) была приводима к системе (2.31), коэффициенты которой удовлетворяют (2.32) с постоянной на I матрицей $Q_0(t)$, $Q_0(t)\equiv Q_0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали матрица Ляпунова L и фундаментальная матрица X решений системы (2.30) такие, что имеет место равенство

$$X(t) = L(t)\begin{pmatrix} O \\ e^{Qt} \end{pmatrix},$$

где O – нулевая матрица, а постоянная матрица Q такова, что системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{u}=-Q_0u$ и $\dot{v}=Qv$ асимптотически эквивалентны.

Система (2.30) с постоянными матрицами A_0 и A ($p(\lambda)=\det(\Omega(\lambda))$, $k=\deg p(\lambda)$, $p(\lambda)\not\equiv 0$) может быть приведена к указанному в теореме виду, где в качестве матрицы Q_0 может быть использована постоянная $k\times k$ матрица K, представляющая собой действительную часть некоторой матрицы, имеющей нормальную жорданову форму. Кроме того, для асимптотически эквивалентных систем с постоянными коэффициентами матрица K находится единственным образом, что устанавливает вид полной системы асимптотических инвариантов для приводимых систем линейных уравнений, не разрешенных относительно производных.

Следующий результат является аналогом теоремы Флоке-Ляпунова о приводимости линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.

Матричную функцию $A_0(t){:}I\to\boldsymbol{R}^{n\times n}$ назовем матричной функцией со стабильным рангом, если $\operatorname{rank}A_0(t)=k$, $0\le k\le n$, $\forall t\in I$, и существует $k\times k$–подматрица $\widetilde{A}_0(t)$ матрицы $A_0(t)$ такая, что $\det\widetilde{A}_0(t)\neq 0$ $\forall t\in I$.

Как и ранее, функцию $p(\lambda)=\det(\Omega(\lambda))$ будем рассматривать как многочлен от λ с переменными коэффициентами, причем будем предполагать, что $p(\lambda)\not\equiv 0$.

Теорема 2.17. [68]. Пусть матрицы $A_0(t)$ и $A(t)$ коэффициентов системы (2.30) являются абсолютно непрерывными матричными функциями, производные которых ограничены на $\mathbb{R}$. Если $A_0(t)$ и $A(t)$ – периодические матричные функции с соизмеримыми периодами, и матричная функция $A_0(t)$ обладает стабильностью ранга, причем $\operatorname{rank}A_0(t)=\deg p(\lambda)$ при всех действительных t, то система (2.30) является приводимой.

Наряду с аналитическим представлением решений дифференциально-алгебраических систем, в последние двадцать лет в связи с развитием персональных компьютеров, всё большую важность приобретают численные методы их решения.

Для нестационарной системы с запаздыванием

$$A_0(t)\dot{x}(t) + A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) = f(t),\ t \in I, \tag{2.33}$$

с начальным состоянием (2.2) и при условии, что $A_0(t)$, $A(t)$, $A_1(t)$ – $n\times n$ – матрицы действительной переменной t, $f(t)$, $\varphi(t)$ – кусочно-непрерывные n – вектор-функции и система (2.33), (2.2) является совместной, разработан численный метод построения её решения [87]. Решение строится в классе Уолш функций (Walsh functions [111, 100]). Базой для построения множества $\{w_i(t)\}$ Уолш функций служит множество $\{r_i(t)\}$ функций Радемахера, рассматриваемых на полуинтервале $[0,1)$. В общем случае функция $r_i(t)$ представляет собой цепь единичных импульсов с 2^{i-1} циклом на $[0,1)$ и принимающая последовательно значения 1 или –1. Система функций Радемахера $\{r_i(t)\}$ является ортонормированной и неполной в гильбертовом пространстве $L_2([0,1))$. В тоже время как множество Уолш функций $\{w_i(t)\}$, где $w_i(t) = (r_q(t))^{\alpha}(r_{q-1}(t))^{\beta}(r_{q-2}(t))^{\gamma}\ldots$, $q = [\log_2 i] + 1$, $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ – двоичное представление числа i: $i=\alpha\cdot 2^{q-1}+\beta\cdot 2^{q-2}+\gamma\cdot 2^{q-3}+\ldots$, является полной ортонормированной системой в $L_2([0,1))$.

Показано [87], что точное решение системы (2.33), (2.2) может быть приближено в средне-квадратичном с высокой степенью точности n – вектор-функций, представляющий собой сходящийся ряд по ортонормированной системе Уолш функций.

3. Асимптотические свойства решений дифференциальных включений

Развитие общей теории дифференциальных включений и исследование асимптотических характеристик их решений последние четыре десятилетия шло параллельно, поэтому и мы будем следовать этой традиции и изложим в этом параграфе результаты по общей и асимптотической теории дифференциальных включений.

Пусть E – сепарабельное банахово пространство, $T=[0,a]$ – отрезок в R; μ – мера Лебега на T; $\mathrm{cl}(E)$, $\mathrm{comp}(E)$, $\mathrm{conv}(E)$ – соответственно метрические пространства всех непустых замкнутых, непустых компактных, непустых компактных выпуклых подмножеств из E с метрикой Хаусдорфа $\alpha(A,B)$; $R^{d\times v}$ – пространство действительных $d\times v$ матриц с евклидовой нормой; $S(x_0,r)$ – открытый шар в E радиуса r с центром в точке x_0; $[A]_\varepsilon$ – ε – окрестность множества A.

Рассмотрим следующую задачу

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

где $F{:}T\times S(x_0,r)\to \mathrm{cl}(E)$ – многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке (t,x) множество $F(t,x)\in \mathrm{cl}(E)$. Решением задачи (3.1) считаем абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, определенную на некотором промежутке $[0,t^*|\subset T$, удовлетворяющую соотношению $x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau$, где v($t$) – интегрируемый по Бохнеру селектор отображения $F(t,x(t))$, т.е. $v(t) \in F(t,x(t))$ для почти всех $t \in [0,t^*|$.

Соотношение $\dot{x} \in F(t,x)$ называют дифференциальным включением, к которым, например, сводятся дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, дифференциальные неравенства $F(x,t,\dot{x}) \leq 0$, дифференциальные уравнения с управлением $\dot{x} = f(t,x,u), u \in V(x)$. Результаты теории дифференциальных включений находят широкое применение при изучении систем автоматического регулирования, дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, в теории оптимального управления, в теории дифференциальных игр и уже не возможно представить современную теорию дифференциальных уравнений без теории дифференциальных включений.

Следующая теорема является первой теоремой существования для дифференциальных включений в банаховом пространстве.

Теорема 3.1. [43] Пусть отображение F удовлетворяет следующим условиям:

а) измеримо по t при каждом x;

б) существует интегрируемая по Лебегу функция $k(\cdot){:}T \to R$ такая, что $\alpha(F(t,x),F(t,y)) \leq k(t)\|x-y\|$, $t \in T$, $x,y \in S(x_0,r)$;

в) функция $t \to \alpha(0,F(t,x_0))$ – интегрируемая по Лебегу на T. Тогда задача (3.1) имеет решение.

