БЕЛАРУСКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ

А. А. Ягораў
І. В. Рыбачэнка

ПРАКТЫКУМ ПА МЕТАДАХ МАТЭМАТЫЧНАЙ ФІЗІКІ ЧАСТКА 2

Рэкамендавана Вучэбна-метадычным аб'яднаннем па прыродазнаўчай адукацыі ў якасці вучэбна-метадычнага дапаможніка для студэнтаў устаноў вышэйшай адукацыі, якія навучаюцца па спецыяльнасцях 1-31 04 02 "Радыёфізіка", 1-31 04 03 "Фізічная электроніка", 1-31 04 04 "Аэракасмічныя радыёэлектронныя і інфармацыйныя сістэмы і тэхналогіі", 1-31 03 07 "Дастасавальная інфарматыка (па кірунках)", кірунак спецыяльнасці 1-31 03 07-02 "Дастасавальная інфарматыка (інфармацыйныя тэхналогіі тэлекамунікацыйных сістэм)", 1-98 01 01 "Кампутарная бяспека (па кірунках)", кірунак спецыяльнасці 1-98 01 01-02 "Кампутарная бяспека (радыёфізічныя метады і праграмна-тэхнічныя сродкі)"

МІНСК
БДУ
2014

УДК 517.956.2(075.8)+517.956.3(075.8)
ББК 22.161.6я73-1
Е30

Р э ц э н з е н т ы:
доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар *В. Р. Кротаў*;
кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт *У. А. Шылінец*

Ягораў, А. А.
Е30 Практыкум па метадах матэматычнай фізікі. Частка 2 : вучэб.-метад. дапаможнік / А.А.Ягораў, І.В.Рыбачэнка. – Мінск : БДУ, 2014. – 119 с.
ISBN 978-985-518-970-2.

У другой частцы вучэбна-метадычнага дапаможніка (1-я частка ў 2013 г. размешчана на сайце "Электронная бібліятэка БДУ") выкладзеныя тэарэтычныя звесткі па тэмах "Раўнанні парабалічнага тыпу", "Ужыванне цыліндрычных функцый для развязання змяшаных задач", "Раўнанні эліптычнага тыпу", прыведзеныя прыклады развязання тыпавых задач, а таксама задачы для самастойнага развязання з адказамі і ўказаннямі.

Прызначана для студэнтаў, якія навучаюцца на факультэце радыёфізікі і кампутарных тэхналогій БДУ.

УДК 517.956.2(075.8)+517.956.3(075.8)
ББК 22.161.6я73-1

ISBN 978-985-518-970-2

ПРАДМОВА

Дадзены вучэбна-метадычны дапаможнік напісаны на аснове досведу правядзення практычных заняткаў па метадах матэматычнай фізікі на факультэце радыёфізікі і кампутарных тэхналогій Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта і адпавядае вучэбнай праграме дысцыпліны “Метады матэматычнай фізікі”.

Першая частка вучэбна-метадычнага дапаможніка размешчаная на сайце “Электронная бібліятэка БДУ” у 2013 г. [1].

У другой частцы разглядаюцца наступныя тэмы: “Раўнанні парабалічнага тыпу”, “Ужыванне цыліндрычных функцый для развязання змяшаных задач” і “Раўнанні эліптычнага тыпу”. У кожнай з іх дадзеныя кароткія тэарэтычныя звесткі, прыклады развязання тыпавых задач, а таксама задачы для самастойнага развязання. У час падрыхтоўкі дапаможніка аўтары абапіраліся на літаратуру, прыведзеную ў бібліяграфічным спісе.

Вучэбна-метадычны дапаможнік прызначаны для студэнтаў установаў вышэйшай адукацыі, якія навучаюцца па спецыяльнасцях 1-31 04 02 “Радыёфізіка”, 1-31 04 03 “Фізічная электроніка”, 1-31 04 04 “Аэракасмічныя радыёэлектронныя і інфармацыйныя сістэмы і тэхналогіі”, 1-31 03 07 “Дастасавальная інфарматыка (па кірунках)”, кірунак спецыяльнасці 1-31 03 07-02 “Дастасавальная інфарматыка (інфармацыйныя тэхналогіі тэлекамунікацыйных сістэм)”, 1-98 01 01 “Кампутарная бяспека (па кірунках)”, кірунак спецыяльнасці 1-98 01 01-02 “Кампутарная бяспека (радыёфізічныя метады і праграмна-тэхнічныя сродкі)”. Можа быць таксама карысным для студэнтаў матэматычных і фізічных факультэтаў.

1. РАЎНАННІ ПАРАБАЛІЧНАГА ТЫПУ

1.1. МЕТАД ПАДЗЕЛУ ЗМЕННЫХ ДЛЯ АДНАРОДНАГА РАЎНАННЯ ЦЕПЛАПРАВОДНАСЦІ

Сфармулюем задачу аб адшуканні нестацыянарнага тэмпературнага поля $u(x,t)$ у плоскім пласце канцоўнай таўшчыні l, які мае ў пачатковы момант часу тэмпературу $\varphi(x)$, калі на паверхнях $x=0$ і $x=l$ гэтага пласта адбываецца цеплаабмен з навакольным асяроддзем, якое мае нулявую тэмпературу. Патрабуецца знайсці развязак лінейнага аднароднага парабалічнага раўнання

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

які задавальняе, калі $t=0$, пачатковую ўмову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

і аднародныя межавыя ўмовы трэцяга роду

$$\begin{aligned} &\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ &\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Згодна з метадам Фур'е падзелу зменных, нетрывіяльныя развязкі раўнання (1), якія задавальняюць межавыя ўмовы (3), будзем шукаць у выглядзе

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{4}$$

Падстаўляючы меркаваную форму развязку (4) ў раўнанне (1) і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

дзе $(-\lambda^2) = \mathrm{const}$ — параметр падзелу. Адсюль выцякае, што функцыі $T(t)$ і $X(x)$ павінны быць вызначаны як развязкі звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \tag{5}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{6}$$

Суадносіны (3) з улікам выяўлення (4) прыводзяць да ўмоваў для каардынатнай функцыі $X(x)$:

$$\begin{aligned} &-\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \\ &\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Дыферэнцыяльнае раўнанне (6) і межавыя ўмовы (7) утвараюць задачу Штурма — Ліўвіля, якая мае нетрывіяльныя развязкі толькі для вызначаных (уласных) значэнняў $\lambda_n = \dfrac{\mu_n}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$. Іх можна выразіць праз неадмоўныя карані μ_n трансцэндэнтнага раўнання

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\alpha_1\alpha_2\mu^2 - \beta_1\beta_2 l^2}{(\alpha_1\beta_2 l + \alpha_2\beta_1 l)\mu}.$$

Уласныя функцыі $X_n(x)$, якія ім адпавядаюць, маюць выгляд

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x + \theta_n), \quad \theta_n = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_1\lambda_n}{\beta_1}.$$

Для $\lambda = \lambda_n$ запішам агульны развязак раўнання (5):

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}, \quad C_n = \text{const}.$$

Памнажаючы функцыі $X_n(x)$ і $T_n(t)$, атрымаем частковыя развязкі раўнання (1), якія задавальняюць межавыя умовы (3):

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin(\lambda_n x + \theta_n).$$

Складзем фармальна шэраг, элементамі якога з'яўляюцца знойдзеныя функцыі $u_n(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin(\lambda_n x + \theta_n). \tag{8}$$

Функцыя $u(x,t)$ задавальняе межавыя умовы (3), бо гэтыя умовы задавальняе кожны элемент шэрагу (8). Азначым каэфіцыенты C_n так, каб выконвалася пачатковая ўмова. Падстаўляючы шэраг (8) у (2), атрымаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n x + \theta_n) = \varphi(x).$$

Паводле тэарэмы Сцяклова, гэтая суадносіна ўяўляе сабой расклад функцыі $\varphi(x)$ у шэраг Фур'е па сістэме артаганальных на адрэзку $[0,l]$ функцый $X_n(x) = \sin(\lambda_n x + \theta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, а лікі C_n з'яўляюцца адпаведнымі каэфіцыентамі Фур'е і вызначаюцца формулай

$$C_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \varphi(x)X_n(x)\,dx.$$

I. Для значэнняў параметраў $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ межавыя ўмовы набываюць выгляд

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0. \tag{9}$$

Змяшаная задача (1), (2), (9), або *першая краявая задача*, апісвае працэс астывання плоскага пласта канцоўнай таўшчыні l (або тонкага стрыжня канцоўнай даўжыні l з ідэальна цеплаізаляванай бакавой паверхняй) з тэмпературным профілем $\varphi(x)$ у пачатковы момант часу, калі на межавых пласкасцях $x = 0$ і $x = l$ (тарцы стрыжня) падтрымліваецца сталая нулявая тэмпература. У гэтым выпадку ўласныя значэнні задачы Штурма — Ліўвіля $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$, а адпаведныя ўласныя функцыі $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \ \ldots,$ $\|X_n\|^2 = \dfrac{l}{2}$.

Развязак першай краявой задачы запісваецца ў выглядзе

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

II. Калі $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, а $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то межавыя ўмовы (3) набываюць выгляд аднародных умоваў другога роду

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0. \tag{10}$$

Змяшаная задача (1), (2), (10), або *другая краявая задача*, апісвае працэс выраўноўвання тэмпературы ў плоскім пласце (тонкім стрыжні), у якім у пачатковы момант часу зададзены тэмпературны профіль $\varphi(x)$, а межавыя плоскасці $x = 0$ і $x = l$ (тарцы стрыжня) цеплаізаляваныя. Для гэтага выпадку

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \ \ldots, \quad \|X_n\|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Развязак другой краявой задачы мае выгляд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{n\pi x}{l},$$

дзе

$$C_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\,dx, \quad C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Адзначым, што, калі $t \to \infty$, тэмпература ўсіх пластоў выраўноўваецца і імкнецца да стацыянарнага размеркавання $u_s(x) = C_0 = \text{const}$.

III. Няхай $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_2 = h > 0$. У гэтым выпадку атрымаем межавыя ўмовы

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = 0. \tag{11}$$

Змяшаная задача (1), (2), (11) апісвае эвалюцыю тэмпературнага поля ў плоскім пласце $0 \leqslant x \leqslant l$ матэрыялу, пачатковае размеркаванне тэмпературы ў якім зададзена функцыяй $\varphi(x)$, калі на паверхні $x = 0$ пласта падтрымліваецца сталая нулявая тэмпература, а на іншай паверхні $x = l$ адбываецца канвектыўны цеплаабмен з навакольным асяроддзем, якое мае нулявую тэмпературу.

Знаходзім уласныя функцыі задачы Штурма — Ліўвіля:

$$X_n(x) = \sin\frac{\mu_n x}{l}, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l}{2}\Big(1 + \frac{hl}{\mu_n^2 + h^2 l^2}\Big).$$

Тут лікі μ_n з'яўляюцца каранямі трансцэндэнтнага раўнання $\operatorname{tg}\mu = -\dfrac{\mu}{hl}$. Гэтае раўнанне мае незлічонае мноства рэчаісных дадатных каранёў, у чым няцяжка пераканацца, пабудаваўшы графікі функцый $y = \operatorname{tg}\mu$ і $y = -\dfrac{\mu}{p}$, дзе $p = hl$.

Развязак змяшанай задачы (1), (2), (11) можна запісаць у выглядзе

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\mu_n x}{l},$$

дзе

$$C_n = \frac{2(\mu_n^2 + p^2)}{l\left[\mu_n^2 + p(p+1)\right]} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\frac{\mu_n x}{l}\, dx.$$

Занятак 1

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 1. Маецца аднародны тонкі стрыжань даўжыні l, ізаляваны ад навакольнай прасторы, з пачатковай тэмпературай $u(x,0) = \dfrac{hx(l-x)}{l^2}$. Вызначыць тэмпературу $u(x,t)$ пунктаў стрыжня для $t > 0$, калі на канцах стрыжня падтрымліваецца нулявая тэмпература.

Развязанне. Неабходна развязаць змяшаную задачу:

$$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \dfrac{hx(l-x)}{l^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Будзем развязваць гэтую задачу метадам падзелу зменных, лічачы $u(x,t) = X(x)T(t)$. Паколькі $u'_t = X(x)T'(t)$, $u''_{xx} = X''(x)T(t)$, то, падстаўляючы выразы вытворных і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Улічваючы суадносіны $X(0) = X(l) = 0$, якія вынікаюць з межавых умоваў, прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля для каардынатнай функцыі $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Развязкамі гэтай задачы будуць уласныя значэнні $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ і ўласныя функцыі $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ \ldots$.

Калі $\lambda = \lambda_k$ раўнанне для часавай функцыі $T_k' + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k = 0$ мае агульны развязак

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

У адпаведнасці з метадам Фур'е развязак змяшанай задачы запішам у выглядзе шэрагу

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Азначым каэфіцыенты A_k так, каб сума шэрагу задавальняла пачатковую ўмову:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{hx(l-x)}{l^2}.$$

Адсюль вынікае, што

$$A_k = \frac{2h}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{8h}{\pi^3(2n+1)^3}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Падстаўляючы значэнні каэфіцыентаў у шэраг, прыходзім да адказу

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\, e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right]^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Задача 2. Апісаць працэс змены канцэнтрацыі рэчыва ў растворы, размешчаным паміж пласкасцямі $x = 0$ і $x = l$, калі на левым канцы падтрымліваецца нулявая канцэнтрацыя, а плоскасць $x = l$ непранікальная для рэчыва. Пачатковая канцэнтрацыя рэчыва вызначаецца функцыяй $u(x,0) = x + \sin\frac{\pi x}{2l}$.

