УДК 517.929

В. В. КРАХОТКО, Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим стационарную линейную неоднородную систему с запаздыванием:

$$A_0\dot{x}(t)+Ax(t)+A_1x(t-1)=f(t),\ t\geqslant 0, \tag{1}$$

$$x_0(\cdot)=\{x(t)=\varphi(t),\ -1\leqslant t<0,\ x(0)=x_0\}, \tag{2}$$

где x—n-вектор; A_0, A, A_1 — заданные $n\times n$-матрицы; $f(t)$, $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывные n-вектор-функции; x_0 — заданный n-вектор.

Если матрица A_0 имеет обратную A_0^{-1}, то система (1) равносильна системе $\dot{x}(t)+A_0^{-1}Ax(t)+A_0^{-1}A_1x(t-1)=A_0^{-1}f(t)$, $t\geqslant 0$, которая имеет единственное решение для каждого начального условия (2).

Пусть $\det A_0=0$. Систему (1) в этом случае будем называть сингулярной.

Начальное условие (2) назовем допустимым, если сингулярная система (1) имеет хотя бы одно решение. Если для каждого допустимого начального условия система (1) имеет единственное решение, то каждую систему будем называть совместной.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия.

Определение 1. Наименьшее неотрицательное число k_0 называется индексом матрицы A_0, если $\operatorname{rank} A_0^{k_0+1}=\operatorname{rank} A_0^{k_0}$. Индекс матрицы A_0 обозначается $\operatorname{ind} A_0$.

Определение 2. Матрица X, являющаяся решением трех матричных уравнений $XA_0=A_0X$, $XA_0X=X$, $XA_0^{k_0+1}=A_0^{k_0}$, где $k_0=\operatorname{ind} A_0$, называется обратной Драйзина для матрицы A_0.

Для любой квадратной матрицы обратная матрица Драйзина существует, единственна и обозначается A_0^D. Свойства и применение обратной Драйзина можно найти в работе S. L. Campbell, C. D. Meyer. Generalized Inverses of Linear Transformations. Pitman. London. England, 1979.

Очевидно, что система (1) совместна тогда и только тогда, когда совместна соответствующая ей однородная система

$$\underline{A_0\dot{x}(t)+Ax(t)+A_1x(t-1)}=0,\ t\geqslant 0. \tag{3}$$

Справедливы утверждения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$A_0(A+mA_1)=(A+mA_1)A_0,\quad \operatorname{Ker} A_0\cap\operatorname{Ker}(A+mA_1)=\{0\} \tag{4)—(5}$$

для любого m, $m\in C$. Тогда система (3) совместна и вектор-функция

$$x(t)=F(t)A_0^DA_0q\cancel{+}\int_{-1}^{0}F(t-\tau-1)A_0^DA_1A_0^DA_0\psi(\tau)\,d\tau,$$ где $q\in R^n$, $\psi(\tau)$, $-1\leqslant\tau<0$, — кусочно-непрерывная функция из множества

$$\{\psi(\cdot):A_1(E-A_0^DA_0)\psi(t)\equiv 0,\ -1\leqslant t<0\}, \tag{6}$$

$F(t)$ — решение уравнения $\dot{F}(t)+A_0^DAF(t)+A_0^DA_1F(t-1)=0$, $F(0)=E$, $F(t)\equiv 0$, $t<0$, является общим решением системы (3).

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия (4), (5) и функция $f(t)$, $t\geqslant 0$, k_0-1 раз непрерывно дифференцируема, тогда общее решение $x(t)$ системы (1) задается формулой

$$x(t)=F(t)A_0^DA_0q+\int_{-1}^{0}F(t-\tau-1)A_0^DA_1A_0^DA_0\psi(\tau)\,d\tau+A_0^D\int_0^tF(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+(E-A_0^DA_0)\sum_{i=0}^{k_0-1}(-1)^iA_0^i[(A+e^{-p}A_1)^D]^{i+1}f^{(i)}(t), \tag{7}$$

где $q \in R^n$, $\psi(\tau)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция из множества (6), e^{-p} — оператор сдвига $(e^{-p}x(t) \equiv x(t-1))$.

Следствие 1. Пусть матрица $A_1 = 0$, т. е. система (1) имеет вид

$$A_0\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t),\ t \geqslant 0. \tag{8}$$

Тогда из формулы (7) получаем общее решение системы (8): $x(t) = e^{A_0^D A t} A_0^D A_0 q + A_0^D \int\limits_0^t e^{A_0^D A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau + (E - A_0^D A_0) \sum\limits_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i (A^D)^{i+1} \times$ $\times f^{(i)}(t)$, которое совпадает с решением, полученным в указанной работе S. L. Campbell, C. D. Meyer.

Следствие 2. Пусть теперь $A = 0$, т. е. рассматривается система с чистым запаздыванием

$$A_0\dot{x}(t) + A_1 x(t-1) = f(t),\ t \geqslant 0. \tag{9}$$

Если $A_0A_1 = A_1A_0$, $\operatorname{Ker} A_0 \cap \operatorname{Ker} A_1 = \{0\}$, то общее решение системы (9) имеет вид: $x(t) = F(t) A_0^D A_0 q + \int\limits_{-1}^{0} F(t-\tau-1) A_0^D A_1 A_0^D A_0 \psi(\tau)\,d\tau +$ $+ A_0^D \int\limits_0^t F(t-\tau) f(\tau)\,d\tau + (E - A_0^D A_0) \sum\limits_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i (A_1^D)^{i+1} f^{(i)}(t+i+1)$, где $q \in R^n$, $\psi(\tau)$, $\tau \in [-1, 0[$, — произвольная n-вектор-функция из множества (6), а $F(t)$ есть решение уравнения. $\dot{F}(t) + A_0^D A_1 F(t-1) = 0$, $F(0) = E$, $F(t) \equiv 0$, $t < 0$.

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 2 система (1) для каждого начального состояния (2) с кусочно-непрерывной функцией $\varphi(\tau)$, $-1 \leqslant \tau < 0$, принадлежащей множеству (6), имеет единственное решение тогда и только тогда, когда вектор x_0 удовлетворяет соотношению

$$x_0 = A_0^D A_0 z + (E - A_0^D A_0) \sum_{i=0}^{k_0-1} (-1)^i A_0^i \left[(A + e^{-p} A_1)^D\right]^{i+1} f^{(i)}(0) \tag{10}$$

для некоторого вектора $z \in R^n$.

Решение системы (1) при условиях (2), (6), (10) описываем формулой (7), полагая в ней $z = q$, $\varphi(\tau) = \psi(\tau)$, $\tau \in [-1, 0[$.

Поступила в редакцию 19.03.87.