В теореме 3.2 установлены условия, обеспечивающие непрерывную зависимость решений от правых частей и начальных условий. Для её формулировки наряду с задачей (3.1) рассмотрим возмущенную задачу

$$\dot{x} \in F_1(t,x),\ x(t_0) = x_0',\ \alpha(F(t,x),\ F_1(t,x)) \leq \delta,\ t \in T,\ x \in S(x_0,r),\ \left\|x_0' - x_0\right\| \leq \delta. \quad (3.2)$$

Теорема 3.2. [43] Пусть $x(\cdot){:}T \to E$ – решение задачи (3.1), а отображение F_1 удовлетворяет условиям а) и б) теоремы 3.1. Тогда существует $\delta_0>0$ такое, что для любого δ, $0<\delta\leq\delta_0$, существует решение $x_1(\cdot)$ задачи (3.2), удовлетворяющее условиям $\|x(t)-x_1(t)\| \leq \delta L$, $t \in T$, $\|\dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)\| \leq (k(t)L+1)\delta$ для почти всех $t \in T$, где $L - \exp(\int_0^a k(\tau)d\tau) + \int_0^a \exp(\int_\tau^a k(s)ds)d\tau$.

Связь решений дифференциальных включений $\dot{x} \in F(t,x)$ и $\dot{x} \in \overline{co}F(t,x)$, где $\overline{co}F(t,x)$ – замыкание выпуклой оболочки множества $F(t,x)$, рассматривалась в статьях [43,44], а применение полученных результатов для исследования корректности задач оптимального управления дано в [41,42].

Остановимся теперь на свойствах множеств достижимости дифференциальных включений и на одном способе их приближенного построения.

Рассмотрим абсолютно непрерывную функцию $X{:}T \to \mathrm{comp}(E)$, будем говорить, что отображение $F{:}(t,x) \to F(t,x) \in \mathrm{conv}(E)$ порождено функцией $X(\cdot)$, если F типа Каратеодори и

$$\lim_{h \to +0} h^{-1}(\alpha(X(t+h),\{\cup(x+hF(t,x)) \mid x \in X(t)\})) = 0$$

для почти всех $t\in T$. Семейство $\{F\}$ отображений, порожденных функцией $X(\cdot)$ обозначим ΠX. Рассмотрим включение

$$F\in\Pi X,\ X(0)=X_0, \tag{3.3}$$

где $x_0\in\mathrm{comp}(E)$, $F{:}T\times\to\mathrm{conv}(E)$. R – решением включения (3.3) будем называть всякое абсолютно непрерывное отображение $X{:}T\to\mathrm{comp}(\mathrm{E})$ такое, что $\Pi X\ni F$, $X(0)=X_0$. Через $Y(t)$ обозначим множество достижимости для включения (3.1) в момент t из множества X_0, т.е. $Y(t)=\{x\in E\mid x=x_{x_0}(t),x_0\in X_0\}$, $x_{x_0}(\cdot)$ – решение задачи (3.1) с начальным условием x_0.

Построим множество $\delta_n(t)$ по следующему правилу: возьмем последовательность $(r_n)=(\{t_n^i\mid i=0,1,\dots,n\})$, $n=1,2,\dots,$ разбиений отрезка T точками $0=t_n^0<t_n^1<\dots<t_n^n=a$ такую, что каждое последующее разбиение является измельчением предыдущего и $\max\{t_n^{i+1}-t_n^i\mid i=0,1,\dots,n-1\}\to 0$ при $n\to\infty$, положим $\delta_n(t)=\{\cup(x+A\int_0^t F(\tau,x)d\tau\mid x\in X_0\},t\in[t_n^0,t_n^1]$, имея $\delta_n(t_n^1)$, построим $\delta_n(t)$ для $t\in[t_n^1,t_n^2]$ $\delta_n(t)=\{\cup(x+A\int_{t_n^1}^t F(\tau,x)d\tau\mid x\in\delta_n(t_n^1))\}$, продолжая этот процесс далее построим $\delta_n(t)$ на T, здесь $A\int_{t_n^i}^t F(\tau,x)d\tau$ – интеграл Аумана для многозначного отображения $F(t,x)$.

Теорема 3.3. [46] Пусть отображение $F{:}T\times E\to\mathrm{comp}(E)$ удовлетворяет условиям

i) измеримо по t при каждом $x\in E$,

ii) существует функция Камке ω такая, что

$\alpha(F(t,x),F(t,y))\le\omega(t,\|x-y\|)$

для всех $t\in T$, $x,y\in E$,

iii) отображение $t\to\alpha(0,F(t,0))$ интегрируемо по Лебегу на T. Тогда для любого $X_0\in\mathrm{comp}(E)$ последовательность $\delta_n(\cdot)$, $n=1,2,\dots$, равномерно на T сходится к R–решению включения (3.3), R–решение единственно, непрерывно зависит от начального множества X_0 и $X(t)=Y(t)$ для всех $t\in T$.

Далее с помощью метода знакопостоянных функций Ляпунова исследуется устойчивость решений дифференциальных включений. Метод знакопостоянных функций Ляпунова, начиная с работ [21] интенсивно развивается в Беларуси [22,27].

В теореме 3.4 предполагается, что выполнены следующие условия:

1) $F{:}R\times R^n\to\mathrm{comp}(R^n)$, $F(t,0)\ni 0$;

2) Для любой точки $(t_0,x_0)\in R\times R^n$ существует хотя бы одно решение дифференциального включения(3.1), определенное на некотором отрезке $]t_0-\sigma,\ t_0+\sigma[$, $\sigma>0$;

3) $\forall b>0$, $\forall d>0$, существует интегрируемая по Лебегу функция $n(\cdot)$ такая, что $F(t,x)\subset S(0,n(t))$, $\forall x\in\overline{S}(0,b)$, для почти всех $t\in]-d,d[$;

4) $\forall\varepsilon>0$, $\forall t_0\in R$, $\forall \bar t>t_0$, $\exists\ \delta(\varepsilon,t_0,\bar t)>0$, $\forall x_0\in S(0,\delta)$ каждое решение $x(\cdot;t_0,x_0)$ продолжимо на $[t_0,\bar t]$ и $x(t;t_0,x_0)\in S(0,\varepsilon)$, $\forall t\in[t_0,\bar t]$;

5) существует полунепрерывное сверху L периодичное по t отображение $G:R\times R^n\to\mathrm{conv}(R^n)$ такое, что $\forall b>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(b,\varepsilon)>0$, $\forall t\in R\ \backslash]-\delta,\delta[$, $\forall x\in\bar S(0,b)$ $F(t,x)\subset[G(t,x)]_\varepsilon$;

6) существует непрерывное отображение $V:R\times R^n\to[0,+\infty[$, $V(t,0)=0$, для которого $\exists\sigma_1>0$ такое, что для любого решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (3.1) функция $t\to V(t,x(t))$ не возрастает до тех пор, пока $x(t)\in\bar S(0,\sigma_1)$ и существует непрерывное L–периодическое по t отображение $W:R\times R^n\to[0,+\infty[$ такое, что $\exists\sigma_2>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$, $\forall t\in R\backslash]-\delta,\delta[$, $\forall x\in\bar S(0,\sigma_2)$ $|V(t,x)-W(t,x)|\le\varepsilon$.