Развязанне. Матэматычная мадэль задачы мае наступны выгляд:

$$\begin{cases} u_t' = a^2 u_{xx}'', \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u_x'|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x + \sin\dfrac{\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Згодна з метадам Фур'е, будзем шукаць развязак ў выглядзе здабытку $u(x,t) = X(x)T(t)$. Пасля падстаноўкі ў раўнанне і падзелу зменных, атрымаем задачу Штурма — Ліўвіля адносна функцыі $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Развязваючы яе, знаходзім уласныя значэнні і ўласныя функцыі

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Для функцыі $T(t)$ атрымаем раўнанне

$$T_k'(t) + \Big[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\Big]^2 T_k(t) = 0,$$

з якога знаходзім агульны развязак

$$T_k(t) = A_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}.$$

Развязак зыходнай змяшанай задачы трэба шукаць у выглядзе шэрагу

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Падстаўляючы шэраг у пачатковую ўмову, атрымаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} = x + \sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Другі складнік у правай частцы гэтай роўнасці ўяўляе сабой паліном па артаганальнай сістэме ўласных функцый задачы Штурма — Ліўвіля, а менавіта, $\sin\dfrac{\pi x}{2l} = X_0(x)$. Таму неабходна знайсці расклад толькі для першага складніку і выкарыстаць той факт, што каэфіцыенты Фур'е сумы функцый ёсць сума каэфіцыентаў Фур'е кожнага складніка. Маем

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

дзе

$$B_k = \frac{2}{l}\int_0^l x \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx = \frac{8l(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Такім чынам, $A_k = B_k + \delta_{0k}$, $\delta_{0k} = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k\neq 0. \end{cases}$

Такім чынам, развязак задачы набывае выгляд

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{8l(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} + \delta_{0k}\Big] e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

або

$$u(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi x}{2l} + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \times$$

$$\times\, e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Задача 3. Дадзены аднародны шар радыюса b, цэнтр якога размешчаны ў пачатку каардынат. На знешняй паверхні шара падтрымліваецца нулявая тэмпературы, а пачатковая тэмпература $u|_{t=0} = b^2 - r^2$. Вызначыць тэмпературу $u(r,t)$ усярэдзіне шара, калі $t > 0$.

Развязанне. Неабходна развязаць наступную змяшаную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{1}{r^2}\, \dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\, \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < b, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=b} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = b^2 - r^2, \quad 0 \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Згодна са схемай метаду Фур'е, мяркуем, што $u(r,t) = R(r)T(t)$, і пасля падстаноўкі ў раўнанне атрымаем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \dfrac{2}{r}\, R'}{R} = -\lambda^2.$$

З межавых умоваў атрымаем $\big|R(0)T(t)\big| < \infty$, $R(b)T(t) = 0$, адкуль выцякаюць межавыя ўмовы для радыяльнай функцыі: $\big|R(0)\big| < \infty$, $R(b) = 0$. Такім чынам, маем задачу Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{2}{r}\, R' + \lambda^2 R = 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(b) = 0. \end{cases}$$

Увядзем функцыю $v(r)$ з дапамогай формулы $R(r) = \dfrac{v(r)}{r}$. Тады

$$R'(r) = -\frac{v}{r^2} + \frac{v'}{r}, \quad R'' = \frac{2v}{r^3} - \frac{2v'}{r^2} + \frac{v''}{r}.$$

Падстаўляючы гэтыя выразы ў дыферэнцыяльнае раўнанне і ўлічваючы межавыя ўмовы, прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля для функцыі $v(r)$:

$$\begin{cases} v'' + \lambda^2 v = 0, \\ v(0) = 0, \quad v(b) = 0. \end{cases}$$

Гэтая задача мае развязкі

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{b}, \quad v_k(r) = \sin\frac{k\pi r}{b} \quad \Rightarrow \quad R_k(r) = \frac{\sin\dfrac{k\pi r}{b}}{r}, \quad k = 1, 2, \ \ldots.$$

Адзначым, што функцыі $R_k(r)$ утвараюць артаганальную з вагой r^2 на адрэзку $[0,b]$ сістэму функцый, прычым

$$\|R_k(r)\|^2 = \int\limits_0^b r^2\, \frac{\sin^2\dfrac{k\pi r}{b}}{r^2}\, dr = \int\limits_0^b \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2k\pi r}{b}\Big) dr = \frac{b}{2}.$$

Развязваючы раўнанне $T_k'(t) + a^2\Big(\dfrac{k\pi}{b}\Big)^2 T_k(t) = 0$, знаходзім

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 t}.$$

Запішам шэраг з нявызначанымі каэфіцыентамі

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 t} \, \frac{\sin \dfrac{k\pi r}{b}}{r}.$$

З пачатковай умовы будзем мець

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\sin \dfrac{k\pi r}{b}}{r} = b^2 - r^2 \;\Rightarrow\; A_k = \frac{2}{b} \int\limits_0^b (rb^2 - r^3) \sin \frac{k\pi r}{b} \, dr =$$

$$= \frac{2}{b} \Big(\frac{b}{k\pi}\Big)^2 \int\limits_0^b 6r \sin \frac{k\pi r}{b} \, dr = -12 \Big(\frac{b}{k\pi}\Big)^3 \cos k\pi = \frac{12b^3(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3}.$$

Канчаткова прыходзім да адказу

$$u(r,t) = \frac{12b^3}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \, e^{-\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 t} \, \frac{\sin \dfrac{k\pi r}{b}}{r}.$$

Задачы для самастойнага развязання

Задача 4. Растворанае рэчыва са сталай пачатковай канцэнтрацыяй u_0 дыфундуе з раствору, размешчанага паміж пласкасцямі $x = 0$ і $x = h$, у растваральнік, абмежаваны пласкасцямі $x = h$ і $x = l$. Вызначыць працэс выраўноўвання канцэнтрацыі, мяркуючы, што межы $x = 0$ і $x = l$ непранікальныя для рэчыва.

Развязаць наступныя змяшаныя задачы:

5. $$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin \dfrac{7\pi x}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant l/2, \\ l - x, & l/2 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x^2 - 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin \dfrac{3\pi x}{2l} + \sin \dfrac{7\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

9. $\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos\dfrac{\pi x}{2l} + \cos\dfrac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

10. $\begin{cases} u'_t + u = u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

1.2. НЕАДНАРОДНАЕ РАЎНАННЕ ЦЕПЛАПРАВОДНАСЦІ

Разгледзім змяшаную задачу для раўнання цеплаправоднасці

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{12}$$

з пачатковай умовай

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{13}$$

і межавымі ўмовамі трэцяга роду

$$\begin{gathered} \left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Развязак гэтай задачы будзем шукаць у выглядзе шэрагу Фур'е па сістэме ўласных функцый $X_n(x) = \sin(\lambda_n x + \theta_n)$ задачы на ўласныя значэнні (6), (7)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin(\lambda_n x + \theta_n) \tag{15}$$

(зменная t пры гэтым разглядаецца як параметр). Шэраг (15) задавальняе межавыя ўмовы (14). Таму функцыі $V_n(t)$ трэба вызначыць так, каб шэраг задавальняў раўнанне (12) і пачатковую ўмову (13).

Улічваючы паўніню сістэмы ўласных функцый $X_n(x)$, выявім функцыі $f(x,t)$ і $\varphi(x)$ у выглядзе шэрагаў Фур'е:

$$\begin{gathered} f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\lambda_n x + \theta_n), \\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x + \theta_n), \end{gathered} \tag{16}$$

дзе $f_n(t)$ і φ_n — каэфіцыенты Фур'е, вызначаныя формуламі:

$$\begin{gathered} f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int\limits_0^l f(x,t) \sin(\lambda_n x + \theta_n)\, dx, \\ \varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_n x + \theta_n)\, dx. \end{gathered} \tag{17}$$

Падстаўляючы меркаваную форму развязку (15) і расклад (16) функцыі $f(x,t)$ у раўнанне (12) і замяняючы пры гэтым $X_n''(x)$ на $-\lambda_n^2 X_n(x)$, атрымаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big[V_n'(t)+\lambda_n^2 a^2 V_n(t)-f_n(t)\big]X_n(x)=0.$$

Гэтыя суадносіны, а значыць, і раўнанне (12), будзе выканана, калі ўсе каэфіцыенты раскладу роўныя нулю, г. зн.

$$V_n'(t)+\lambda_n^2 a^2 V_n(t)=f_n(t).$$

З пачатковай умовы (13) з улікам (15), (16) атрымаем

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x),\quad 0<x<l.$$

Адсюль выцякае, што $V_n(0)=\varphi_n$.

Такім чынам, для знаходжання шуканай функцыі $V_n(t)$ прыходзім да задачы Кашы для звычайнага лінейнага неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання першага парадку. Развязак гэтай задачы можа быць знойдзены метадам Лагранжа варыяцыі адвольнай сталай. Ён мае выгляд

$$V_n(t)=\varphi_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}+\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\lambda_n^2 a^2 (t-\tau)}d\tau.$$

Падстаўляючы функцыі $V_n(t)$, $n=1,2,\ \ldots,$ у расклад (15), знаходзім развязак зыходнай задачы (12)—(14) у выглядзе

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin(\lambda_n x+\theta_n)+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\lambda_n^2 a^2 (t-\tau)}d\tau\right]\sin(\lambda_n x+\theta_n), \quad (18)$$

дзе φ_n і $f_n(\tau)$ вызначаюцца формуламі (17).

Адзначым, што першы складнік у выразе (18) з'яўляецца развязкам змяшанай задачы для аднароднага раўнання, калі $f(x,t)\equiv 0$.

Занятак 2

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 11. Знайсці нестацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў плоскім пласце таўшчыні l, усярэдзіне якога, калі $t\geqslant 0$, дзейнічае крыніца цеплыні са сталай шчыльнасцю q, а на паверхні падтрымліваецца нулявая тэмпература. Пачатковая тэмпература ва ўнутраных пунктах пласта роўная нулю.

Развязанне. Будзем развязваць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx} + \dfrac{q}{c\rho}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{19}$$

дзе c — удзельная цеплаёмістасць, ρ — шчыльнасць масы пласта.

Паколькі межавыя ўмовы першага роду, то адпаведная задача Штурма — Ліўвіля для аднароднага раўнання мае наступны выгляд:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

а яе ўласныя функцыі $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$. Таму развязак змяшанай задачы будзем шукаць у выглядзе

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

У сваю чаргу, раскладзем правую частку раўнання $\dfrac{q}{\rho c}$ у шэраг Фур'е па сістэме ўласных функцый

$$\frac{q}{\rho c} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

дзе

$$f_k = \frac{2}{l}\,\frac{q}{\rho c}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2q}{\rho c k\pi}\big[1 - (-1)^k\big]. \tag{20}$$

Падстаўляючы цяпер меркаваны развязак ў раўнанне і ўлічваючы выяўленне (20), атрымаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} v'_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\Big(\frac{k\pi a}{l}\Big)^2 \sin\frac{k\pi x}{l} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2q}{\rho c k\pi}\big[1 - (-1)^k\big] \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Прыраўноўваючы адпаведныя каэфіцыенты ў левай і правай частках гэтай роўнасці, прыходзім да дыферэнцыяльнага раўнання

$$v'_k(t) + v_k(t)\Big(\frac{k\pi a}{l}\Big)^2 = \frac{2q}{\rho c k\pi}\big[1 - (-1)^k\big].$$

З пачатковай умовы атрымаем $v_k(0) = 0$.

Паколькі правая частка раўнання ўяўляе сабой канстанту, то частковы развязак трэба таксама шукаць у выглядзе канстанты, г. зн.

$$v_k^{\text{частк.}} = a_k, \quad a_k = \text{const}.$$

Падстаўляючы ў раўнанне, атрымаем суадносіну

$$v_k^{\text{частк.}}\Big(\frac{k\pi a}{l}\Big)^2 = \frac{2q}{\rho ck\pi}\big[1-(-1)^k\big],$$

з якой вынікае, што

$$v_k^{\text{частк.}} = \frac{2q}{\rho ck\pi}\big[1-(-1)^k\big]\Big(\frac{l}{k\pi a}\Big)^2 = \frac{2ql^2}{\rho ca^2\pi^3}\,\frac{1-(-1)^k}{k^3}.$$

Агульны развязак мае выгляд

$$v_k(t) = \frac{2ql^2}{\rho ca^2\pi^3}\,\frac{1-(-1)^k}{k^3} + c_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

Каэфіцыент c_k вызначым з пачатковай умовы $v_k(0)=0:$

$$c_k = \frac{2ql^2}{\rho ca^2\pi^3}\,\frac{(-1)^k-1}{k^3}.$$

Такім чынам, будзем мець

$$v_k(t) = \frac{2ql^2}{\rho ca^2\pi^3}\,\frac{1-(-1)^k}{k^3} + \frac{2ql^2}{\rho ca^2\pi^3}\,\frac{(-1)^k-1}{k^3}\,e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

Развязак змяшанай задачы набывае выгляд

$$u(x,t) = \frac{2ql^2}{\rho ca^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l} + \\ + \frac{2ql^2}{\rho ca^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^3}\,e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Задача 12. Развязаць змяшаную задачу (19) метадам вылучэння стацыянарнай часткі.

Развязанне. Паколькі функцыя крыніцы не залежыць ад зменнай t, то гэтую задачу можна развязаць, вылучаючы стацыянарную частку. Зробім замену $u(x,t) = v(x,t)+w(x)$, дзе $v(x,t)$ — новая невядомая функцыя, а функцыю $w(x)$ падбяром так, каб дыферэнцыяльнае раўнанне адносна $v(x,t)$ стала аднародным.

Падстаўляючы ў выходнае раўнанне, атрымаем

$$v_t' - a^2 v_{xx}'' - a^2 w''(x) = \frac{q}{c\rho}.$$

Адсюль вынікае, што

$$a^2 w''(x) = -\frac{q}{c\rho},$$

а з межавых умоваў атрымаем $w(0)=w(l)=0.$ Развязваючы гэтую краявую задачу для звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку адносна $w(x),$ знаходзім $w(x) = -\dfrac{q}{2a^2c\rho}\,x^2 + \dfrac{ql}{2a^2c\rho}\,x.$

Пасля выканання замены $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ атрымаем для функцыі $v(x,t)$ змяшаную задачу

$$\begin{cases} v'_t = a^2 v''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \dfrac{q}{2a^2 c\rho}\, x^2 - \dfrac{ql}{2a^2 c\rho}\, x, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

У адпаведнасці з метадам Фур'е для аднароднага раўнання яе развязак трэба шукаць у выглядзе шэрагу

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Каэфіцыенты C_k вызначым, падстаўляючы шэраг у пачатковую ўмову

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k x}{l} = \frac{q}{2a^2 c\rho}\, x(x-l).$$

Адсюль знаходзім

$$C_k = \frac{q}{a^2 c\rho l} \int_0^l x(x-l) \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{2ql^2}{a^2 c\rho\pi^3}\, \frac{(-1)^k - 1}{k^3}.$$

Улічваючы выразы для каэфіцыентаў C_k і выгляд функцыі $w(x)$, атрымаем канчатковы адказ

$$u(x,t) = -\frac{q}{2a^2 c\rho}\, x^2 + \frac{ql}{2a^2 c\rho}\, x + \\ + \frac{2ql^2}{a^2 c\rho\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^3}\, e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Заўвага 1.. *Адрозненне ў запісах развязкаў разгледжанай задачы звязана з тым, што ў першым выпадку стацыянарная частка раскладзеная ў шэраг па артаганальнай сістэме ўласных функцый.*

Задачы для самастойнага развязання

Развязаць наступныя змяшаныя задачы:

13. $$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} + \sin x \sin(2x), \quad 0 < x < \pi/2, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} u'_t - u = u''_{xx} + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

15. $\begin{cases} u'_t - 4u = u''_{xx} + 1 + \cos(2x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u'_t - 9u = u''_{xx} + 4\sin^2 t \cos(3x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u'_t - 7u = u''_{xx} + \dfrac{13}{4}\sin\dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) + q, \quad 0 \leqslant r < b, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=b} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant b, \quad q = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$

1.3. ЗМЯШАНЫЯ ЗАДАЧЫ З НЕАДНАРОДНАСЦЯМІ Ў РАЎНАННІ І МЕЖАВЫХ УМОВАХ

Разгледзім пастаноўкі задач, у якіх не толькі раўнанне, але і межавыя ўмовы могуць утрымоўваць неаднароднасці. Алгарытм развязання ў гэтым выпадку аналагічны разгледжанаму ў першай частцы дапаможніка для раўнанняў гіпербалічнага тыпу. Неабходна выканаць замену $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, пераходзячы да новай невядомай функцыі $v(x,t)$ і падбіраючы функцыю $w(x,t)$ такім чынам, каб яна задавальняла зададзеныя межавыя ўмовы. Пасля замены мы прыходзім да змяшанай задачы для функцыі $v(x,t)$ з аднароднымі межавымі ўмовамі. Пры гэтым пачатковыя ўмовы і правая частка раўнання змяняюцца.

