Г.П. РАЗМЫСЛОВИЧ

УПРАВЛЯЕМОСТЬ КАУЗАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

The necessary and sufficient conditions for R_0 – controllability, t_1 – controllability of linear causal discrete descriptor systems with delay are investigated.

Рассмотрим линейную дескрипторную систему управления вида

$$A_0x(t+1)=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t),\quad t=0,1,..., \tag{1}$$

$$x_0(\cdot)=\{x(\tau)=q_\tau,\ \tau=-h,-h+1,...,0\}, \tag{2}$$

где $x,\ q_\tau\in R^n$; $u\in R^m$; $A_0,\ A,\ A_1,\ B$ – постоянные матрицы соответствующих размерностей, $h\in N$ $(h\geq 1)$ – запаздывание.

В случае, когда $\det A_0\neq 0$, система (1), (2) рассматривалась в работе [1]. Поэтому считаем, что $\det A_0=0$. Проблема исследования управляемости такой системы с использованием обратной матрицы Дразина и при условии, что A=0 и пучок λA_0-A_1 является регулярным, посвящены работы [2,3]. В данной статье также исследуются вопросы управляемости системы (1), (2), но при более общих предположениях на параметры системы,чем в [2,3].

Пусть $\operatorname{rank} A_0=r<n$. Без ограничения общности (это можно сделать посредством перестановки соответствующих строк и столбцов) считаем, что матрица A_0 имеет вид

$$A_0=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(0)} & A_{12}^{(0)} \\ \hline A_{21}^{(0)} & A_{22}^{(0)}\end{array}\right],$$

где квадратная $r\times r$-матрица $A_{11}^{(0)}$ имеет полный ранг, т.е. $\operatorname{rank} A_{11}^{(0)}=r$, а $A_{12}^{(0)}$, $A_{21}^{(0)}$, $A_{22}^{(0)}$ – матрицы размерностей $r\times(n-r)$, $(n-r)\times r$, $(n-r)\times(n-r)$ соответственно. Так как $\operatorname{rank} A_{11}^{(0)}=r$, то, согласно [4], это влечет условие

$$A_{22}^{(0)}-A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}=0.$$

В соответствии с блочным разбиением матрицы A_0 представим матрицы A, A_1, B в виде

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right],\quad A_1=\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ \hline A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)}\end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2\end{array}\right]$$

и введем матрицы $F_{i,j},\quad i,j=\overline{1,2}$:

$$F_{11}=A_{11},\quad F_{12}=-A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}+A_{12},\quad F_{21}=-A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11}+A_{21},$$

$$F_{22}=A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{11}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}-\left(A_{21}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{(0)}+A_{21}^{(0)}A_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}\right)+A_{22}.$$

По аналогии с системами без запаздывания будем говорить, что система (1) является каузальной (causal descriptor system [5]), если матрица F_{22} является невырожденной. Можно показать, что это условие каузальности системы (1) обеспечивает регулярность тройки матриц (A_0, A, A_1), которая, в свою очередь, является необходимым и достаточным условием совместности [7] системы (1).

Итак, пусть система (1) является каузальной.

Вектор $x\in R^n$ является допустимым в момент времени t(t = 0,1,...) для системы (1), если существуют векторы $\overline{x}\in R^n$ и $u\in R^m$ такие, что

$$A_0\overline{x}(t+1)=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t).$$

Ясно, что вектор $x(t)$ является допустимым в момент t тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\{A_0, B\}=\operatorname{rank}\{A_0, B, Ax(t)+A_1x(t-h)\}.$$

Отсюда следует, что условие, определяющее является ли $x(t)$ допустимым или нет, зависит не только от момента времени t, но и от момента $t-h$.

Пусть $R_0(t)$ – множество всех допустимых векторов системы (1) в момент t. В каждый момент t множество $R_0(t)$ вместе с нулевым вектором является подпространством пространства R^n. Однако если $\operatorname{rank}\{A_0, B\} = n$ (в частности, если матрица A_0 – невырождена), то $R_0(t)$ совпадает с R^n и, следовательно, любой вектор $x(t)$ является допустимым.

Построим первоначально решение каузальной системы (1). Для этого, умножив систему (1) слева на невырожденную матрицу D_1 и применив невырожденное преобразование $x(t) = D_2\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, где D_1 и D_2 имеют вид:

$$D_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{11}^{(0)^{-1}} & 0 \\ \hline 0 & F_{22}^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_r & -F_{12}F_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -\mathrm{A}_{21}^{(0)}\mathrm{A}_{11}^{(0)^{-1}} & I_{n-r} \end{array}\right],$$

$$D_2 = \left[\begin{array}{c|c} I_r & -\mathrm{A}_{11}^{(0)^{-1}}A_{12}^{0} \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline -F_{22}^{-1}F_{21} & I_{n-r} \end{array}\right],$$

а $y \in R^r$, $z \in R^{n-r}$, от системы (1), (2) перейдем к эквивалентной системе вида

$$\begin{cases} y(t+1) = \Omega y(t) + \Omega_{11}y(t-h) + \Omega_{12}z(t-h) + \overline{B}_1 u(t), \\ \quad 0 \quad = z(t) \quad + \Omega_{21}y(t-h) + \Omega_{22}z(t-h) + \overline{B}_2 u(t), \quad t = 0,1,\ldots, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} = D_2^{-1}q_\tau, \quad \tau = -h, -h+1, \ldots, 0. \tag{4}$$