Через $m_W^\sigma(t)$ обозначим множество $\{x\in S(0,\sigma)|W(t,x)=0\}$, а через $y^-(\cdot;t_0,x_0)$, $y^+(\cdot;t_0,x_0)$, $y^\infty(\cdot;t_0,x_0)$ – решения дифференциального включения

$$\dot y\in G(t,y) \tag{3.4}$$

с начальным условием $y(t_0)=x_0$, определенные соответственно на промежутках $]-\infty,t_0]$, $[t_0,+\infty[$, $]-\infty,+\infty[$.

Теорема 3.4. [47] Если $\exists\sigma>0$ такое, что дифференциальное включение (3.4) не имеет решений $y^-(\cdot;t_0,x_0)$, отличных от тривиального, удовлетворяющих условию $y^-(t;t_0,x_0)\in m_w^\sigma(t)$, $\forall t\in]-\infty,t_0]$, то нулевое решение включения (3.1) устойчиво.

Если, кроме того, включение (3.4) не имеет решений $y^\infty(\cdot;t_0,x_0)$, отличных от тривиального таких, что $W(t, y^\infty(t;t_0,x_0))=W(t_0,x_0)$, $y^\infty(t;t_0,x_0)\in S(0,\sigma)$, $\forall t\in R$, то нулевое решение дифференциального включения (3.1) асимптотически устойчиво.

В следующей теореме 3.5 предполагается, что выполнены условия 1)-5) и условие 6) $\exists\sigma>0$, существует непрерывно дифференцируемая L–периодическая функция $W:R\times R^n\to[0,+\infty[$, $W(t,0)\equiv0$, такая, что $\forall(t,x)\in R\times\bar S(0,\sigma)$

$$\dot W(t,x)=\sup_{a\in G(t,x)}\left(\frac{\partial W(t,x)}{\partial t}+\left\langle\frac{\partial W(t,x)}{\partial x},a\right\rangle\right)\le 0,\ \mathrm{M}_w^\sigma(t)=\{x\in\bar S(0,\sigma)|\dot W(t,x)=0\}.$$

Теорема 3.5. [47]. Если $\exists\sigma>0$ такое, что дифференциальное включение (3.4) не имеет решений, отличных от тривиального, удовлетворяющих условию $y^-(t;t_0,x_0)\in M_w^\sigma(t)$, $\forall t\in]-\infty,t_0]$, то нулевое решение дифференциального включения (3.1) асимптотически устойчиво.

Метод знакопостоянных функций Ляпунова применим для исследования устойчивости функционально-дифференциальных включений. [48] и для произвольных, введенных в [49] П – систем.

Пусть D – метрическое пространство с метрикой ρ, ϕ – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $(t_0,x_0)\in R\times D$ множество $\phi(t_0,x_0)$ непрерывных функций$\varphi:I_\varphi\to D$, $\varphi(t_0)=x_0$, где I_φ – множество вида $]a_\varphi,b_\varphi[$ с $-\infty\le a_\varphi<+\infty$, либо $[a_\varphi,b_\varphi[$ с $-\infty<a_\varphi<+\infty$, $b_\varphi\le+\infty$, $t_0\in I_\varphi$, причем для любых двух функций φ_1, $\varphi_2\in\phi(t_0,x_0)$ существует точка $t_1\in I_{\varphi_1}\cap I_{\varphi_2}$, в которой $\varphi_1(t_1)\ne\varphi_2(t_1)$. Будем говорить, что на $R\times E$ задана П – система ϕ, если ϕ удовлетворяет следующим аксиомам $A_1)$–$A_4)$.

A$_1$) $\exists L>0$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\forall(t_0,x_0)\in R\times D$ $\phi(t_0+kL,x_0)=\{\psi|\psi(t)=\varphi(t-kL),\ \varphi\in\phi(t_0,x_0)\}$.

A$_2$) $\forall(t_0,x_0)\in R\times D$, $\forall\varphi\in\phi(t_0,x_0)$, $\forall t_1\in \boldsymbol{I}_\varphi$, $\varphi\in\phi(t_1,\varphi(t_1))$.

Функции $\varphi\in\phi(t_0,x_0)$ назовем движениями, сужения φ на $[t_0,b_\varphi[$ – положительными движениями, а сужения φ на $I_\varphi\cap]-\infty,t_0]$ – отрицательными движениями. Если движение $\varphi(\cdot;t_0,x_0)$ определено на $]-\infty,+\infty[$ (соответственно на $[t_0,+\infty[$, $]-\infty,t_0]$), то пишем φ^∞ (соответственно φ^+, φ^-). Сужение φ на промежуток $|a,b|\subset I_\varphi$ называем отрезком движения и обозначаем $\varphi(\cdot;t_0,x_0)|_{|a,b|}$.

A$_3$) Если непрерывная функция $\psi:|c,d|\to D$, $t_0\in|c,d|$, такова, что ее сужение на любой отрезок $[a,b]\subset|c,d|$ является отрезком некоторого движения из $\phi(t_0,\psi(t_0))$, то $\psi(\cdot)$ также является отрезком движения из $\phi(t_0,\psi(t_0))$.

A$_4$) Пусть $N(n)$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, а τ_n – последовательность стремящаяся к нулю при $n\to\infty$. Если последовательность движений $\varphi_n(\cdot;t_0,x_{0n})$, $n\geq1$, $(t_0,x_{0n})\in R\times D$ такова, что последовательность $z_n(\cdot)$, $z_n(t)=\varphi_n(t+N(n)L+\tau_n;t_0,x_0)$, определена и ограничена на $[a,b]\subset R$, то для любого ω, $0<\omega<b-a$, из последовательности $z_n(\cdot)$ можно выбрать последовательность $z_{n_k}(\cdot)$ равномерно сходящуюся на $[a+\omega,b]$ к отрезку $\varphi(\cdot;t_1,q)|_{[a+\omega,b]}$, $t_1\in[a+\omega,b]$, $q=\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}(t_1)$, некоторого движения.

Периодические дифференциальные включения, периодические функционально-дифференциальные включения, системы уравнений с частными производными параболического типа порождают некоторые П–системы. [49].

Введем следующие условия а) и б).

а) существует непрерывная L – периодическая по t функция $V:R\times D\to R$ такая, что при всех $(t,x)\in R\times D$

$$D_+V(t,x)=\lim_{\tau\to t+0}\sup_{y\in X(\tau,t,x)}\frac{1}{\tau-t}(V(\tau,y)-V(t,x))\leq 0.$$

где $X(t;t_0,x_0)$ – множество достижимости П–системы $\{x\in D|x=\varphi(t;t_0,x_0),\ \varphi\in\Phi(t_0,x_0),\ x_0\in X_0\}$ из множества $X_0\subset D$.