Занятак 3

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 19. Пачатковая тэмпература стрыжня $0 \leqslant x \leqslant l$ з цеплаізаляванай бакавой паверхняй роўная $U_0 = \mathrm{const}$, а на канцах яго падтрымліваецца сталая тэмпература $u(0,t) = U_1 = \mathrm{const}$, $u(l,t) = U_2 = \mathrm{const}$. Знайсці тэмпературу $u(x,t)$ стрыжня, калі $t > 0$.

Развязанне. Матэматычная пастаноўка задачы мае выгляд

$$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = U_1, \quad u|_{x=l} = U_2, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = U_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Зробім замену $u(x,t) = v(x,t) + U_1 + \dfrac{x}{l}(U_2 - U_1)$. Тады для функцыі $v(x,t)$

прыходзім да змяшанай задачы

$$\begin{cases} v'_t = a^2 v''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = U_0 - U_1 - \dfrac{x}{l}\,(U_2 - U_1), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Як і раней, яе развязак будзем шукаць у выглядзе шэрагу

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Падстаўляючы шэраг у пачатковую ўмову, атрымаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{l} = U_0 - U_1 - \frac{x}{l}\,(U_2 - U_1).$$

Адсюль вызначым каэфіцыенты C_k

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \Big[U_0 - U_1 - \frac{x}{l}\,(U_2 - U_1)\Big] \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2}{k\pi}\Big[U_0 - U_1 -$$

$$- \frac{x}{l}\,(U_2 - U_1)\Big] \cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = \frac{2}{k\pi}\big[U_0 - U_1 + (U_2 - U_0)(-1)^k\big].$$

Такім чынам, развязак задачы набывае выгляд

$$u(x,t) = U_1 + \frac{x}{l}\,(U_2 - U_1) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\big[U_0 - U_1 + (U_2 - U_0)(-1)^k\big] e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Адзначым, што, калі $t \to \infty$, тэмпература імкнецца да стацыянарнага размеркавання $u_s(x) = U_1 + \dfrac{x}{l}\,(U_2 - U_1)$.

Задача 20. Знайсці тэмпературу стрыжня $0 \leqslant x \leqslant l$ з цеплаізаляванай бакавой паверхняй, адзін канец якога $x = 0$ цеплаізаляваны, а на другім канцы $x = l$ адбываецца канвекцыйны цеплаабмен з асяроддзем, тэмпература якога роўная $U_0 = \text{const}$. Пачатковая тэмпература стрыжня роўная нулю.

Развязанне. Неабходна развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad (u'_x + hu)|_{x=l} = hU_0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Няцяжка заўважыць, што сталая функцыя $w = U_0$ задавальняе межавыя ўмовы. Зробім замену $u(x,t) = v(x,t) + U_0$. У выніку атрымаем змяшаную задачу адносна $v(x,t)$ з аднароднымі межавымі ўмовамі:

$$\begin{cases} v'_t = a^2 v''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v'_x|_{x=0} = 0, \quad (v'_x + hv)|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = -U_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Развязак раўнання, які задавальняе межавыя ўмовы, будзем шукаць у выглядзе здабытку $u(x,t) = X(x)T(t)$. Падстаўляючы ў раўнанне і падзяляючы зменныя, прыходзім да суадносіны

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

З межавых умоваў знаходзім

$$X'(0)T(t) = 0, \quad \big[X'(l) + hX(l)\big]T(t) = 0,$$

адкуль, паколькі $u(x,t) \not\equiv 0$, вынікаюць роўнасці $X'(0) = 0$, $X'(l)+hX(l) = 0$. Такім чынам, для зададзенай змяшанай задачы атрымаем адпаведную задачу Штурма — Ліўвіля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \end{cases}$$

Агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання мае выгляд

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

З межавай умовы на левым канцы адрэзка вынікае, што $C_2 = 0$, $X(x) = C_1 \cos \lambda x$, $X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x$. Возьмем $C_1 = 1$ і падставім выразы для $X(x)$ і $X'(x)$ у правую межавую ўмову

$$-\lambda \sin \lambda l + h \cos \lambda l = 0.$$

Лічачы $\mu = \lambda l$, атрымаем $\operatorname{tg} \mu = \dfrac{hl}{\mu}$. Праз μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, абазначым дадатныя карані гэтага раўнання. Тады ўласныя значэнні задачы Штурма — Ліўвіля будуць роўныя $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{l}$, а ўласныя функцыі $X_k(x) = \cos \dfrac{\mu_k x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Калі $\lambda = \lambda_k$, агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання

$$T_k'(t) + \left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0$$

мае выгляд

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}.$$

Развязак змяшанай задачы будзем шукаць у выглядзе шэрагу

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\mu_k x}{l}.$$

Падстаўляючы шэраг у пачатковую ўмову, атрымаем расклад

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \frac{\mu_k x}{l} = -U_0.$$

З агульнай тэорыі вынікае, што ўласныя функцыі $X_k(x) = \cos \dfrac{\mu_k x}{l}$ артаганальныя з вагой $\rho(x) = 1$ на адрэзку $[0, l]$. Такім чынам,

$$C_k = -\frac{U_0}{\|X_k\|^2} \int_0^l \cos \frac{\mu_k x}{l} \, dx.$$

Знойдзем квадрат нормы ўласнай функцыі $X_k(x)$. Маем

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l X_k^2(x)dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_k x}{l}\, dx =$$

$$= \int_0^l \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\mu_k x}{l}\Big)dx = \frac{l}{2} + \frac{l}{4\mu_k}\, \sin 2\mu_k =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{l}{2\mu_k}\,\frac{\operatorname{tg}\mu_k}{1+\operatorname{tg}^2\mu_k} = \frac{l(\mu_k^2 + h^2l^2 + hl)}{2(\mu_k^2 + h^2l^2)}.$$

Вылічым інтэграл

$$\int_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l}\, dx = \frac{l}{\mu_k}\, \sin\mu_k = \frac{l}{\mu_k}\,\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\mu_k}} = \frac{hl^2(-1)^{k-1}}{\mu_k\sqrt{\mu_k^2 + h^2l^2}}.$$

Падстаўляючы атрыманыя выразы ў каэфіцыенты Фур'е C_k, канчаткова прыходзім да развязку змяшанай задачы

$$u(x,t) = U_0 + 2U_0hl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{\mu_k^2 + h^2l^2}}{\mu_k(\mu_k^2 + h^2l^2 + hl)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\mu_k x}{l},$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{hl}{\mu}$.

Задачы для самастойнага развязання

Задача 21. Дадзены аднародны тонкі стрыжань $0 \leqslant x \leqslant l$ з цеплаізаляванай бакавой паверхняй, пачатковая тэмпература якога роўная $u(x,0) = \dfrac{Ax}{l}$, $A = \text{const}$. На канцы стрыжня $x = 0$ тэмпература падтрымліваецца роўнай нулю, а на канцы $x = l$ змяняецца згодна з законам $u(l,t) = Ae^{-t}$. Знайсці нестацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў стрыжні.

Развязаць наступныя змяшаныя задачы:

22. $$\begin{cases} u'_t - 4u = u''_{xx} + x^2 - 2t - 4x^2t + 2\cos^2 x, \quad 0 < x < \pi, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} u'_t - u = u''_{xx} + 2\sin 2x\cos x - x, \quad 0 < x < \pi/2, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi/2} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} u'_t - 9u = u''_{xx} + 4\sin^2 t\cos(3x) - 18x^2 - 4, \quad 0 < x < \pi, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 4\pi, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 2x^2 + 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} u'_t + 2u'_x = u''_{xx} + u + e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 1 + t, \quad u|_{x=\pi} = 1 + t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 1 + e^x \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \big[u'_x - h(u - U_0)\big]\big|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad h, U_0 = \text{const} > 0. \end{cases}$$

2. УЖЫВАННЕ ЦЫЛІНДРЫЧНЫХ ФУНКЦЫЙ ДЛЯ РАЗВЯЗАННЯ ЗМЯШАНЫХ ЗАДАЧ

2.1. ЦЫЛІНДРЫЧНЫЯ ФУНКЦЫІ

Дыферэнцыяльнае раўнанне 2-го парадку

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)y = 0 \tag{21}$$

называецца *раўнаннем Бэсэля парадку* ν. Тут ν — адвольны рэчаісны або камплексны лік, $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$. Развязак раўнання (21) можна знайсці ў выглядзе шэрагу

$$y(x) = x^{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\sigma}, \quad a_0 \neq 0,$$

дзе паказнік σ і каэфіцыенты a_k трэба вызначыць.

Адзін з развязкаў раўнання Бэсэля атрымаем, калі $\sigma = \nu$

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(p+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2p+\nu} \overset{\text{def}}{=} J_\nu(x). \tag{22}$$

Гэты развязак абазначаецца праз $J_\nu(x)$ і называецца *цыліндрычнай функцыяй Бэсэля 1-га роду парадку* ν.

Калі $\sigma = -\nu$, знаходзім іншы развязак Бэсэля — *цыліндрычную функцыю Бэсэля 2-га роду парадку* ν

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(p-\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2p-\nu}. \tag{23}$$

Пералічым некаторыя ўласцівасці цыліндрычных функцый.

I. Калі $\nu \neq n$, $n = 0, 1, \ldots,$ то функцыі $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінейна незалежныя, паколькі $J_\nu(0) = 0$, а $J_{-\nu}(0) = \infty$.

II. Калі $\nu = n$, $n = 0, 1, \ldots,$ то функцыі $J_n(x)$ і $J_{-n}(x)$ лінейна залежныя, прычым $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. У гэтым выпадку для выяўлення агульнага развязку раўнання Бэсэля выкарыстоўваецца *цыліндрычная функцыя Вэбера — Ноймана*

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \qquad \nu \neq n. \tag{24}$$

Калі $\nu = n$, правая частка роўнасці (24) набывае нявызначаны выгляд $\Big(\dfrac{0}{0}\Big)$. Раскрыем гэтую нявызначанасць выкарыстоўваючы правіла Лёпіталя і вызначым функцыю Вэбера — Ноймана з цэлым індэксам

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{\cos\nu\pi\,\dfrac{dJ_\nu(x)}{d\nu} - \dfrac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu}}{\pi\cos\nu\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu}\Big]\Big|_{\nu=n} - \frac{1}{\pi}(-1)^n\Big[\frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu}\Big]\Big|_{\nu=n}. \quad (25)$$

Вылічаючы вытворныя $\dfrac{dJ_\nu(x)}{d\nu}$ і $\dfrac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu}$ з дапамогай шэрагаў (22) і (23), прыходзім ад (25) да раскладу

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-n} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{n+2k}\Big[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\Big].$$

Функцыя $N_n(x)$ лінейна незалежная ад $J_n(x)$ і з'яўляецца развязкам раўнання Бэсэля. Такім чынам, агульны развязак раўнання (21), уключаючы і выпадак $\nu = n$, можа быць выяўлены ў выглядзе

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x),$$

дзе C_1 і C_2 — адвольныя сталыя.

III. Цыліндрычныя функцыі Бэсэля розных парадкаў звязаныя паміж сабой рэкурэнтнымі суадносінамі

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x}J_\nu(x), \quad (26)$$

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x), \quad (27)$$

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x). \quad (28)$$

Кожная з формул (26)—(28) можа быць усталяваная з дапамогай раскладу (22), хоць дастаткова праверыць першыя дзве, паколькі трэцяя з'яўляецца іх следствам.

Адзначым прыватны выпадак рэкурэнтнай формулы (27), калі $\nu = 0$:

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Функцыі $J_0(x)$ і $J_1(x)$ найболей часта сустракаюцца ў дастасаваннях, для іх складзеныя падрабязныя табліцы (гл., напрыклад, [2]). Формула (26) дазваляе паслядоўна знаходзіць значэнні функцый $J_2(x)$, $J_3(x)$ і г. д.