Здесь

$$\left[\begin{array}{c|c} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \hline \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{array}\right] = D_1\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ \hline A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{array}\right]D_2, \quad \left[\begin{array}{c} \overline{B}_1 \\ \hline \overline{B}_2 \end{array}\right] = D_1\left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right],$$

$$\Omega = A_{11}^{(0)^{-1}}\left(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}\right).$$

Найдем решение системы (3), (4). Для удобства записи этого решения введем в рассмотрение так называемые определяющие уравнения [1]:

$$Y_{t+1}^i = \Omega Y_t^i + \Omega_{11}Y_{t-h}^i + \Omega_{12}Z_{t-h}^i, \tag{5}$$

$$Z_t^i = -\Omega_{21}Y_{t-h}^i - \Omega_{22}Z_{t-h}^i, \quad i = \overline{0,3}, \quad t = 1,2,\ldots; \tag{6}$$

$Z_t^i = Y_t^i = 0$, при $t<0$.

Тогда решение системы (3) может быть записано в виде

$$y(t) = Y_t^0 y(0) + \sum_{k=-h}^{-1}\left(Y_{t-(h+k)}^1 y(k) + Y_{t-(h+k)}^2 z(k)\right) + \sum_{j=0}^{t-1} Y_{t-j}^3 u(j), \quad t = 1,2,\ldots \tag{7}$$

$$z(t) = Z_t^0 y(0) + \sum_{k=-h}^{-1}\left(Z_{t-(h+k)}^1 y(k) + Z_{t-(h+k)}^2 z(k)\right) + \sum_{j=0}^{t} Z_{t-j}^3 u(j), \quad t = 0,1,\ldots, \tag{8}$$

где Y_j^i, Z_j^i – решение определяющих уравнений (5), (6) соответственно при начальных условиях:

$$Y_0^0 = E_{r,r}, \quad Y_1^0 = \Omega, \quad Z_0^0 = 0; \qquad Y_0^1 = 0, \quad Y_1^1 = \Omega_{11}, \quad Z_0^1 = -\Omega_{21};$$

$$Y_0^2 = 0, \qquad Y_1^2 = \Omega_{12}, \quad Z_0^2 = -\Omega_{22}; \quad Y_0^3 = 0, \quad Y_1^3 = \overline{B}_1, \quad Z_0^3 = -\overline{B}_2 .$$

Исходя теперь из вида системы (3) и ее решения (7), (8) мы можем точно описать множество $R_0(t)$ допустимых векторов $x(t)$ для систем (1) в любой момент времени t, $t \geq 0$. Так, например, множество $R_0(0)$ допустимых начальных векторов из (2) в момент $t = 0$ описывается формулой

$$q_0 = D_2 \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $y(0)$ – произвольный r-вектор, а $(n-r)$-вектор $z(0)$ принадлежит множеству

$$\left\{ z(0) \middle| z(0) = -[\Omega_{21}, \Omega_{22}] D_2^{-1} q_{-h} - \overline{B}_2 u(0), \quad u \in R^m \right\}.$$

Дадим несколько определений.

Система (1) называется R_0-управляемой в момент времени t_1 (t_1 – заданное время, $t_1 \in N$), если для любого начального состояния (2), (9) и любого вектора $x_1 \in R_0(t_1)$ существует последовательность управлений $\{u(0), u(1), ..., u(t_1\text{-}1)\}$ такая, что решение системы (1), (2), (9) удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$.

Система (1) называется t_1-управляемой, если она R_0-управляема в момент t_1 и $R_0(t_1)$ совпадает со всем пространством R^n.

Верны следующие утверждения.

Теорема 1. Каузальная система (1) R_0-управляема в момент времени t_1 тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} \left\{ Y_1^3, Y_2^3, ..., Y_{t_1}^3 \right\} = \operatorname{rank} A_0.$$

Теорема 2. Каузальная система (1) t_1-управляема тогда и только тогда, когда она R_0-управляема в момент t_1 и

$$\operatorname{rank} \left\{ Z_0^3, Z_1^3, ..., Z_{t_1}^3 \right\} = n - \operatorname{rank} A_0.$$

Доказательство теорем 1, 2 следует непосредственным образом из представлений (7), (8) решения системы (3) и приведенных выше определений.

Замечание. Аналогичным образом могут быть исследованы другие виды управляемости [2] каузальной системы (1), (2).

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Крахотко В.В. // Дифференц. уравн. 1972. Т.8. №5,6,7. С.767.
2. Игнатенко В.В., Крахотко В.В // Вестн.Белорус. ун-та. Сер.1. 1993. №3. С.70.
3. Игнатенко В.В. // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: Межгосудар.конф. Мн., 1993. С.47.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
5. Luenberger D.G. // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. AC-22. P.312.
6. Размыслович Г.П. // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: Межгосудар. конф. Мн., 1993. С.72.
7. Размыслович Г.П. // VI конф. математиков Беларуси, 29.09 – 02.10.92. Гродно, 1992.
8. Игнатенко В.В., Крахотко В.В. // Актуальные задачи теории динамических систем управления. Мн., 1989. С.134.