Пусть $K:R\to\mathrm{comp}(D)$ – непрерывное L-периодическое отображение. Скажем, что П-система и отображение K удовлетворяют условию б) если, во-первых, $\forall t_0\in[0,L]$, $\forall t_1>t_0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon,t_0,t_1)>0$, $\forall x_0\in[K(t_0)]_\delta$, каждое движение $\varphi(\cdot;t_0,x_0)$ П – системы определено на $[t_0,t_1]$ и $\rho(\varphi(t;t_0,x_0,K(t))<\varepsilon$ при всех $t\in[t_0,t_1]$, во-вторых, существует непрерывная L-периодическая по t функция $W:R\times D\to[0,+\infty[$ и $\sigma>0$ такие, что $W(t,x)=0$ при всех $(t,x)\in\{(t,x)|t\in[0,L],\ x\in K(t)\}$и $D_+W(t,x)\leq0$ при всех $(t,x)\in\in\{(t,x)|t\in[0,\mathrm{L}],\ x\in[K(t))]_\sigma\}$. $m^\sigma(t)=\{x\in[K(t)]_\sigma|W(t,x)=0\}$, $N^\sigma(t)=\{x\in[K(t)]_\sigma|D_+W(t,x)==0\}$.

Пусть $M(t)=\{x\in D|D_+V(t,x)=0\}$ и пусть $P:R\to\mathrm{comp}(E)$ – L – периодическое непрерывное многозначное отображение.

Отображение P назовем q–полуинвариантным, если $X(\mathrm{s}_1+mL;s,P(s))\subset P(s_1)$ при всех $m\in N$, $s_1\in[0,L]$, $s\in[0,L]$ и $P(s_1;s,P(s))\subset P(s_1)$ при всех $s\in[0,L]$, $s_1\in[s,L]$.

Отображение P назовем q–слабоинвариантным, если $\forall s\in[0,L]$, $\forall q\in P(s)$ существует движение $\varphi^\infty(\cdot;s,q)$ такое, что $\varphi^\infty(s_1+mL;\mathrm{s},q)\in P(s_1)$ при всех $s_1\in[0,L]$ и всех $m\in\mathbb{Z}$.

Теорема 3.6. [49] Если выполнено условие а), то любое ограниченное движение $\varphi^{+}(\cdot;\ t_0,x_0)$ П – системы стремится к некоторому q-слабоинвариантному L – периодическому отображению $P{:}R\to\mathrm{comp}(D)$ такому, что $P(t)\subset M(t)$ при всех $t\in[0,L]$. Если, кроме того, все точки $(t_0,x_0)\in R\times D$ являются точками интегральной непрерывности для П-системы, то $P-q$ – полуинвариантное отображение.

Теорема 3.7. [49] Пусть П–система и отображение K удовлетворяют условию б) и пусть существует $\sigma_1>0$ такое, что П–система не имеет отрицательных движений $\varphi^{-}(\cdot;0,x_0)$, удовлетворяющих условию $\forall t\in]-\infty,0]$ $\varphi^{-}(t;0,x_0)\in m^{\sigma_1}(t)\backslash K(t)$. Тогда отображение K является устойчивым. Если, кроме того, П–система не имеет движений $\varphi^{\infty}(\cdot;0,x_0)$ таких, что $\varphi^{\infty}(t;0,x_0)\in N^{\sigma_1}(t)\setminus m^{\sigma_1}(t)$, то отображение K асимптотически устойчиво.

Применяя полученные результаты к системе

$$\begin{cases} \dot{y}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos t}{2+\sin t}y-(2+\cos t)z+y(1-y^2(2+\sin t)-z^2(2+\cos t)), \\ \dot{z}=(2+\sin t)y+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin t}{2+\cos t}z+z(1-y^2(2+\sin t)-z^2(2+\cos t)) \end{cases}$$

и используя для её исследования функцию $V(t,y,z)=(2+\sin t)y^2+((2+\cos t)z^2-1)^2$, устанавливаем, что отображение $M_1(t)=\{(y,z)|(2+\sin t)y^2+(2+\cos t)z^2=1\}$– асимптотически устойчиво, а отображение $M_2(t)=\{(0,0)\}$, $\forall t\in R$, – неустойчивое, кроме того, все решения $(y(\cdot;t_0,y_0),\ z(\cdot;t_0,z_0))$, $|y_0|+|z_0|\neq 0$, стремится к отображению $M_1(t)$ при $t\to\infty$ [50].

Перейдем теперь к исследованию стохастических дифференциальных уравнений и включений.

Рассмотрим уравнение

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dw(t) \tag{3.5}$$

с измеримыми по Борелю функциями $f{:}R_+\times R^d\to R^d$, g: $R_+\times R^d\to R^{d\times d}$. В каждой точке $(t,x)\in R_+\times R^d$ построим множества $F(t,x)$, $\mathrm{A}(t,x)$, которые являются наименьшими выпуклыми замкнутыми множествами, содержащими все предельные точки соответственно $f(t',x')$, $a(t',x')$ при $(t',x')\to(t,x)$, где $a(t,x)=g(t,x)\times g^T(t,x)$. Пусть $H=\{(t,x)|\ \int\limits_{U(t,x)}(\det a(\tau,y))^{-1}d\tau dy=\infty$ для каждой открытой окрестности $U(t,x)$ точки $(t,x)\}$, $H^c=(R_+\times R^d)\backslash H$; $[H]_\alpha^c=(R_+\times R^d)\backslash[H]_\alpha$; $G(t,x)=\{b^{\frac{1}{2}}(t,x)\,|\,b(t,x)\in A(t,x)\}$,

$$F_0(t,x)=\begin{cases} f(t,x),(t,x)\in H^c, \\ F(t,x),(t,x)\in H, \end{cases}\qquad G_0(t,x)=\begin{cases} g(t,x),(t,x)\in H^c, \\ G(t,x),(t,x)\in H. \end{cases}$$

Под α-слабым решением уравнения (3.5) с начальным условием $x_0\in R^d$ понимаем d-мерный непрерывный случайный процесс $x(t),t\in R_+$, определённый на вероятностном пространстве (Ω,F,P) с потоком σ-алгебр F_t такой , что 1) существует F_t-броуновское движение $w(t)$ с $w(0)=0$ п.н. ;2) при каждом t отображение $\omega\to x(t,\ \omega)$ F_t- измеримо, 3) существуют измеримые F_t-согласованные процессы v и u такие, что $v(t,\ \omega)\in F_0(t,x(t,\ \omega))$, $u(t,\ \omega)\in G_0(t,x(t,\ \omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\ \omega)\in R_+\times\Omega$; 4) для каждого t с вероятностью 1

$$x(t)=x_0+\int_0^t v(\tau)d\tau+\int_0^t u(\tau)dW(\tau), \qquad (3.6)$$

где интеграл по $dW(t)$ является интегралом Ито.

Теорема 3.8 [57]. Если функции f и g измеримы по Борелю и ограничены , то $\forall x_0\in R^d$, уравнение (3.5) имеет α-слабое решение с начальным условием x_0.