Заўвага 2.. *Формулу* (28) *можна перапісаць у эквівалентнай форме* $xJ'_\nu(x) + \nu J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x)$, *і пасля памножэння на* $x^{\nu-1}$ *яна прымае выгляд*

$$\frac{d}{dx}\big[x^\nu J_\nu(x)\big] = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

Інтэгруючы апошнія суадносіны, знаходзім

$$x^\nu J_\nu(x) = \int_0^x t^\nu J_{\nu-1}(t)\,dt. \quad (29)$$

Формула (29) можа быць эфектыўна выкарыстаная для вылічэння інтэгралаў, якія ўзнікаюць у дастасаваннях. Вылічым, напрыклад, інтэграл $\int\limits_0^x t^3 J_0(t)\,dt$. З дыферэнцыяльнага раўнання (21), калі $\nu = 0$, вынікае тоеснасць $J_0(t) = -J_0''(t) - \frac{1}{t}\,J_0'(t)$, таму праінтэгруем часткамі. Маем

$$\int\limits_0^x t^3 J_0(t)\,dt = -\int\limits_0^x t^3 J_0''(t)\,dt - \int\limits_0^x t^2 J_0'(t)\,dt = -x^3 J_0'(x) +$$

$$+\,2\int\limits_0^x t^2 J_0(t)\,dt = -x^3 J_0'(x) + 2x^2 J_0(x) - 4\int\limits_0^x tJ_0(t)\,dt =$$

$$= x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x).$$

Такім чынам, праўдзіцца роўнасць

$$\int\limits_0^x t^3 J_0(t)\,dt = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x). \tag{30}$$

IV. Для вялікіх значэнняў x маюць месца асімптатычныя формулы

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

V. Калі $\nu > -1$, то ўсе карані раўнання $J_\nu(x) = 0$ — рэчаісныя лікі.

Найболей часта выкарыстоўваюцца цыліндрычныя функцыі з цэлымі індэксамі $J_0(x), J_1(x), \ldots, J_n(x), \ldots$. Раўнанне выгляду $J_n(x) = 0$ мае злічнае мноства дадатных каранёў

$$\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \ldots < \mu_k^{(n)} < \ldots .$$

2.2. ВАГАННІ КРУГЛАЙ МЕМБРАНЫ

Разгледзім матэматычную мадэль *свабодных ваганняў аднароднай круглай мембраны* радыюса l з замацаваным краем. Яна мае выгляд змяшанай задачы для вызначэння папярочнага зрушэння $u(r, \varphi, t)$ мембраны:

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (r, \varphi) \in G, \quad t > 0, \tag{31}$$

$$u(r, \varphi, 0) = h(r, \varphi), \quad \frac{\partial u(r, \varphi, 0)}{\partial t} = g(r, \varphi), \tag{32}$$

$$u(l, \varphi, t) = 0, \quad u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t). \tag{33}$$

Тут $G = \big\{(r, \varphi) : 0 \leqslant r < l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\big\}$, функцыі $h(r, \varphi)$ і $g(r, \varphi)$ задаюць зрушэнне і хуткасць розных частак мембраны ў пачатковы момант часу адпаведна. Паколькі $r = 0$ з'яўляецца асобым пунктам раўнання (31), то дадаткова неабходна патрабаваць абмежаванасці функцыі $u(r, \varphi, t)$ у гэтым пункце ў любы момант часу.

У адпаведнасці з метадам Фур'е шукаем частковы развязак ў выглядзе

$$u(r,\varphi,t) = v(r,\varphi)T(t).$$

Пасля падстаноўкі ў раўнанне (31) і падзелу зменных атрымаем раўнанне для часавай функцыі $T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0$ і задачу на ўласныя значэнні для функцыі $v(r,\varphi)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 v = 0, \tag{34}$$

$$\big|v(0,\varphi)\big| < \infty, \quad v(l,\varphi) = 0, \quad v(r,\varphi) = v(r,\varphi+2\pi). \tag{35}$$

Ізноў падзелім зменныя, лічачы $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Падстаўляючы гэты развязак ў (34), знаходзім

$$\frac{1}{R}\Big[r\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big) + r^2\lambda^2 R\Big] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2.$$

Далучаючы да дыферэнцыяльнага раўнання для вуглавой функцыі $\Phi(\varphi)$ умову 2π перыядычнасці, прыходзім да задачы

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu^2\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Яе развязкамі будуць

$$\mu_n = n, \quad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi;\ \sin n\varphi, \quad n = 0, 1,\ \ldots.$$

У сваю чаргу, для радыяльнай функцыі атрымаем сям'ю задач Штурма — Ліўвіля:

$$\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big) - \frac{n^2}{r}R + \lambda^2 rR = 0, \tag{36}$$

$$\big|R(0)\big| < \infty, \quad R(l) = 0, \quad n = 0, 1,\ \ldots. \tag{37}$$

Увядзем новую зменную $x = \lambda r$. Тады

$$\frac{dR}{dr} = \lambda\frac{dR}{dx}, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \lambda^2\frac{d^2R}{dx^2}$$

і раўнанне (36) пераходзіць у раўнанне Бэсэля

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \Big(1 - \frac{n^2}{x^2}\Big)R = 0.$$

Яго агульны развязак $R_n(x) = C_n J_n(x) + D_n N_n(x)$ або

$$R_n(r) = C_n J_n(\lambda r) + D_n N_n(\lambda r).$$

Функцыя Бэсэля $J_n(x)$ абмежаваная на адрэзку $[0,l]$, а функцыя Вэбера —Ноймана $N_n(x)$ не абмежаваная ў наваколлі пункту $x = 0$. Для выканання ўмовы $\big|R(0)\big| < \infty$ неабходна, каб $D_n = 0$. Для другой канстанты пакладзем $C_n = 1$ і вызначым уласныя значэнні з межавай умовы $J_n(\lambda l) = 0$. Маем

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{l}, \quad R_{kn}(r) = J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)} r}{l}\Big), \tag{38}$$

дзе $\mu_k^{(n)}$ — дадатныя карані раўнання $J_n(\mu) = 0$.

Уласныя функцыі (38) валодаюць уласцівасцю артаганальнасці з вагой $\rho(r) = r$ на адрэзку $[0, l]$

$$\int\limits_0^l rJ_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)}r}{l}\Big)J_n\Big(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\Big)dr = 0, \quad k \neq m. \tag{39}$$

Квадрат нормы ўласнай функцыі $J_n\Big(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{l}\Big)$ роўны

$$\Big\|J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)}r}{l}\Big)\Big\|^2 = \int\limits_0^l rJ_n^2\Big(\frac{\mu_k^{(n)}r}{l}\Big)dr = \frac{l^2}{2}\big[J_n'(\mu_k^{(n)})\big]^2. \tag{40}$$

Вяртаючыся да задачы (34), (35), атрымаем, што ўласнаму значэнню $\lambda_k^{(n)} = \dfrac{\mu_k^{(n)}}{l}$ адпавядаюць дзве ўласныя функцыі:

$$v_{kn}^{(1)}(r,\varphi) = J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)}r}{l}\Big)\cos n\varphi, \quad n = 0, 1, \ \ldots, \quad k = 1, 2, \ \ldots,$$

$$v_{kn}^{(2)}(r,\varphi) = J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)}r}{l}\Big)\sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \ \ldots, \quad k = 1, 2, \ \ldots.$$

Запішам цяпер агульны развязак раўнання для функцыі $T(t)$

$$T_{kn}(t) = A_{kn}\cos\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big) + B_{kn}\sin\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big).$$

Такім чынам, частковыя развязкі раўнання, якія задавальняюць межавыя умовы, маюць выгляд

$$u_{kn}(r,\varphi,t) = v_{kn}^{(1)}(r,\varphi)\Big[A_{kn}\cos\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big) + B_{kn}\sin\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big)\Big] + \\ + v_{kn}^{(2)}(r,\varphi)\Big[C_{kn}\cos\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big) + D_{kn}\sin\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big)\Big].$$

Возьмем суперпазіцыю гэтых развязкаў

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_{kn}\cos\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big) + B_{kn}\sin\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big)\Big] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}v_{kn}^{(2)}(r,\varphi)\Big[C_{kn}\cos\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big) + D_{kn}\sin\Big(\frac{a\mu_k^{(n)}t}{l}\Big)\Big].$$

Вызначаючы каэфіцыенты $A_{kn}, B_{kn}, C_{kn}, D_{kn}$ з пачатковых умоваў, канчаткова атрымаем развязак змяшанай задачы (31)—(33).

Заўвага 3.. *У тым выпадку, калі межавыя і пачатковыя ўмовы не залежаць ад зменнай φ, а залежаць толькі ад радыяльнай каардынаты r (задача валодае* *цыліндрычнай сіметрыяй), матэматычная мадэль спрашчаецца і пераходзіць у змяшаную задачу для аднамернага раўнання ваганняў круглай мембраны адносна невядомай функцыі* $u = u(r,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = h(r), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

2.3. РАДЫЯЛЬНАЕ РАСПАЎСЮДЖВАННЕ ЦЕПЛЫНІ Ў БЯСКОНЦЫМ КРУГАВЫМ ЦЫЛІНДРЫ

Разгледзім задачу аб *астыванні бясконцага кругавога цыліндру радыюса* l з пачатковай тэмпературай, якая залежыць толькі ад адлегласці пункту да восі цыліндру, і нулявой тэмпературай на паверхні цыліндру:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad 0 < r < l, \quad t > 0, \tag{41}$$

$$u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{42}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \tag{43}$$

Сфармуляваная задача валодае цыліндрычнай сіметрыяй, г. зн. $u = u(r,t)$, а аператар Ляпляса мае выгляд

$$\Delta u = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big) \quad \text{або} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Будзем шукаць развязак раўнання (41) у выглядзе здабытку

$$u(r,t) = R(r)T(t). \tag{44}$$

Падстаўляючы (44) у (41) і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d}{dr}\Big(r\,\dfrac{dR}{dr}\Big)}{R} = -\lambda^2. \tag{45}$$

З межавай умовы (42) і выяўлення (44) выцякае, што $R(l) = 0$. Адносна межавай умовы ў пункце $r = 0$ маем асаблівы выпадак, калі каэфіцыент цеплаправоднасці $k(r) = r$ ператвараецца ў нуль. Такім чынам, неабходна запатрабаваць выканання ўмовы абмежаванасці $\big|R(0)\big| < \infty$.

У выніку задача Штурма — Ліўвіля набывае наступны выгляд:

$$\frac{d}{dr}\Big(r\,\frac{dR}{dr}\Big) + \lambda^2 r R = 0, \tag{46}$$

$$\big|R(0)\big| < \infty, \quad R(l) = 0. \tag{47}$$

Перапішам раўнанне (46) у эквівалентнай форме

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dR}{dr}+\lambda^2R=0$$

і ўвядзём новую незалежную зменную $x=\lambda r$. Тады

$$\frac{dR}{dr}=\lambda\,\frac{dR}{dx},\quad \frac{d^2R}{dr^2}=\lambda^2\,\frac{d^2R}{dx^2}.$$

У выніку пасля дзялення на λ^2 прыходзім да раўнання

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx}+R=0,$$

якое супадае з раўнаннем Бэсэля нулявога парадку. Агульны развязак гэтага раўнання выяўляецца лінейнай камбінацыяй

$$R(x)=C_1J_0(x)+C_2N_0(x)\quad \text{або}\quad R(r)=C_1J_0(\lambda r)+C_2N_0(\lambda r).$$

Цыліндрычная функцыя $J_0(\lambda r)$ абмежаваная на адрэзку $[0,l]$, а функцыя $N_0(\lambda r)$ не абмежаваная ў наваколлі пункту $r=0$. Для выканання ўмовы абмежаванасці $\bigl|R(0)\bigr|<\infty$ неабходна, каб $C_2=0$. Як звычайна, другую канстанту бяром $C_1=1$. З межавай умовы $J_0(\lambda l)=0$ знаходзім уласныя значэнні

$$\lambda_k=\frac{\mu_k}{l},\quad k=1,2,\ \dots,$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu)=0$. Уласныя функцыі задачы (46), (47) маюць выгляд

$$R_k(r)=J_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr),\quad k=1,2,\ \dots,$$

прычым (гл. формулу (39))

$$\int\limits_0^l rJ_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr)J_0\Bigl(\frac{\mu_m r}{l}\Bigr)dr=0,\quad k\neq m.$$

Вернемся да суадносін (45) і возьмем раўнанне для часавай функцыі $T_k'+\Bigl(\dfrac{\mu_k a}{l}\Bigr)^2T_k=0$. Яго агульны развязак $T_k(t)=A_ke^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2t}$.

Складзем шэраг з адвольнымі каэфіцыентамі

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2t}J_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr). \tag{48}$$

Выбярэм A_k так, каб выконвалася пачатковая ўмова (43)

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr)=\varphi(r). \tag{49}$$

Выраз (49) уяўляе сабою расклад зададзенай функцыі $\varphi(r)$ у шэраг Фур'е па артаганальнай з вагой $\rho(r)=r$ на адрэзку $[0,l]$ сістэме функцый $\Big\{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\}$. З агульнай тэорыі вынікае, што яго каэфіцыенты вылічаюцца па формулах

$$A_k=\frac{1}{\Big\|J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2}\int\limits_0^l r\varphi(r)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)dr, \tag{50}$$

прычым (гл. формулу (40))

$$\Big\|J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2=\int\limits_0^l r\Big[J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\Big]^2dr=\frac{l^2}{2}\big[J_0'(\mu_k)\big]^2=\frac{l^2}{2}\,J_1^2(\mu_k),$$

дзе $J_1(\mu_k)$ — значэнні цыліндрычнай функцыі Бэсэля першага парадку ў пунктах μ_k. У апошняй роўнасці выкарыстоўваліся рэкурэнтныя суадносіны $J_0'(x)=-J_1(x)$.

У выніку формула (50) набывае выгляд

$$A_k=\frac{2}{l^2J_1^2(\mu_k)}\int\limits_0^l r\varphi(r)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)dr. \tag{51}$$

Такім чынам, развязак змяшанай задачы (41)—(43) выяўляецца формулай (48), у якой каэфіцыенты A_k вылічаюцца паводле роўнасці (51).

Занятак 4

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 27. Развязаць задачу аб свабодных ваганнях аднароднай круглай мембраны радыюса l, з замацаваным краем, калі пачатковыя ўмовы маюць выгляд $u|_{t=0}=\varphi(r)$, $u_t'|_{t=0}=0$.