Если не предполагать, что отображения f и g ограничены, то α-слабые решения могут уходить в бесконечность за конечное время. Для рассмотрения таких решений используем следующее определение β-слабого решения. Пусть $\hat{R}^d=R^d\bigcup\{\Delta\}$–одноточечная компактификация R^d и $\hat{C}(R_+,\hat{R}^d)$={$h|h{:}R_+\to\hat{R}^d$, h–непрерывна и $h(t')=\Delta,\forall t'>t$, если $h(t)=\Delta$}.Для $h\in\hat{C}(R_+,\hat{R}^d)$ полагаем $l(h)=\inf\{t|h(t)=\Delta\}$.

Под β-слабым решением уравнения (3.5) с начальным условием $x_0\in R^d$ понимаем случайный процесс $x(t)$, определённый на вероятностном пространстве (Ω,F,P) с потоком σ-алгебр F_t такой, что существует F_t-броуновское движение $w(t)$, $w(0)=0$ п.н. 2)при каждом t отображении $\omega\to x(t,\omega)\in\hat{R}^d$ F_t-измеримо,3) существуют измеримые F_t-согласованные процессы v и u такие, что для почти всех ω $v(t,\omega)\in$ $\in F_0(t,x(t,\omega))$, $u(t, \omega)\in G_0(t,x(t, \omega))$ для почти всех $t\in[0,l(\omega)[$, где $l(\omega)=l(x(\omega))$, 4) для почти всех ω выполняется равенство (3.6) для всех $t\in[0,l(\omega)[$.

Отображения f и g называем локально ограниченными, если для любого $n\in N$ существует постоянная $k(n)$ такая, что $\|f(t,x)\|+\|g(t,x)\|\le k(n)$ для всех $t\in R_+,x\in S(0,n)$.

Теорема 3.9. [57] Если отображения f и g измеримы по Борелю и локально ограничены, то для любого x_0 существует β-слабое решение уравнения (3.5) с начальным условием x_0.

Заменив в определении β-слабого решения множества F_0 и G_0 на F и G, приходим к определению γ-слабого решения уравнения (3.5). Пусть Π – совокупность вероятностей на $(R^d, B(R^d))$, $B(R^d)$ – борелевская σ–алгебра на R^d, d – метрика Леви-Прохорова на Π, $H_{t_1}(Y)$ – множество вероятностных законов $P^{x(t_1)}$ случайных векторов $x(t_1){:}\Omega\to R^d$ в $(R^d, B(R^d))$, соответствующих всевозможным γ–слабым решениям уравнения (3.5) с начальными условиями $x_0\in Y$.

Теорема 3.10. [57] Пусть отображения f и g измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста. Тогда $\forall t_1>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ такое, что для любых измеримых по Борелю отображений f^* и g^*, $\|f^*(t,x)-f(t,x)\|\le\delta$, $\|g^*(t,x)-g(t,x)\|\le\delta$, $\forall(t,x)\in[0,t_1]\times R^d$; $\forall\, x_0^*$, $\|x_0-x_0^*\|\le\delta$; для любого γ-–слабого решения $x^*(t)$ уравнения $dx(t)=f^*(t,x(t))dt+g^*(t,x(t))dw(t)$, $x^*(0)=x_0^*$, найдется γ-слабое решение $x(t)$ уравнения (3.5) с начальным условием x_0 такое, что $d(P^{x^*(t_1)},P^{x(t_1)})\le\varepsilon$.

Теорема 3.11. [57] Если выполнены условия теоремы 3.10, то для любого $t_1>0$ и любого компактного множества $Y\subset R^d$, $H_{t_1}(Y)$ является компактным множеством в пространстве (Π,d).

Из теоремы 3.9 вытекают теоремы существования решений для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами [95] и для стохастических дифференциальных уравнений как с непрерывными правыми частями, так и с измеримыми коэффициентами, но с невырожденным оператором диффузии [42].

Перейдем теперь к определению и теореме существования сильных решений стохастических дифференциальных уравнений. Пусть заданы: вероятностное пространство (Ω, F, P) с потоком σ-алгебр F_t; F_t – броуновское движение $w(t)$ с $w(0)=0$ п.н.; непрерывные отображения $f{:}R_+\times R^d\to R^d$, $g{:}R_+\times R^d\to R^{d\times d}$, и измеримое по Борелю отображение $f_1{:}R_+\times R^d\to R^d$. Рассмотрим уравнение

$$dx(t)=(f(t,x(t))+f_1(t,x(t))dt+g(t,x(t))dw(t) \tag{3.7}$$

Определим множества $H(t,x)=\{(t,x)|\det a(t,x)=0\}$, где $a(t,x)=g(t,x)\times g^T(t,x)$; $H^c=(R_+\times R^d)\backslash H$; $F_1(t,x)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $f_1(t',x')$ при $(t',x')\to(t,x)$,

$$F_2(t,x)=\begin{cases} f_1(t,x),(t,x)\in H^c, \\ F_1(t,x),(t,x)\in H \end{cases}$$

Под сильным решением уравнения (3.7) с начальным условием x_0 понимаем d-мерный непрерывный случайный процесс $x(t)$ такой, что 1) для каждого t отображение $\omega\to x(t,\omega)$ F_t – измеримо, 2) существует измеримый F_t – согласованный процесс v, $v(t,\omega)\in F_2(t,x(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$ – почти всех $(t,\omega)\in R_+\times\Omega$, 3) для каждого $t\in R_+$ с вероятностью 1

$$x(t)=x_0+\int_0^t(v(\tau)+f(\tau,x(\tau))d\tau+\int_0^t g(\tau,x(\tau))dw(\tau).$$

Теорема 3.12. [56] Если f,g – непрерывные ограниченные отображения, удовлетворяющие локальному условию Липшица по x, f_1 – измеримая по Борелю ограниченная функция такая, что $\langle x_1-x_2, f_1(t,x_1)-f_1(t,x_2)\rangle\le 0$ $\forall t\in R_+$, $\forall x_1,x_2\in R^d$, то для любого $x_0\in R^d$ уравнение (3.7) имеет единственное сильное решение с начальным условием x_0.

Стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t)\in F(t,x(t))dt+g(t,x(t))dw(t) \tag{3.8}$$

где $F{:}R_+\times R^d\to\mathrm{conv}(R^d)$ – некоторое полунепрерывное сверху многозначное отображение, $g{:}R_+\times R^d\to R^{d\times d}$ – непрерывное отображение, и теоремы существования слабых и сильных решений включения (3.8) рассматривались в работах [54–57].

Пусть F и g не зависят от t и $F(0)\ni 0$, $g(0)=0$. Нулевое решение включения (3.8) называется β-устойчивым, если $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, для любого слабого решения включения (3.8), для которого $\|x_0\|\le\delta$ имеем $E(\|x(t)\|^\beta)\le\varepsilon$, $\forall t\ge 0$ (E – знак математического ожидания).

Нулевое решение называется глобально асимптотически β-устойчивым, если оно β-устойчиво и для любого решения $x(t)$ выполняется $\lim\limits_{t\to+\infty}E(\|x(t)\|^\beta)=0$.