Неабходна развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\Big(\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0\leqslant r<l, \quad t>0,\\[2mm] \big|u|_{r=0}\big|<\infty, \quad u|_{r=l}=0, \quad t\geqslant 0,\\[2mm] u|_{t=0}=\varphi(r), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant r\leqslant l.\end{cases}$$

Згодна з метадам Фур'е, развязак задачы будзем шукаць у выглядзе здабытку $u(r,t)=R(r)T(t)$. Пасля падстаноўкі і падзелу зменных атрымаем суадносіны

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\dfrac{d^2R}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{dR}{dr}}{R}=-\lambda^2.$$

З межавых умоваў выцякаюць умовы для радыяльнай функцыі $\bigl|R(0)\bigr| < \infty$, $R(l) = 0$, якія разам з раўнаннем адносна $R(r)$ утвараюць задачу Штурма — Ліўвіля:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \\ \bigl|R(0)\bigr| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Выконваючы замену зменных $x = \lambda r$, прыходзім да раўнання

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + R = 0.$$

Яго развязак запісваецца ў выглядзе лінейнай камбінацыі

$$R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Вяртаючыся да зменнай r, атрымаем агульны выгляд функцыі $R(r)$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

З умовы $\bigl|R(0)\bigr| < \infty$ вынікае, што $C_2 = 0$, а з другой межавай умовы $R(l) = 0$, калі $C_1 = 1$, атрымаем $J_0(\lambda l) = 0$. Адсюль

$$\lambda l = \mu_k, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr), \quad k = 1, 2, \ \ldots,$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Для функцыі $T(t)$ прыходзім да дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку са сталымі каэфіцыентамі

$$T_k''(t) + \Bigl(\frac{\mu_k a}{l}\Bigr)^2 T_k(t) = 0,$$

развязак якога мае выгляд

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}.$$

Памнажаючы $T_k(t)$ на ўласную функцыю $X_k(x)$ і падсумоўваючы па ўсіх k, атрымаем шэраг

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigl(A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr).$$

Другая пачатковая ўмова прыводзіць да роўнасці

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k a}{l}\, B_k J_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr) = 0,$$

з якой вынікае, што $B_k = 0$, $k = 1, 2, \ \ldots$. Падстаўляючы шэраг у першую пачатковую ўмову, атрымаем суадносіну

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\Bigl(\frac{\mu_k r}{l}\Bigr) = \varphi(r),$$

з якой выцякаюць формулы для каэфіцыентаў A_k:

$$A_k = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr.$$

Канчаткова развязак змяшанай задачы набывае выгляд

$$u(r,t) = \frac{2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)}{J_1^2(\mu_k)} \cos\frac{\mu_k a t}{l} \int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr,$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Задача 28. Дадзены бясконцы кругавы цыліндр радыюса l. Пачатковая тэмпература ўсярэдзіне цыліндру роўная $u|_{t=0} = u_0\Big(1 - \frac{r^2}{l^2}\Big)$, $u_0 = \mathrm{const}$, а на паверхні цыліндру падтрымліваецца нулявая тэмпература. Знайсці тэмпературу цыліндру, калі $t > 0$.

Развязанне. Тэкставая задача зводзіцца да змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = u_0\Big(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\Big), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Яе развязак будзем шукаць у выглядзе здабытку

$$u(r,t) = R(r)T(t).$$

Падзяляючы зменныя, прыходзім да двух звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\lambda^2.$$

Улічваючы межавыя ўмовы, атрымаем задачу Штурма — Ліўвіля для радыяльнай функцыі $R(r)$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Увядзём новую незалежную зменную $x = \lambda r$. Тады

$$\frac{dR}{dr} = \lambda\,\frac{dR}{dx}, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} = \lambda^2\,\frac{d^2 R}{dx^2},$$

і пасля замены прыходзім да раўнання Бэсэля нулявога парадку

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + R = 0.$$

Развязак гэтага раўнання шукаем у выглядзе

$$R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Вяртаючыся да зменнай r, атрымаем агульны выгляд функцыі $R(r)$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Паколькі цыліндрычная функцыя $J_0(\lambda r)$ абмежаваная на адрэзку $[0, l]$, а функцыя Вэбера — Ноймана $N_0(\lambda r)$ не абмежаваная ў наваколлі пункту $r = 0$, то з межавых умоваў вынікае, што

$$C_2 = 0, \quad C_1 J_0(\lambda l) = 0.$$

Лічачы $C_1 = 1$, адсюль знаходзім, што

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big), \quad k = 1, 2, \ \ldots,$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Раўнанне адносна функцыі $T(t)$ мае выгляд

$$T_k'(t) + \Big(\frac{\mu_k a}{l}\Big)^2 T_k(t) = 0.$$

Развязваючы яго як звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне першага парадку са сталымі каэфіцыентамі, атрымаем

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}.$$

Развязак змяшанай задачы трэба шукаць у выглядзе шэрагу

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big).$$

Падстаноўка гэтага шэрагу ў пачатковую ўмову прыводзіць да роўнасці

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = u_0\Big(1 - \frac{r^2}{l^2}\Big).$$

У адпаведнасці з формуламі для каэфіцыентаў раскладу ў шэраг двойчы дыферэнцавальнай функцыі, абмежаванай у пункце $r = 0$ і роўнай нулю, калі $r = l$, маем

$$A_k = \frac{u_0}{\Big\| J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2} \int\limits_0^l r\Big(1 - \frac{r^2}{l^2}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr = \Big[\frac{\mu_k r}{l} = x, dr = \frac{l}{\mu_k} dx\Big] =$$

$$= \frac{2u_0}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^{\mu_k} \Big[\Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 x - \frac{l^2}{\mu_k^4}\, x^3\Big] J_0(x)\, dx = \frac{2u_0}{J_1^2(\mu_k)\mu_k^2}\Big[\mu_k J_1(\mu_k) -$$

$$- 2J_0(\mu_k) - \mu_k J_1(\mu_k) + \frac{4}{\mu_k}\, J_1(\mu_k)\Big] = \frac{8u_0}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}.$$

Для вылічэння каэфіцыентаў A_k выкарыстоўваліся інтэгральная ўласцівасць цыліндрычных функцый Бэсэля (29) і формула (30).

Такім чынам, развязак зыходнай задачы мае выгляд

$$u(r,t) = 8u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Задачы для самастойнага развязання

Задача 29. Даказаць рэкурэнтныя суадносіны

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}\, J_\nu(x).$$

Задача 30. Вылічыць інтэграл

$$\int_0^l r J_0(ar) J_0(br)\, dr, \quad a, b = \mathrm{const}.$$

Задача 31. Знайсці ваганні аднароднай круглай мембраны радыюса l, з замацаваным краем, калі пачатковая хуткасць роўная нулю, а пачатковае адхіленне $u|_{t=0} = h\Big(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\Big)$, $h = \mathrm{const}$.

Задача 32. Дадзены неабмежаваны кругавы цыліндр радыюса l. Знайсці размеркаванне тэмпературы ўсярэдзіне цыліндру для $t > 0$, калі на паверхні цыліндру падтрымліваецца нулявая тэмпература, а пачатковая тэмпература цыліндру роўная $u|_{t=0} = AJ_0\Big(\dfrac{\mu_n r}{l}\Big)$, $A = \mathrm{const}$, дзе μ_n — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Развязаць наступныя змяшаныя задачы:

33. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \quad u_0 = \mathrm{const}. \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad h > 0 - \text{малы лік}. \end{cases}$$

35. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad 0 \leqslant x < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Занятак 5

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 36. Знайсці радыяльнае размеркаванне тэмпературы ў бясконцым кругавым цыліндры радыюса l, калі на бакавой паверхні цыліндру падтрымліваецца сталая тэмпература u_0, а пачатковая тэмпература ўсярэдзіне цыліндру роўная нулю.

Развязанне. Сфармуляванай фізічнай мадэлі адпавядае змяшаная задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = u_0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Заменай $u(r,t) = v(r,t) + u_0$ прыходзім да аднароднай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big), \\ \big|v|_{r=0}\big| < \infty, \quad v|_{r=l} = 0, \\ v|_{t=0} = -u_0. \end{cases}$$

У згодзе са схемай метаду Фур'е, будзем шукаць развязак ў выглядзе здабытку $v(r,t) = R(r)T(t)$. Падстаўляючы ў раўнанне і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr}}{R} = -\lambda^2.$$

З улікам межавых умоваў адносна радыяльнай функцыі $R(r)$ прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Яе развязак запісваецца ў выглядзе (гл. занятак 4)

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big), \quad k = 1, 2, \ \ldots,$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$. Для часавай функцыі $T(t)$ дыферэнцыяльнае раўнанне мае выгляд

$$T_k'(t) + \Big(\frac{\mu_k a}{l}\Big)^2 T_k(t) = 0.$$

Развязваючы яго як раўнанне першага парадку са сталымі каэфіцыентамі, знаходзім

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}.$$

Складзем шэраг са здабыткаў $T_k(t)$ на функцыі $R_k(r)$

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big).$$

Падставім гэты шэраг у пачатковую ўмову

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = -u_0.$$

Разглядаючы гэтую роўнасць як расклад функцыі $f(r) = -u_0$ у шэраг па артаганальнай з вагой $\rho(r) = r$ на адрэзку $[0,l]$ сістэме функцый $J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$ і выкарыстоўваючы інтэгральную ўласцівасць цыліндрычных функцый Бэсэля (29), для каэфіцыентаў A_k атрымаем

$$A_k = \frac{-u_0}{\left\|J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\right\|^2} \int_0^l r J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr = -\frac{2u_0}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^l r J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr =$$

$$= \Big[\frac{\mu_k r}{l} = x,\ dr = \frac{l}{\mu_k}\, dx\Big] = -\frac{2u_0}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{\mu_k} \Big(\frac{l}{\mu_k}\Big)^2 x J_0(x)\, dx =$$

$$= -\frac{2u_0}{J_1^2(\mu_k)\mu_k^2}\, \mu_k J_1(\mu_k) = -\frac{2u_0}{\mu_k J_1(\mu_k)}.$$

Канчаткова прыходзім да адказу

$$u(r,t) = u_0 - 2u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Задача 37. Знайсці ваганні аднароднай круглай мембраны радыюса l з замацаваным краем, калі гэтыя ваганні выклікаюцца раўнамерна размеркаваным ціскам $p = p_0 \sin \omega t$, прыкладзеным да аднаго з бакоў мембраны. Мяркуецца, што часціня ω вымушаючай сілы не супадае ні з адной з уласных часцінь мембраны $\omega_k = \dfrac{\mu_k a}{l}$, $k = 1, 2, \ldots,$ дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$ (нерэзанансны выпадак).

Развязанне. Неабходна развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) + \dfrac{p_0}{\rho_0}\sin \omega t, \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

дзе ρ_0 — паверхневая шчыльнасць мембраны.

Будзем шукаць развязак ў выглядзе шэрагу Фур'е

$$u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(t)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

які задавальняе межавыя умовы. У сваю чаргу, правую частку раўнання раскладзем у шэраг па ўласных функцыях

$$\frac{p_0}{\rho_0}\sin\omega t=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе каэфіцыенты $f_k(t)$ вылічаюцца па формуле

$$f_k(t)=\frac{2}{l^2J_1^2(\mu_k)}\int\limits_0^l r\,\frac{p_0}{\rho_0}\sin\omega t\,J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)dr=$$

$$=\frac{2p_0\sin\omega t}{\rho_0\mu_k^2J_1^2(\mu_k)}\int\limits_0^{\mu_k}xJ_0(x)\,dx=\frac{2p_0\sin\omega t}{\rho_0\mu_kJ_1(\mu_k)}.$$

Падстаўляючы гэтыя расклады ў зыходнае раўнанне і прымаючы ва ўвагу роўнасць

$$J_0''\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)+\frac{l}{\mu_k r}\,J_0'\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)=-J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

будзем мець

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[U_k''(t)+\frac{\mu_k^2a^2}{l^2}\,U_k(t)\Big]J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big).$$

Адсюль атрымаем звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне

$$U_k''(t)+\omega_k^2U_k(t)=f_k(t),\quad k=1,2,\ \ldots,$$

дзе $\omega_k=\dfrac{\mu_k a}{l}$. З пачатковых умоваў вынікае, што

$$U_k(0)=0,\quad U_k'(0)=0.$$

Тым самым прыходзім да задачы Кашы для вызначэння $U_k(t)$.

Запішам $U_k(t)$ у выглядзе сумы

$$U_k(t)=\widetilde{U}_k(t)+A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t,$$

дзе $\widetilde{U}_k(t)$ — частковы развязак неаднароднага раўнання. Шукаем гэты развязак ў выглядзе $\widetilde{U}_k(t)=C_k\sin\omega t$. Падстаўляючы ў раўнанне і ўлічваючы выраз для каэфіцыентаў $f_k(t)$, знаходзім

$$\widetilde{U}_k(t)=\frac{2p_0}{\rho_0(\omega_k^2-\omega^2)\mu_kJ_1(\mu_k)}\sin\omega t.$$

Такім чынам, агульны развязак неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання мае выгляд

$$U_k(t) = \frac{2p_0}{\rho_0(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\sin\omega t + A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t.$$

З пачатковых умоваў выцякае, што

$$A_k = 0, \quad B_k = -\frac{2p_0\omega}{\rho_0\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}.$$

Канчаткова атрымаем формулы для каэфіцыентаў $U_k(t)$:

$$U_k(t) = \frac{2p_0}{\rho_0(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\sin\omega t - \frac{2p_0\omega}{\rho_0\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\sin\omega_k t.$$

Развязак змяшанай задачы набывае выгляд

$$u(r,t) = \frac{2p_0\sin\omega t}{\rho_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\,J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) - \\ - \frac{2p_0\omega}{\rho_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\,J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе $\omega_k = \dfrac{\mu_k a}{l}$, μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Развяжам гэтую задачу іншым спосабам. Спачатку знойдзем частковы развязак $w(r,t)$ дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \frac{p_0}{\rho_0}\sin\omega t,$$

які задавальняе межавыя ўмовы

$$\big|w|_{r=0}\big| < \infty, \quad w|_{r=l} = 0.$$

Возьмем $w(r,t) = W(r)\sin\omega t$ і падставім у раўнанне

$$-\omega^2 W\sin\omega t = a^2\Big(W'' + \frac{1}{r}W'\Big)\sin\omega t + \frac{p_0}{\rho_0}\sin\omega t,$$

або

$$W'' + \frac{1}{r}W' + \frac{\omega^2}{a^2}W + \frac{p_0}{\rho_0 a^2} = 0.$$

Абмежаваным развязкам гэтага раўнання з'яўляецца функцыя

$$W(r) = CJ_0\Big(\frac{\omega r}{a}\Big) - \frac{p_0}{\rho_0\omega^2}.$$

З другой межавай умовы вынікае

$$C = \frac{p_0}{\rho_0\omega^2 J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)}, \quad W(r) = \frac{p_0}{\rho_0\omega^2}\left[\frac{J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)} - 1\right].$$

Такім чынам, развязак зыходнай змяшанай задачы трэба шукаць у выглядзе сумы

$$u(r,t) = \frac{p_0}{\rho_0\omega^2}\left[\frac{J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)} - 1\right]\sin\omega t + v(r,t).$$

Функцыя $v(r,t)$ з'яўляецца развязкам аднароднай змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big), \\ \big|v|_{r=0}\big| < \infty, \quad v|_{r=l} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{p_0}{\rho_0\omega}\left[1 - \dfrac{J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)}\right]. \end{cases}$$

Яна выяўляецца шэрагам

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k\cos\frac{\mu_k at}{l} + B_k\sin\frac{\mu_k at}{l}\Big]J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Падставім гэты шэраг у першую пачатковую ўмову