Условие А). Существует дважды непрерывно дифференцируемая функция V:$R^d \to R$ такая, что $V(x)\geq 0$, $AV(x) = \sup\limits_{a\in F(x)}\left(\sum\limits_{i=1}^{d}\frac{\partial V(x)}{\partial x^i}a^i\right)+\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{d} g^{(ij)}(x)\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^i \partial x^j} \leq 0$ $\forall x\in R^d$; $V(0)=0$, где $g^{(ij)} = \sum\limits_{k=1}^{d} g_k^{(i)} g_k^{(j)}$, a^i, $g_k^{(l)}$ – компоненты вектора a и матрицы g.

Положим $M_V=\{x\in R^d | AV(x)=0\}$ u будем говорить, что слабое решение ($x(t)$, $v(t)$) принадлежит множеству M_V, если п.н.

$\sum\limits_{i=1}^{d}\frac{\partial V(x(t))}{\partial x^i}v^{(i)}(t)+\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=0}^{d} g^{(ij)}(x(t))\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^i \partial x^j} = 0$ для почти всех $t\geq 0$.

Теорема 3.13. [51] Пусть $k_1\|x\|^\beta \leq V(x) \leq k_2\|x\|^\beta$, $\forall x\in R^d$ и выполнено условие А). Тогда нулевое решение β-устойчиво, если, кроме того, $AV(x)\leq -k_3\|x\|^\beta$, то для каждого решения $x(t)$ включения (3.8),

$$E(\| x(t) \|^\beta) \leq \frac{k_2}{k_1}\| x_0 \|^\beta \exp(-\frac{k_3}{k_1}t), \forall t \geq 0,$$

(k_1,k_2,k_3 – некоторые положительные постоянные).

Теорема 3.14. [51] Пусть $k_1\|x\|^\beta \leq V(x) \leq k_2\|x\|^\beta$, $\forall x\in R^d$; $\alpha(F(x),0)\leq k_3(\|x\|^\gamma+1)$, $\forall x\in R^d$; где k_1, k_2, k_3, β, γ – положительные постоянные, γ<β, выполнено условие А) и не существует ненулевых слабых решений $x(t)$ включения (3.8), принадлежащих множеству M_V. Тогда нулевое решение включения (3.8) является глобально асимптотически β-устойчивым.

Применение теоремы 3.14 для исследования задачи об оптимальной β-стабилизации дано в [53]. Там же изучены свойства предельных множеств законов распределения слабых решений стохастических включений.

В заключение приведем метод интегральных неравенств [80] для стохастических дифференциальных уравнений (3.7), который основан на следующем представлении решений уравнения (3.7) через решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = f(t,y). \tag{3.9}$$

Пусть отображение f дважды непрерывно дифференцируемо, а f_1 и g непрерывны. Решение уравнения (3.9) с начальным условием $y(t_0)=y_0$ обозначим через $y(t;t_0,y_0)$. Составим уравнение в вариациях для системы (3.9)

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial y}(t; y(t;t_0,y_0))z. \tag{3.10}$$

Обозначим через $U(t;t_0,x_0)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (3.10), нормированную при $t=t_0$, через f^i – компоненты функции f и построим матричные уравнения

$$\dot{V_i} = \frac{\partial f}{\partial y}(t; y(t;t_0,y_0))V_i + U^T(t;t_0,y_0)\frac{\partial^2 f^i}{\partial y^2}(t, y(t;t_0,y_0))U(t;t_0,y_0), \tag{3.11}$$

$i=1,\ldots,d$. Пусть $V_i(t;t_0,y_0)$ – решение уравнения (3.11) с начальным условием $V_i(t;t_0,y_0)=0$. Тогда решение $x(t)$ уравнения (3.7) представимо в виде

$$x(t)=y(t;0,x(0))+\int_0^t (U(t,\tau,x(\tau))f_1(\tau,x(\tau))+z(t;\tau,x(\tau))d\tau+\int_0^t U(t;\tau,x(\tau))g(\tau,x(\tau))dw(\tau)$$

н.п., где $z(t;\tau,x(\tau))=(\frac{1}{2}tr(g(\tau,x(\tau))g^T(\tau,x(\tau))V_1(t;\tau,x(\tau))),...,\frac{1}{2}tr(gg^TV_d))^T$.

Предположим, что существуют непрерывные функции $m_i(t)$, $l_i(t)$, i=1,2,3 и неотрицательные числа α, β, γ такие, что $\|U(t;\tau,y)f_1(\tau,y)\|^2\le m_1(t)l_1(\tau)\|y\|^\alpha$, $\|z(t;\tau,y)\|^2\le m_2(t)l_2(\tau)\|y\|^\beta$, $\|U(t;\tau,y)g(\tau,y)\|^2\le m_3(t)l_3(t)\|y\|^\gamma$, $\forall t,\tau,\ t\ge\tau\ge 0$, $\forall y\in R^d$.

Теорема 3.15. [51] Пусть $\alpha=\beta=\gamma=2$ и $\|y(t;0,y_0)\|^2\le m(t)\|y_0\|^2$, $\forall y_0\in R^d$, $m(t)$ непрерывная функция и пусть $M(t)=\max(6t(m_1(t),\ 6t(m_2(t),\ 3m_3(t))$, $l(\tau)=l_1(\tau)+l_2(\tau)+l_3(\tau)$, $D(t)=m(t)+M(t)\int_0^t l(\tau)m(\tau)\exp(\int_\tau^t l(s)M(s)ds)d\tau$.

Если функция $D(t)$ ограничена на $[0,+\infty[$, то нулевое решение уравнения (3.7) устойчиво в среднеквадратическом. Если $D(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, то нулевое решение уравнения (3.7) асимптотически устойчиво в среднеквадратическом целом.

Теорема 3.16. [51] Пусть $\alpha\ge 2$, $\beta\ge 2$, $\gamma\ge 2$, $6tm_1(t)+6tm_2(t)+3m_3(t)\le M$, $\|y(t;0,y_0)\|^2\le M\|y_0\|^2$, $\forall t\ge 0$, M–const, $\int_0^{+\infty} l(\tau)d\tau<\infty$. Тогда нулевое решение уравнения (3.7) устойчиво по вероятности.

Заключение. В заключение авторы выражают признательность академику Н.А.Изобову за внимание к работе и искренне благодарят доцентов кафедры высшей математики Л.А.Альсевич, В.И.Булатова, О.А.Кастрицу, А.В.Филипцова за предоставленные материалы и полезное обсуждение содержания статьи.

Литература

1. Альсевич Л.А. Отражающая функция и устойчивость линейных однородных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 882 – 884.
2. Альсевич Л.А. Линейные системы с распадающейся отражающей матрицей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994, № 3. С. 69 – 71.
3. Альсевич Л.А. Отражающая функция и устойчивость решений линейных систем // Международная конф. «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры». Тез. докл. Брест. 2000. С. 3 – 4.
4. Альсевич Л.А., Булатов В.И. Предельное представление решений линейных однородных регулярных систем. // Вестник Белорус. ун-та.. Сер.1. 1999. №2. С.71–73.
5. Альсевич Л.А., Кастрица О.А. Линейные системы с ортогональной отражающей матрицей // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1998, № 3. С. 61 – 63.
6. Артемьева С.М. О приводимости линейных дифференциальных систем с функционально коммутативной матрицей коэффициентов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ., мат., мех. 1993. № 3. С. 54 – 57.
7. Артемьева С.М., Сурин Т.Л. О приводимости линейных дифференциальных систем с функционально коммутативной матрицей коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 1. С. 3 – 7.
8. Барабанов Е.А. О старшем σ-показателе линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 2. С. 197 – 207.
9. Богданов Ю.С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 6. С. 707 – 716.