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = 0.$$

Адсюль вынікае, што $A_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Другая пачатковая ўмова прыводзіць да суадносіны

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k a}{l}\,B_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = \frac{p_0}{\rho_0\omega}\left[1 - \frac{J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)}\right].$$

Паколькі ўласныя функцыі $J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$ артаганальныя з вагой r на адрэзку $[0,l]$, знаходзім

$$B_k = \frac{p_0}{\rho_0\omega}\,\frac{l}{\mu_k a}\,\frac{1}{\Big\|J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2}\int_0^l rJ_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\left[1 - \frac{J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)}\right]dr =$$

$$= \frac{2p_0}{\rho_0\omega\mu_k alJ_1^2(\mu_k)}\left[\int_0^l rJ_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)dr - \frac{1}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)}\int_0^l rJ_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)J_0\Big(\frac{\omega r}{a}\Big)\right]dr.$$

Першы інтэграл роўны (гл. папярэднюю задачу)

$$\int_0^l rJ_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)dr = \frac{l^2}{\mu_k^2}\int_0^{\mu_k} xJ_0(x)\,dx = \frac{l^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k}.$$

Для вылічэння другога інтэграла выкарыстаем той факт, што функцыі $R_1(r) = J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$ і $R_2(r) = J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)$ задавальняюць дыферэнцыяльныя раўнанні

$$\frac{d}{dr}\Big(r\,\frac{dR_1}{dr}\Big) + \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2 rR_1(r) = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d}{dr}\Big(r\,\frac{dR_2}{dr}\Big) + \Big(\frac{\omega}{a}\Big)^2 rR_2(r) = 0$$

адпаведна. Памнажаючы першую з гэтых роўнасцяў на $R_2(r)$, другую — на $R_1(r)$, адымаючы адну ад другой і інтэгруючы па $0 \leqslant r \leqslant l$, пасля нескладаных пераўтварэнняў атрымаем

$$\Big[\Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2 - \Big(\frac{\omega}{a}\Big)^2\Big]\int\limits_0^l rR_1(r)R_2(r)dr + \big[r(R_2R_1' - R_1R_2')\big]\Big|_0^l = 0.$$

Улічваючы, што

$$\big[r(R_2R_1' - R_1R_2')\big]\Big|_0^l = l\big[R_2(l)R_1'(l) - R_1(l)R_2'(l)\big] = -\mu_k J_0\Big(\frac{\omega l}{a}\Big)J_1(\mu_k),$$

з апошняй роўнасці будзем мець

$$\frac{1}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)}\int\limits_0^l rJ_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)J_0\Big(\frac{\omega r}{a}\Big)dr = \frac{\mu_k J_1(\mu_k)}{\Big(\dfrac{\mu_k}{l}\Big)^2 - \Big(\dfrac{\omega}{a}\Big)^2} = \frac{a^2l^2\mu_k J_1(\mu_k)}{(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2}.$$

Падставім цяпер знойдзеныя значэнні інтэгралаў у выразы для каэфіцыентаў B_k:

$$B_k = \frac{2p_0}{\rho_0\omega\mu_k alJ_1^2(\mu_k)}\Big[\frac{l^2J_1(\mu_k)}{\mu_k} - \frac{a^2l^2\mu_kJ_1(\mu_k)}{(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2}\Big] =$$

$$= -\frac{2p_0\omega l^3}{\rho_0 a\big[(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2\big]\mu_k^2J_1(\mu_k)}.$$

Такім чынам, прыходзім да адказу

$$u(r,t) = \frac{p_0}{\rho_0\omega^2}\left[\frac{J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)} - 1\right]\sin\omega t -$$

$$- \frac{2p_0\omega l^3}{\rho_0 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{\big[(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2\big]\mu_k^2J_1(\mu_k)}\sin\frac{\mu_k at}{l},$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

Задача 38. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (t^2+1)J_0(\mu_n x), \quad 0 < x < 1, \\ \text{дзе } \mu_n \text{ — дадатны корань раўнання } J_0(\mu) = 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Развязанне. Будзем шукаць развязак задачы ў выглядзе сумы $u(x,t) = = v(x,t)+w(x,t)$, дзе $w(x,t)$ — частковы развязак, які задавальняе неаднароднае раўнанне і межавыя ўмовы. Возьмем

$$w(x,t) = (At^2 + B)J_0(\mu_n x)$$

і падставім яго ў дыферэнцыяльнае раўнанне

$$2AJ_0(\mu_n x) = (At^2 + B)\mu_n^2\Big[J_0''(\mu_n x) + \frac{1}{\mu_n x}\,J_0'(\mu_n x)\Big] + (t^2+1)J_0(\mu_n x).$$

З улікам таго, што $J_0''(\mu_n x) + \dfrac{1}{\mu_n x}\,J_0'(\mu_n x) = -J_0(\mu_n x)$, будзем мець

$$A\mu_n^2 t^2 + B\mu_n^2 - t^2 - 1 + 2A = 0.$$

Адсюль выцякаюць выразы для каэфіцыентаў A і B

$$A = \frac{1}{\mu_n^2}, \quad B = \frac{1}{\mu_n^4}(\mu_n^2 - 2).$$

Канчаткова для $w(x,t)$ атрымаем

$$w(x,t) = \big[\mu_n^{-2}t^2 + \mu_n^{-4}(\mu_n^2 - 2)\big]J_0(\mu_n x).$$

Для функцыі $v(x,t)$ прыходзім да змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \big|v|_{x=0}\big| < \infty, \quad v|_{x=1} = 0, \\ v|_{t=0} = \mu_n^{-4}(2-\mu_n^2)J_0(\mu_n x), \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Яе развязак запішам у выглядзе шэрагу

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k\cos\mu_k t + B_k\sin\mu_k t\big)J_0(\mu_k x),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$. Падстаўляючы шэраг у першую пачатковую ўмову, атрымаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\mu_k x) = \mu_n^{-4}(2-\mu_n^2)J_0(\mu_n x).$$

З артаганальнасці ўласных функцый $J_0(\mu_k x)$ з вагой x на адрэзку $[0,1]$, знаходзім

$$A_n = \mu_n^{-4}(2-\mu_n^2), \quad A_k = 0, \quad k \neq n.$$

Другая пачатковая ўмова прыводзіць да роўнасці

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k\mu_k J_0(\mu_k x) = 0,$$

з якой вынікае, што $B_k = 0, \ \ k = 1, 2, \ \ldots$. Такім чынам,

$$v(x,t) = \mu_n^{-4}(2-\mu_n^2)\cos\mu_n t\, J_0(\mu_n x).$$

Такім чынам, прыходзім да развязку

$$u(x,t) = \left[\mu_n^{-2}t^2 + \mu_n^{-4}(\mu_n^2 - 2)\right] J_0(\mu_n x) + \mu_n^{-4}(2-\mu_n^2)\cos\mu_n t\, J_0(\mu_n x).$$

Задача 39. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \left| u\big|_{x=0} \right| < \infty, \quad u\big|_{x=1} = \sin^2 t, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{J_0(2x)}{2J_0(2)}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Развязанне. Заўважаючы, што

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t,$$

шукаем развязак у выглядзе сумы $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, дзе функцыю $w(x,t)$ зручна браць у выглядзе

$$w(x,t) = \frac{1}{2} + W(x)\cos 2t.$$

Падстаўляючы $w(x,t)$ у дыферэнцыяльнае раўнанне, атрымаем

$$-4W(x)\cos 2t = W''(x)\cos 2t + \frac{1}{x}\,W'(x)\cos 2t,$$

або

$$W''(x) + \frac{1}{x}\,W'(x) + 4W(x) = 0.$$

Зробім замену зменных $r = 2x$. Тады

$$\frac{dW}{dx} = 2\,\frac{dW}{dr}, \quad \frac{d^2W}{dx^2} = 4\,\frac{d^2W}{dr^2}.$$

Маем

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dW}{dr} + W = 0.$$

Гэта раўнанне Бэсэля нулявога парадку. Яго абмежаваны развязак мае выгляд $W(r) = CJ_0(r)$ або са старой зменнай $W(x) = \ = CJ_0(2x)$. Такім чынам,

$$w(x,t) = \frac{1}{2} + CJ_0(2x)\cos 2t.$$

Падстаўляючы гэтую функцыю ў другую межавую ўмову, атрымаем $C = -\dfrac{1}{2J_0(2)}$. Такім чынам, маем частковы развязак

$$w(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{J_0(2x)}{2J_0(2)}\cos 2t,$$

які задавальняе зыходнае раўнанне і межавыя ўмовы.

Для функцыі $v(x,t)$ прыходзім да задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \big|v|_{x=0}\big| < \infty, \quad v|_{x=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Развязкам змяшанай задачы для аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання з аднароднымі межавымі і пачатковымі ўмовамі з'яўляецца функцыя $v(x,t) \equiv 0$. Таму канчаткова атрымаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{J_0(2x)}{2J_0(2)}\cos 2t.$$

Задача 40. Знайсці развязак змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{4x}\,u + tJ_1(\mu_n\sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \\ \text{дзе } \mu_n \text{ — дадатны корань раўнання } J_1(\mu) = 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Развязанне. Пакладзем $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, дзе ў якасці частковага развязку возьмем

$$w(x,t) = (At + B)J_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

Падставім $w(x,t)$ у зыходнае дыферэнцыяльнае раўнанне

$$AJ_1(\mu_n\sqrt{x}) = (At + B)\,\frac{\mu_n^2}{4}\Big[J_1''(\mu_n\sqrt{x}) + \frac{1}{\mu_n\sqrt{x}}\,J_1'(\mu_n\sqrt{x}) - \\ - \frac{1}{\mu_n^2 x}\,J_1(\mu_n\sqrt{x})\Big] + tJ_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

Улічваючы, што

$$J_1''(\mu_n\sqrt{x}) + \frac{1}{\mu_n\sqrt{x}}\,J_1'(\mu_n\sqrt{x}) = -\Big(1 - \frac{1}{\mu_n^2 x}\Big)J_1(\mu_n\sqrt{x}),$$

з апошняй роўнасці прыходзім да суадносіны

$$A + (At + B)\,\frac{\mu_n^2}{4} - t = 0.$$

Адсюль атрымаем $A = 4\mu_n^{-2}$, $B = -16\mu_n^{-4}$. Такім чынам,

$$w(x,t) = \big(4\mu_n^{-2}t - 16\mu_n^{-4}\big)J_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

Для функцыі $v(x,t)$ маем змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = x\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{4x}\,v, \\ \big|v|_{x=0}\big| < \infty, \quad v|_{x=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 16\mu_n^{-4} J_1(\mu_n\sqrt{x}). \end{cases}$$

Лічачы $v(x,t) = X(x)T(t)$ і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$\frac{T'}{T} = \frac{x\,\dfrac{d^2X}{dx^2} + \dfrac{dX}{dx} - \dfrac{1}{4x}\,X}{X} = -\lambda^2.$$

З улікам межавых умоваў для функцыі $X(x)$ прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} x\,\dfrac{d^2X}{dx^2} + \dfrac{dX}{dx} + \Big(\lambda^2 - \dfrac{1}{4x}\Big)X = 0, \\ \big|X(0)\big| < \infty, \quad X(1) = 0. \end{cases}$$

Уводзячы новую зменную $r = \sqrt{x}$, знаходзім

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{dX}{dr}, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{4x}\,\frac{d^2X}{dr^2} - \frac{1}{4x^{3/2}}\,\frac{dX}{dr},$$

прычым задача Штурма — Ліўвіля набудзе выгляд

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dX}{dr} + \Big(4\lambda^2 - \dfrac{1}{r^2}\Big)X = 0, \\ \big|X|_{r=0}\big| < \infty, \quad X|_{r=1} = 0. \end{cases}$$

Гэтая задача з дапамогай падстаноўкі $\xi = 2\lambda r$ зводзіцца да задачы Штурма — Ліўвіля для раўнання Бэссэля першага парадку. Яе развязкамі з'яўляюцца ўласныя значэнні і ўласныя функцыі

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{2}, \quad X_k(x) = J_1(\mu_k\sqrt{x}), \quad k = 1, 2, \ \ldots,$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_1(\mu) = 0$.

Агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання $T_k' + \dfrac{\mu_k^2}{4}\,T_k = 0$ мае выгляд $T_k(t) = A_k e^{-\frac{\mu_k^2}{4}\,t}$.

Складзем шэраг

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{\mu_k^2}{4}\,t} J_1(\mu_k\sqrt{x})$$

і падставім яго ў пачатковую ўмову

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_1(\mu_k\sqrt{x}) = 16\mu_n^{-4} J_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

З прычыны артаганальнасці ўласных функцый $J_1(\mu_k\sqrt{x})$ з вагой $\rho(x)=1$ на адрэзку $[0,1]$, з апошніх суадносін выцякае, што

$$A_n = 16\mu_n^{-4}, \quad A_k = 0, \quad k\neq n.$$

Такім чынам, $v(x,t)=16\mu_n^{-4}e^{-\frac{\mu_n^2}{4}t}J_1(\mu_n\sqrt{x})$ і ў адказе атрымаем

$$u(x,t)=16\mu_n^{-4}e^{-\frac{\mu_n^2}{4}t}J_1(\mu_n\sqrt{x})+\bigl(4\mu_n^{-2}t-16\mu_n^{-4}\bigr)J_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

Задачы для самастойнага развязання

Задача 41. Знайсці ваганні аднароднай круглай мембраны радыюсу l з замацаваным краем, калі гэтыя ваганні выклікаюцца раўнамерна размеркаваным сталым ціскам p_0, які дзейнічае на адзін бок мембраны з моманту часу $t=0$.

Задача 42. Знайсці ваганні аднароднай круглай мембраны радыюсу l, калі яе край рухаецца згодна з законам $u|_{r=l}=A\sin\omega t$. Мяркуецца, што $\omega\neq\dfrac{\mu_k a}{l}$, $k=1,2,\ \ldots,$ дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu)=0$.

Задача 43. Знайсці ваганні аднароднай круглай мембраны радыюсу l з замацаваным краем. Ваганні здзяйсняюцца ў асяроддзі з супраціўленнем, прапарцыйным хуткасці, і выклікаюцца раўнамерна размеркаваным ціскам $p=p_0\sin\omega t$, $p_0=\mathrm{const}$, прыкладзеным да аднаго з бакоў мембраны. Мяркуецца, што $\omega\neq\dfrac{\mu_k a}{l}$, $k=1,2,\ \ldots,$ дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu)=0$.