10. Богданов Ю.С. Метод инвариантов в асимптотической теории дифференциальных уравнений // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Мат., физ., мех. 1969. № 1. С. 10 – 14.
11. Богданов Ю.С., Мазаник С.А. Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: Сб. научн. тр. / АН СССР, Сиб. отд., Иркутский выч.центр. Новосибирск: Наука, 1988. С. 9 – 13.
12. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Новосибирск. 1980. 222С.
13. Булатов В.И., Калюжная Т.С., Наумович Р.Ф. Управление спектром дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения Т.10. 1974. №11. 1946 – 1952.
14. Булатов В.И. К управляемости систем с запаздыванием, не разрешённых относительно производной. // V Всесоюзное совещание по управлению многосвязными системами. Тез. докл. Тбилиси. 1984. С.78.
15. Булатов В.И. Об одном свойстве управляемых линейных систем, не разрешённых относительно производной. // Вестн. Белорус. ун-та Сер.1. 1989. №1. С63–64.
16. Булатов В.И. К спектральной приводимости линейных дескрипторных систем с запаздыванием.// VII Белорусская математическая конф. Тез. докл. Ч.2. Минск. 1996. С.159–160.
17. Булатов В.И. Параметрический критерий управляемости линейных регулярных систем.// Материалы V международной научной конф. “Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение”. Минск. 1996. С.178–281.
18. Булатов В.И. Условия существования решений регулярных дискретных и линейных дифференциальных систем. // Вестн. Белорус. ун-та Сер.1. 1998. №1. С.66-67.
19. Булатов В.И. Условная управляемость линейных регулярных систем. // VIII Белорусская математическая конф. Тез. докл. Ч.4. Минск. 2000. С.58–59.
20. Булатов В.И. Об обобщенной фундаментальной матрице линейной регулярной системы. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2000. №3. С.44–47.
21. Булгаков Н.Г., Калитин Б.С. // Весці АН БССР. Сер.фіз.-мат. Наук. 1978. №3. С.32–36.
22. Булгаков Н.Г. Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Минск. 1984.
23. Былов Б.Ф., Тихонова Э.А. Об устойчивости центральных и генеральных показателей кусочно-постоянной системы // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 12. С. 2115 – 2121.
24. Былов Б.Ф., Тихонова Э.А. О показателях некоторых линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянной матрицей второго порядка // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 3. С. 378 –389.
25. Винокуров В.А. Явное решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения и основное свойство экспоненты // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С. 302 – 308.
26. Габасов Р., Кириллова Ф.Н., Асмыкович И.К. Дескрипторные системы управления. Минск. 1988. 33С.
27. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск. “Наука и техника”. 1983. 270с.
28. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси. 1999. 409 с.
29. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988. 547 с.
30. Гихман И.Ч., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев. 1982.
31. Изобов Н.А., Макаров Е.К. О неправильных по Ляпунову линейных систем с параметром при производной // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1870 – 1879.
32. Изобов Н.А., Филипцов А.В. О нижних показателях Перрона линейных систем с диагональным приближением и экспоненциально убывающими возмущениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 2. С. 197 – 205.
33. Изобов Н.А., Филипцов А.В. О неулучшаемости условий совпадения нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 8. С. 1300 – 1309.
34. Изобов Н.А., Филипцов А.В. Об инвариантности нижних показателей Перрона линейных систем относительно экспоненциально убывающих возмущений // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 177 – 184.

35. Изобов Н.А., Филипцов А.В. О вычислении максимального нижнего показателя Перрона линейной системы // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1566 – 1567.
36. Кастрица О.А., Мироненко В.И. Линейные периодические системы, у которых отображение за период сохраняет норму // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994, № 1. С. 617– 70.
37. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. Линейные сингулярные системы с запаздыванием. // Вестн. Белорус. ун-та Сер.1. 1988. №2. С. 76–77.
38. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. Линейные системы с запаздыванием, неразрешенные относительно старшей производной. // «Актуальные задачи теории динамических систем управления». Сб. науч. статей. Минск. 1989. С.51–59.
39. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. М. 1977.
40. Лаптинский В.Н. О линейных дифференциальных системах // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 2. С. 249 – 253.
41. Леваков А.А. Корректность одного класса задач оптимального управления. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1980. №2. С.33–37.
42. Леваков А.А. Зависимость оптимального значения критерия качества от граничных условий. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1981. №1. С.16–49.
43. Леваков А.А. Некоторые свойства решений дифференциальных включений в банаховом пространстве. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1981. №2. С.54_56.
44. Леваков А.А. Некоторые свойства многозначных отображений и одна теорема существования решений дифференциальных включений. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1982. №2. С.45–48.
45. Леваков А.А. К управляемости линейных нестационарных систем. // Дифференц. уравнения Т.23. 1987. №5. С.798–806.
46. Леваков А.А. Приближенное построение множеств достижимости дифференциальных включений в банаховом пространстве. // Дифференц. уравнения Т.23. 1987. №10. С.1809–1811.
47. Леваков А.А. Использование знакопостоянных функций Ляпунова для исследования устойчивости дифференциальных включений. // Дифференц. уравнения Т.24. 1988. №12. С.2083–2090.
48. Леваков А.А. Устойчивость функционально-дифференциальных включений. // Дифференц. уравнения Т.25. 1989. №8. С.1312–1321.
49. Леваков А.А. Устойчивость П–систем. // Дифференц. уравнения Т.27. 1991. №8. С.1334–1344.
50. Леваков А.А. Устойчивость периодических систем. // Весці АН БССР. Сер. Фіз. Мат. 1991. №1. С.25–31.
51. Леваков А.А. Устойчивость стохастических дифференциальных систем. Метод интегральных неравенств. // Дифференц. уравнения Т.31. 1995. №2. С.213–219.
52. Леваков А.А. Стохастические дифференциальные включения. // Дифференц. уравнения Т.33. 1997. №2. С.212–220.
53. Леваков А.А. Асимптотическое поведение решений стохастических дифференциальных уравнений и включений. // Дифференц. уравнения Т.34. 1998. №2. С.204–210.
54. Леваков А.А. Теоремы существования сильных решений стохастических дифференциальных уравнений и включений. // Дифференц. уравнения Т.35. 1999. №1. С.84–89.
55. Леваков А.А. Теоремы существования решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. // Дифференц. уравнения Т.36. 2000. №1. С.47–53.
56. Леваков А.А. Теорема существования и единственности сильных решений стохастического дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами. // Третьи научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 80-летию Ю.С.Богданова. Тез. Докл. Ч.1. Минск. 2001. С.77–78.
57. Леваков А.А. Слабые решения стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. // Дифференц. уравнения Т.37. 2001. №8. С..
58. Мазаник С.А. О построении асимптотически эквивалентных дифференциальных систем с кусочно-постоянными матрицами // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 399 – 401.
59. Мазаник С.А. Об асимптотически эквивалентных двухмерных линейных дифференциальных системах // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 220 – 226.
60. Мазаник С.А. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 923 – 926.