Задача 44. Знайсці размеркаванне тэмпературы ў бясконцым кругавым цыліндры радыюсу l, калі пачатковая тэмпература ўсярэдзіне цыліндру роўная u_0r^2, а на бакавой паверхні падтрымліваецца сталая тэмпература u_1.

Задача 45. Маецца неабмежаваны цыліндр радыюсу l, на паверхні якога падтрымліваецца сталая канцэнтрацыя рэчыва u_0. Пачатковая канцэнтрацыя $u(r,t)$ усярэдзіне цыліндру роўная нулю. Вызначыць колькасці рэчыва $Q(t)=2\pi\int\limits_0^l ru(r,t)\,dr$, якое прадыфундуе ўнутр цыліндру ў момант часу t, на адзінку даўжыні.

Развязаць наступныя змяшаныя задачы (μ_1 і μ_n — дадатныя карані адпаведных раўнанняў $J_\nu(\mu)=0$, $\nu=\overline{0,3}$):

46. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sin t\,J_0(\mu_n x), \quad 0<x<1,\\[2mm] \bigl|u|_{x=0}\bigr|<\infty, \quad u|_{x=1}=0,\\[2mm] u|_{t=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

47. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0<x<1,\\[2mm] \bigl|u|_{x=0}\bigr|<\infty, \quad u|_{x=1}=\cos 2t,\\[2mm] u|_{t=0}=\dfrac{J_0(2x)}{J_0(2)}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

48. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = t - 1, \\ u|_{t=0} = J_0(\mu_1 x) - 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

49. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cos t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 1 - \dfrac{J_0(x)}{J_0(1)}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

50. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sin 3t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 1, \\ u|_{t=0} = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{J_0(3x)}{3J_0(3)}. \end{cases}$$

51. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\cos 2t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \dfrac{J_0(2x)}{2J_0(2)} - \dfrac{1}{2} + J_0(\mu_1 x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

52. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \sin t\, J_0(\mu_1\sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

53. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + e^t J_1(\mu_n x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

54. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = \sin 2t \cos t, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \dfrac{3J_1(3x)}{2J_1(3)}. \end{cases}$$

55. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{4u}{x^2} + \cos t\, J_2(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

56. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + tJ_0(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

57. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + \sin t\, J_1(\mu_n x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

58. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{9u}{4x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = J_3(\mu_n \sqrt{x}). \end{cases}$$

Занятак 6

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 59. Маецца цыліндрычная трубка радыюса l настолькі доўгая, што можна лічыць, што яна распасціраецца ў абодва бакі да бясконцасці. Знайсці малыя радыяльныя ваганні газу, які змяшчаецца ў трубцы.

Развязанне. У гэтым выпадку будзем мець справу з задачай

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Як і раней, будзем шукаць развязак ў выглядзе здабытку

$$u(r,t) = R(r)T(t).$$

Падстаўляючы ў зыходнае раўнанне і падзяляючы зменныя, атрымаем два звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні адносна радыяльнай $R(r)$ і часавай $T(t)$ функцый:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} = -\lambda^2.$$

З межавай умовы $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=l} = 0$ вынікае, што $R'(l) = 0$. Далучаючы ўмову абмежаванасці на восі цыліндру $|R(0)| < \infty$, прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}\,R' + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R'(l) = 0. \end{cases}$$

Агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання $(\lambda \neq 0)$ мае выгляд

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r),$$

дзе C_1 і C_2 — адвольныя сталыя. З умовы абмежаванасці выцякае, што $C_2 = 0$. Лічачы $C_1 = 1$, атрымаем $R(r) = J_0(\lambda r)$.

Другая межавая ўмова прыводзіць да раўнання

$$J_0'(\lambda l) = 0.$$

З улікам суадносін $J_0'(x) = -J_1(x)$ яго можна запісаць у выглядзе

$$J_1(\lambda l) = 0.$$

Адсюль знаходзім уласныя значэнні і адпаведныя ўласныя функцыі задачы Штурма — Ліўвіля:

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big), \quad k = 1, 2, \ \ldots,$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_1(\mu) = 0$.

Звяртаем ўвагу на тое, што лік $\lambda_0 = 0$ з'яўляецца ўласным значэннем задачы Штурма — Ліўвіля, якому адпавядае ўласная функцыя $R_0(r) = 1$. Яна артаганальная да кожнай з функцый $J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$ з вагой $\rho(r) = r$ на адрэзку $[0, l]$. Сапраўды, выконваючы замену зменных і выкарыстоўваючы інтэгральную ўласцівасць цыліндрычных функцый (29), будзем мець

$$\int\limits_0^l 1 \cdot J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) r\,dr = \frac{l^2}{\mu_k^2}\int\limits_0^{\mu_k} x J_0(x)\,dx = \frac{l^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ \ldots.$$

Вернемся да раўнання для функцыі $T(t):$

$$T_k''(t) + \Big(\frac{\mu_k a}{l}\Big)^2 T_k(t) = 0.$$

Калі $k = 1, 2, \ \ldots,$ яго агульны развязак мае выгляд

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}.$$

Калі $k = 0$ атрымаем раўнанне $T_0'' = 0$, развязкам якога з'яўляецца паліном першай ступені

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

Памнажаючы $T_k(t)$ на ўласныя функцыі $J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$ і падсумоўваючы па $k = 0, 1, \ldots,$ прыходзім да шэрагу

$$u(r,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}\Big] J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big).$$

Падстаўляючы яго ў пачатковыя ўмовы, атрымаем

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = \varphi(r), \quad B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k a}{l} B_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = \psi(r).$$

У адпаведнасці з агульнай тэорыяй раскладання ў шэраг па артаганальнай сістэме функцый знаходзім

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr}{\int\limits_0^l r J_0^2\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr} = \frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_k)} \int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr,$$

$$B_k = \frac{l}{\mu_k a} \frac{\int\limits_0^l r\psi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr}{\int\limits_0^l r J_0^2\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr} = \frac{2}{a l \mu_k J_0^2(\mu_k)} \int\limits_0^l r\psi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr,$$

$$A_0 = \frac{\int\limits_0^l r\varphi(r)\, dr}{\int\limits_0^l r\, dr} = \frac{2}{l^2} \int\limits_0^l r\varphi(r)\, dr, \quad B_0 = \frac{\int\limits_0^l r\psi(r)\, dr}{\int\limits_0^l r\, dr} = \frac{2}{l^2} \int\limits_0^l r\psi(r)\, dr.$$

Такім чынам, развязак змяшанай задачы мае выгляд

$$u(r,t) = \frac{2}{l^2} \int\limits_0^l r\big[\varphi(r) + t\psi(r)\big] dr +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{ \frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_k)} \Big[\int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr\Big] \cos\frac{\mu_k a t}{l} +$$
$$+ \frac{2}{a l \mu_k J_0^2(\mu_k)} \Big[\int\limits_0^l r\psi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr\Big] \sin\frac{\mu_k a t}{l}\Big\} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_1(\mu) = 0$.

Задача 60. Знайсці тэмпературу бясконцага кругавога цыліндру радыюса l, на бакавой паверхні якога адбываецца канвекцыйны цеплаабмен з асяроддзем, што мае тэмпературу $u_0 = \text{const}$. Пачатковая тэмпература ўсярэдзіне цыліндру роўная $u_1 = \text{const}$.

Развязанне. Тэкставая задача эквівалентная змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad \Big[\dfrac{\partial u}{\partial r} + h(u-u_0)\Big]\Big|_{r=l} = 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_1, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Зробім замену $u(r,t) = v(r,t) + u_0$. Для функцыі $v(r,t)$ прыходзім да аднароднай змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big), \\ \big|v|_{r=0}\big| < \infty, \quad \Big[\dfrac{\partial v}{\partial r} + hv\Big]\Big|_{r=l} = 0, \\ v|_{t=0} = u_1 - u_0. \end{cases}$$

Лічачы $v(r,t) = R(r)T(t)$ і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{R'' + \dfrac{1}{r}\,R'}{R} = -\lambda^2.$$

З улікам межавых умоваў маем задачу Штурма — Ліўвіля для радыяльнай функцыі

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}\,R' + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R'(l) + hR(l) = 0. \end{cases}$$

З умовы абмежаванасці ў пункце $r = 0$ вынікае, што агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання мае выгляд $R(r) = J_0(\lambda r)$. Падстаўляючы яго ў другую межавую ўмову, атрымаем

$$\lambda J_0'(\lambda r) + hJ_0(\lambda r) = 0.$$

Няхай μ_k — дадатныя карані раўнання $\mu J_0'(\mu) + hlJ_0(\mu) = 0$. Тады ўласныя значэнні і ўласныя функцыі задачы Штурма — Ліўвіля маюць выгляд

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big), \quad k = 1, 2, \ \ldots .$$

З дыферэнцыяльнага раўнання для функцыі $T(t)$ знаходзім

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}$$

і запісваем развязак змяшанай задачы ў выглядзе шэрагу

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big).$$

Пачатковая ўмова для $v(r,t)$ прыводзіць да роўнасці

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = u_1 - u_0,$$

з якой па прычыне артаганальнасці функцый $J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$ з вагой r на адрэзку $[0,l]$ атрымаем

$$A_k=\frac{1}{\Big\|J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2}\int\limits_0^l r(u_1-u_0)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)dr=\frac{u_1-u_0}{\Big\|J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2}\,\frac{l^2J_1(\mu_k)}{\mu_k}.$$

Для вылічэння квадрата нормы ўласных функцый выкарыстаем формулу

$$\Big\|J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2=\frac{l^2}{2}\Big[J_0^2(\mu_k)+J_1^2(\mu_k)\Big],$$

у якой улічым, што $J_1(\mu_k)=-J_0'(\mu_k)=\dfrac{hl}{\mu_k}\,J_0(\mu_k)$. Маем

$$\Big\|J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\Big\|^2=\frac{l^2}{2}\Big[J_0^2(\mu_k)+\Big(\frac{hl}{\mu_k}\Big)^2J_0^2(\mu_k)\Big]=\frac{l^2(\mu_k^2+h^2l^2)J_0^2(\mu_k)}{2\mu_k^2}.$$

Падстаўляючы гэты выраз у формулу для каэфіцыентаў, атрымаем

$$A_k=\frac{2\mu_k^2(u_1-u_0)}{l^2(\mu_k^2+h^2l^2)J_0^2(\mu_k)}\,\frac{hl^3J_0(\mu_k)}{\mu_k^2}=\frac{2(u_1-u_0)hl}{(\mu_k^2+h^2l^2)J_0(\mu_k)}.$$

Такім чынам, канчаткова прыходзім да адказу

$$u(r,t)=u_0+2(u_1-u_0)hl\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{(\mu_k^2+h^2l^2)J_0(\mu_k)}\,e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2t},$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $\mu J_0'(\mu)+hlJ_0(\mu)=0$.

Задача 61. Знайсці размеркаванне тэмпературы ў неабмежаванай цыліндрычнай трубе $l_1\leqslant r\leqslant l_2$, калі на ўнутранай і знешняй паверхнях трубы падтрымліваецца нулявая тэмпература, а яе пачатковая тэмпература роўная $u_0=\mathrm{const}$.

Развязанне. Неабходна развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Big(\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), & l_1<r<l_2,\quad t>0,\\ u\big|_{r=l_1}=0,\quad u\big|_{r=l_2}=0, & t>0,\\ u\big|_{t=0}=u_0, & l_1\leqslant r\leqslant l_2.\end{cases}$$

Будзем шукаць развязак ў выглядзе $u(r,t)=R(r)T(t)$. Пасля падзелу зменных прыходзім да двух дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''+\dfrac{1}{r}\,R'}{R}=-\lambda^2.$$

Для функцыі $R(r)$ атрымаем задачу Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases}R''+\dfrac{1}{r}\,R'+\lambda^2R=0,\\ R(l_1)=0,\quad R(l_2)=0.\end{cases}$$

Агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання мае выгляд

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Падстаўляючы яго ў межавыя ўмовы, атрымаем

$$\begin{cases} C_1 J_0(\lambda l_1) + C_2 N_0(\lambda l_1) = 0, \\ C_1 J_0(\lambda l_2) + C_2 N_0(\lambda l_2) = 0. \end{cases}$$

Для таго каб аднародная сістэма лінейных раўнанняў мела нетрывіяльны развязак, неабходна і дастаткова, каб яе вызначнік быў роўны нулю

$$\begin{vmatrix} J_0(\lambda l_1) & N_0(\lambda l_1) \\ J_0(\lambda l_2) & N_0(\lambda l_2) \end{vmatrix} = J_0(\lambda l_1) N_0(\lambda l_2) - J_0(\lambda l_2) N_0(\lambda l_1) = 0.$$

Няхай μ_k — дадатныя карані раўнання

$$J_0(\mu) N_0(\mu b) - J_0(\mu b) N_0(\mu) = 0,$$

дзе $b = \dfrac{l_2}{l_1}$. Тады ўласнымі значэннямі задачы Штурма — Ліўвіля будуць лікі $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{l_1}$, $k = 1, 2, \ \ldots$. Лічачы $C_1 = N_0(\mu_k b)$, з другога раўнання сістэмы знаходзім $C_2 = -J_0(\mu_k b)$, пры гэтым першая роўнасць выконваецца тоесна. Такім чынам, уласныя функцыі маюць выгляд

$$R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) = N_0(\mu_k b) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) - J_0(\mu_k b) N_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big), \quad k = 1, 2, \ \ldots.$$

Яны ўтвараюць артаганальную з вагой r сістэму на адрэзку $[l_1, l_2]$.