61. Мазаник С.А. Некоторые свойства Е-систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ., мат. и мех. 1983. № 2. С. 65 –67.
62. Мазаник С.А. О некоторых инвариантах линейных дифференциальных систем // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ., мат. и мех. 1984. № 1. С. 55 – 57.
63. Мазаник С.А. Об аппроксимирующей последовательности // Деп. в ВИНИТИ 12.11.84, № 7239-84. 32 с.
64. Мазаник С.А. Об аппроксимирующей последовательности // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 6. С. 1089 – 1091.
65. Мазаник С.А. О линейных системах дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 9. С. 784 – 787.
66. Мазаник С.А. О структуре аппроксимирующей функции линейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 3. С. 542 – 545.
67. Мазаник С.А. О линейных дифференциальных системах, эквивалентных относительно обобщенного преобразования Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1619 – 1622.
68. Мазаник С.А. Приводимость систем линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения: Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1988. С 91 – 98.
69. Мазаник С.А. Об экспоненциальном представлении решений линейного матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 2. С. 193 – 200.
70. Мазаник С.А. Построение асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 28 – 32.
71. Мазаник Л.А., Мазаник С.А. О неприводимости линейных дифференциальных систем к системам с функционально коммутативными матрицами коэффициентов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ., мат., информ. 1997. № 3. С. 42 – 46.
72. Мазаник С.А. О неприводимости линейных дифференциальных систем к системам Лаппо-Данилевского // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 6. С. 30 – 33.
73. Мазаник С.А. О неприводимости линейных систем обобщенным преобразованием Ляпунова к системам с функционально коммутативными матрицами коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 758 – 764.
74. Мазаник С.А. О неприводимости линейных систем обобщенным преобразованием Ляпунова к системам Лаппо-Данилевского // Дифференц. уравнения 1998. Т. 34, № 8. С. 1078 – 1081.
75. Мазаник С.А. Системы Лаппо-Данилевского во множестве линейных систем // Дифференц. уравнения 1999. Т. 35, № 1. С. 90 – 96.
76. Мазаник С.А. Кусочно-постоянные системы-представители классов эквивалентных по Ляпунову систем // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 96 – 101.
77. Макаров Е.К. О множествах неправильности линейных систем с параметром при производных // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2091 – 2098.
78. Макаров Е.К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 209 – 212.
79. Мартынов И.И. О системах с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1135 – 1137.
80. Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. // Киев. 1989.
81. Марченко В.М. О качественной теории управления и наблюдения в системах с последействием. // Междунар. Конф. “Dynamical systems:Stability, Control, Optimisation". Тез.докл. Т.2. Минск. 1998. С. 192-194.
82. Мироненко В.И. Отражающая функций и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн. Изд-во «Университетское». 1986. 77с.
83. Размыслович Г.П. К проблеме построения решения линейной регулярной системы. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №2. С.76–78.
84. Размыслович Г.П. Алгоритм вычисления передаточной матрицы для сингулярных систем с запаздыванием. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №1. С.52-54.
85. Размыслович Г.П. Управляемость каузальных линейных дескрипторных дискретных систем с запаздыванием. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3. С.72–74.

86. Размыслович Г.П. Вычисление передаточной матрицы для алгебраическо-дифференциальных систем нейтрального типа. // VI Междунар. конф. «Актуальные проблемы информатики». Сборник трудов. Минск. 1998. С.475−477.
87. Размыслович Г.П. Решение нестационарных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием в классе Уолш функций. // Междунар. Конф. “Dynamical systems:Stability, Control, Optimisation". Тез.докл. Т.2. Минск. 1998. С. 228-229.
88. Размыслович Г.П. О вычислении передаточной матрицы для дифференциально-алгебраических систем нейтрального типа. // Дифференц. уравнения Т.36. 2000. №1. С.135−136.
89. Размыслович Г.П. К проблеме аналитического представления решений сингулярных дифференциальных систем. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2001. №2. С.
90. Сурин Т.Л. О правильных системах Лаппо-Данилевского // Деп. в ВИНИТИ 11.10.84, № 6625-84Деп. 13 с.
91. Сурин Т.Л. О структуре матрицы коэффициентов правильной системы Лаппо-Данилевского // Дифференц. уравнения 1987. Т. 23, № 5. С. 842 – 848.
92. Сурин Т.Л. О показателях правильных систем Лаппо-Данилевского // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 3. С. 543 – 545.
93. Феденя М.М. О чувствительности спектра линейных систем с кусочно-постоянными периодическими коэффициентами, имеющими два состояния // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 8. С. 692 – 695.
94. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. // М. 1985.
95. Чеботарев Г.Н. О решении в замкнутой форме системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Тр. Казанского авиац. ин-та. 1956. Т. 31. С. 107 – 111.
96. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996. 279с.
97. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. Киев. Висша школа. 1993. 207с.
98. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations.// New York, 1996,256p.
99. Campbell S.L., Meyer C.D., Rose N.J. Application of the Drazin inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients. // SIAM J. Appl. Math., Vol. 31, №3,1976, p.411-425.
100. Corrington M.S. Solution of Differential and Integral Equations with Walsh Functions.// IEEE Trans. on Circuit Theory. 1973. Vol.CT-20. №5. pp.470−476.
101. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and information Sciences. Vol.118. Berlin, Springer-Verlag. 1989.
102. Griepentrog E., MärzR.. Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment. // Leipzig,1986,218p.
103. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations.,II, Siff and Differential-Algebraic Problems.// Springer-Verlag, 1991,685p.
104. Kaczorek T. Linear Control Systems. // New York, Vol.2, 1993.
105. Lewis F.L. A survey of linear singular systems. // J. Circ. Syst. Sing. Proc: Special Issue: Semistate System. 1986. V.5. №1. Pp.3–36.
106. Luenberger D.G. Dynamic equations in descriptor form. // IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. AC-22, 1977, pp.312-321.
107. Mazanik S.A. On Liapunov transformations of linear systems of implicit differential equations // Archivum mathematicum. 1991. T. 27b. P. 167 – 173.
108. Mazanik S.A. Lappo-Danilevski systems under Lyapunov transformations // Memoirs on differential equations and mathematical physics. 1998. Vol. 15. P. 150 – 152.
109. Mazanik S.A. Lappo-Danilevski\v{\i} systems and their place among linear systems // Memoirs on differential equations and mathematical physics. 1998. Vol. 15. P. 157 – 159.
110. Martin J.F.P. On the exponential reprezentation of solutions of linear differential equations // Journal of Differential Equations. 1968. № 4. P. 257 –279.
111. Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions. // Amer. J. Math., Vol. 45, 1923, pp. 5-24.