З дыферэнцыяльнага раўнання $T_k' + \lambda_k^2 a^2 T_k = 0$ знаходзім

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l_1}\right)^2 t}.$$

Запісваючы развязак ў выглядзе шэрагу

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l_1}\right)^2 t} R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)$$

і падстаўляючы ў пачатковую ўмову, атрымаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) = u_0.$$

З гэтай роўнасці выцякаюць формулы для каэфіцыентаў A_k

$$A_k = \frac{1}{\left\| R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) \right\|^2} \int_{l_1}^{l_2} r u_0 R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) dr, \quad k = 1, 2, \ \ldots.$$

Знойдзем квадрат нормы ўласных функцый. Пазначым

$$Y_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big) = N_0(\mu_k b) J_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big) - J_0(\mu_k b) N_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big).$$

Функцыі $R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)$ і $Y_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big)$ задавальняюць раўнанні

$$\frac{d}{dr}\Big(r\,\frac{dR_0}{dr}\Big) + \Big(\frac{\mu_k}{l_1}\Big)^2 r R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) = 0,$$

і

$$\frac{d}{dr}\Big(r\,\frac{dY_0}{dr}\Big) + \Big(\frac{\mu}{l_1}\Big)^2 r Y_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big) = 0$$

адпаведна. Памнажаючы першую з роўнасцяў на $Y_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big)$, другую — на $R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)$, адымаючы ад адной другую і інтэгруючы па r ад l_1 да l_2, атрымаем

$$\frac{\mu_k^2 - \mu^2}{l_1^2} \int\limits_{l_1}^{l_2} r R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) Y_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big) dr +$$

$$+ \Big[\frac{\mu_k}{l_1}\, r Y_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big) R_0'\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) - \frac{\mu_k}{l_1}\, r Y_0'\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big) R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)\Big]\Bigg|_{l_1}^{l_2} = 0.$$

Адсюль з улікам межавых умоваў вынікае, што

$$\int\limits_{l_1}^{l_2} r R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) Y_0\Big(\frac{\mu r}{l_1}\Big) dr = \frac{l_1^2\big[\mu_k Y_0(\mu) R_0'(\mu_k) - \mu_k b Y_0(\mu b) R_0'(\mu_k b)\big]}{\mu_k^2 - \mu^2}.$$

Пераходзячы да ліміту, калі $\mu \to \mu_k$, і раскрываючы нявызначанасць у правай частцы з дапамогай правіла Лёпіталя, будзем мець

$$\Big\|R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)\Big\|^2 = \lim_{\mu \to \mu_k} \frac{l_1^2\big[\mu_k Y_0(\mu) R_0'(\mu_k) - \mu_k b Y_0(\mu b) R_0'(\mu_k b)\big]}{\mu_k^2 - \mu^2} =$$

$$= \frac{l_1^2}{2\mu_k}\Big\{\mu_k b^2\big[N_0(\mu_k b) J_0'(\mu_k b) - J_0(\mu_k b) N_0'(\mu_k b)\big]^2 -$$

$$- \mu_k\big[N_0(\mu_k b) J_0'(\mu_k) - J_0(\mu_k b) N_0'(\mu_k)\big]^2\Big\}.$$

Для першага складніку выкарыстаем формулу вранскіяна цыліндрычных функцый $J_0(x)$ і $N_0(x)$

$$\begin{vmatrix} J_0(x) & N_0(x) \\ J_0'(x) & N_0'(x) \end{vmatrix} = J_0(x) N_0'(x) - N_0(x) J_0'(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

З дапамогай гэтай роўнасці і суадносіны

$$\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)} = \frac{N_0(\mu_k b)}{N_0(\mu_k)},$$

што вынікае з азначэння ўласных значэнняў задачы Штурма — Ліўвіля, пераўтворым складнік у другіх дужках

$$N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k) - J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k) = \frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}\big[N_0(\mu_k)J_0'(\mu_k) - $$

$$- J_0(\mu_k)N_0'(\mu_k)\big] = -\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}\,\frac{2}{\pi\mu_k}.$$

Канчаткова для квадрата нормы атрымаем выраз

$$\Big\|R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)\Big\|^2 = \frac{l_1^2}{2\mu_k}\Big[\frac{4\mu_k b^2}{\pi^2(\mu_k b)^2} - \frac{J_0^2(\mu_k b)}{J_0^2(\mu_k)}\,\frac{4\mu_k}{\pi^2\mu_k^2}\Big] =$$

$$= \frac{l_1^2}{2\mu_k}\Big[\frac{4}{\pi^2\mu_k} - \frac{4}{\pi^2\mu_k}\,\frac{J_0^2(\mu_k b)}{J_0^2(\mu_k)}\Big] = \frac{2l_1^2\big[J_0^2(\mu_k) - J_0^2(\mu_k b)\big]}{\pi^2\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)}.$$

Вылічым цяпер інтэграл $\int\limits_{l_1}^{l_2} u_0 r R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)dr$. Улічваючы рэкурэнтныя суадносіны для цыліндрычных функцый $J_0(x), N_0(x)$ і выкарыстоўваючы разгледжаныя вышэй формулы, атрымаем

$$\Big\|R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)\Big\|^2 = \int\limits_{l_1}^{l_2} u_0 r\Big[N_0(\mu_k b)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) - J_0(\mu_k b)N_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big)\Big]dr =$$

$$= \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\int\limits_{\mu_k}^{\mu_k b} x\big[N_0(\mu_k b)J_0(x) - J_0(\mu_k b)N_0(x)\big]dx = \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\Big\{\big[\mu_k J_0'(\mu_k) -$$

$$- \mu_k b J_0'(\mu_k b)\big]N_0(\mu_k b) - \big[\mu_k N_0'(\mu_k) - \mu_k b N_0'(\mu_k b)\big]J_0(\mu_k b)\Big\} =$$

$$= \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\Big\{\mu_k b\big[J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k b) - N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k b)\big] - \mu_k\big[J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k) -$$

$$- N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k)\big]\Big\} = \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\Big[\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\,\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}\Big] = \frac{2u_0 l_1^2}{\pi\mu_k^2}\,\frac{J_0(\mu_k) - J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}.$$

У выніку каэфіцыенты A_k набываюць выгляд

$$A_k = \frac{2u_0 l_1^2\pi^2\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)}{2l_1^2\big[J_0^2(\mu_k) - J_0^2(\mu_k b)\big]}\,\frac{J_0(\mu_k) - J_0(\mu_k b)}{\pi\mu_k^2 J_0(\mu_k)} = \frac{u_0\pi J_0(\mu_k)}{J_0(\mu_k) + J_0(\mu_k b)}.$$

Пастаўляючы знойдзеныя каэфіцыенты ў шэраг, прыходзім да адказу

$$u(r,t) = u_0\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_k)}{J_0(\mu_k) + J_0(\mu_k b)}\,e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l_1}\right)^2 t}R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big),$$

дзе

$$R_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) = N_0(\mu_k b)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big) - J_0(\mu_k b)N_0\Big(\frac{\mu_k r}{l_1}\Big),$$

$b = \dfrac{l_2}{l_1}$, μ_k — дадатныя карані раўнання

$$J_0(\mu)N_0(\mu b) - J_0(\mu b)N_0(\mu) = 0.$$

Задачы для самастойнага развязання

Задача 62. Знайсці размеркаванне тэмпературы ў бясконцым кругавым цыліндры радыюса l, бакавая паверхня якога цеплаізаляваная. Пачатковая тэмпература ўсярэдзіне цыліндру роўная $u_0 r^2$.

Задача 63. Развязаць задачу аб астыванні бясконцага кругавога цыліндру радыюса l, калі пачатковая тэмпература роўная $u_0 = \text{const}$, а на яго паверхню з моманту $t = 0$ падаецца сталая цеплавая плынь шчыльнасці q.

Задача 64. Знайсці размеркаванне тэмпературы ў бясконцым кругавым цыліндры радыюса l, на бакавой паверхні якога адбываецца канвекцыйны цеплаабмен з асяроддзем, якое мае нулявую тэмпературу. Пачатковая тэмпература ўсярэдзіне цыліндру роўная $u_0 r^2$.

Задача 65. Пачатковая тэмпература ўсярэдзіне бясконцага кругавога цыліндру $0 \leqslant r \leqslant l$ роўная $u_0 = \text{const}$, а на бакавой паверхні цыліндру адбываецца канвекцыйны цеплаабмен з асяроддзем, якое мае тэмпературу $u_1 + bt$, дзе u_1 і b — канстанты. Знайсці тэмпературу цыліндру, калі $t > 0$.

Задача 66. Знайсці размеркаванне тэмпературы ў неабмежаванай цыліндрычнай трубе $l_1 \leqslant r \leqslant l_2$, калі праз яе вонкавую паверхню падаецца звонку сталая цеплавая плынь шчыльнасці q, а на ўнутранай паверхні трубы падтрымліваецца нулявая тэмпература. Пачатковая тэмпература трубы роўная $u|_{t=0} = 0$.

3. РАЎНАННІ ЭЛІПТЫЧНАГА ТЫПУ

Найпростым прадстаўніком раўнанняў эліптычнага тыпу з'яўляецца *раўнанне Ляпляса*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{52}$$

дзе x, y, z — прамавугольныя дэкартавыя каардынаты. Выраз $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ называецца *аператарам Ляпляса.* Неаднароднае раўнанне выгляду

$$\Delta u = -f(x, y, z), \tag{53}$$

дзе $f(x, y, z)$ — зададзеная функцыя, называецца *раўнаннем Пуасона.* Раўнанні Ляпляса і Пуасона апісваюць *стацыянарныя працэсы*, г. зн. працэсы, якія не змяняюцца з цягам часу.

Выгляд аператара Ляпляса ў левых частках роўнасцяў (52) і (53) пры пераходзе да крывалінейных каардынат змяняецца. У цыліндрычных каардынатах (r, φ, z)

$$\Delta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а ў сферычных каардынатах (r, θ, φ)

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Сфармулюем пастаноўку краявых (межавых) задач на прыкладзе раўнання Пуасона. Няхай G — канцоўны абсяг трохмернай прасторы з мяжой Γ. Патрабуецца знайсці непарыўны ў замкнёным абсягу $\overline{G} = G \cup \Gamma$ развязак раўнання

$$\Delta u = -f(P), \quad P = (x, y, z) \in G,$$

які задавальняе на мяжы Γ адну з межавых умоваў:

1) $u|_\Gamma = \mu_1(P)$ — першая краявая задача (*задача Дырыхле*);

2) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \mu_2(P)$ — другая краявая задача (*задачаНоймана*);

3) $\Big[\dfrac{\partial u}{\partial n} + h\big(u - \mu_3(P)\big)\Big]\Big|_\Gamma = 0$ — трэцяя краявая задача.

Тут $\mu_1(P)$, $\mu_2(P)$ і $\mu_3(P)$ — зададзеныя на мяжы Γ функцыі, $h = \text{const} > 0$, n — знешняя нармаль да Γ.

Калі абсяг, у якім шукаецца развязак раўнання, абмежаваны, то краявая задача называецца *унутранай*. Калі ж гэты абсяг з'яўляецца часткай прасторы, што ляжыць па-за абмежаваным абсягам, то краявая задача называецца *знешняй*.

Функцыя $u(P)$, непарыўная ў абсягу G разам са сваімі вытворнымі да другога парадку ўлучна, якая задавальняе ў гэтым абсягу раўнанне Ляпляса, называецца *гарманічнай у абсягу* G.

3.1. РАЗВЯЗАННЕ КРАЯВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛІПТЫЧНЫХ РАЎНАННЯЎ У ПРАМАВУГОЛЬНІКУ

Няхай маецца задача Дырыхле для раўнання Ляпляса ў прамавугольніку $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \\ u|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u|_{y=b} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases} \tag{54}$$

Развязак задачы (54) трэба шукаць у выглядзе сумы $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$, дзе $v(x,y)$ і $w(x,y)$ — развязкі краявых задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=a} = 0, \\ v|_{y=0} = \psi_1(x), \quad v|_{y=b} = \psi_2(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ w|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad w|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

Кожная з гэтых задач развязваецца метадам падзелу зменных з прыцягненнем трыганаметрычных і гіпербалічных функцый.

Занятак 7

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 67. У прамавугольніку $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ знайсці развязак задачы Дырыхле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = A \sin \dfrac{3\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} = Bx(a-x), \quad u|_{y=b} = 0, \quad A, B = \mathrm{const}. \end{cases}$$

Развязанне. Па кожным з кірункаў x і y межавыя ўмовы на частцы мяжы з'яўляюцца неаднароднымі, таму будзем шукаць функцыю $u(x,y)$ у выглядзе сумы

$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$, дзе $v(x,y)$ і $w(x,y)$ — развязкі краявых задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=a} = 0, \\ v|_{y=0} = Bx(a-x), \quad v|_{y=b} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ w|_{x=0} = A\sin\dfrac{3\pi y}{b}, \quad w|_{x=a} = 0, \\ w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

адпаведна. Для першай задачы возьмем $v(x,y) = X(x)Y(y)$. Падстаўляючы ў зыходнае раўнанне і падзяляючы зменныя, атрымаем два звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

Заўважым, што з плюсам бярэцца тая функцыя, па аргуменце якой зададзеныя аднародныя межавыя ўмовы. Падставім $v(x,y)$ у адпаведныя роўнасці $v|_{x=0} = 0$, $v|_{x=a} = 0$:

$$X(0)Y(y) = 0,\ X(a)Y(y) = 0 \ \Rightarrow\ X(0) = 0,\ X(a) = 0.$$

У выніку прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases}$$

Яе развязкамі будуць уласныя значэнні і ўласныя функцыі

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{a}, \quad X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 1, 2, \ \ldots .$$

Для $Y(y)$ для знойдзеных значэнняў λ_k маем дыферэнцыяльнае раўнанне другога парадку са сталымі каэфіцыентамі:

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0.$$

Дыскрымінант характарыстычнага раўнання $\mu^2 - \left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2 = 0$ дадатны, прычым карані роўныя $\mu_{1,2} = \pm\dfrac{k\pi}{a}$. Такім чынам, фундаментальная сістэма развязкаў мае выгляд $e^{-\frac{k\pi y}{a}}$, $e^{\frac{k\pi y}{a}}$. Аднак у дадзеным выпадку зручней у якасці фундаментальнай сістэмы браць гіпербалічную функцыю $\operatorname{sh}\dfrac{k\pi}{a}y$ і яе зрух $\operatorname{sh}\dfrac{k\pi}{a}(b-y)$. Тады агульны развязак запішацца ў выглядзе

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}y + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y).$$

Памнажаючы $X_k(x)$ і $Y_k(x)$ і падсумоўваючы па ўсіх k, атрымаем шэраг

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}y + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)\Big]\sin\frac{k\pi x}{a},$$

сума якога $v(x,y)$ з'яўляецца гарманічнай у Ω функцыяй, якая задавальняе межавыя ўмовы на баках прамавугольніка Ω. Запатрабуем, каб для функцыі $v(x,y)$ выконваліся межавыя ўмовы на верхняй і ніжняй асновах:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}\sin\frac{k\pi x}{a} = Bx(a-x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}\sin\frac{k\pi x}{a} = 0.$$

З другой роўнасці вынікае, што $A_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Разглядаючы першую роўнасць як расклад функцыі $\varphi(x) = Bx(a-x)$ на адрэзку $[0,a]$ у шэраг па ўласных функцыях $X_k(x)$, у якім каэфіцыентамі Фур'е будуць лікі $\varphi_k = B_k \operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}$, атрымаем

$$B_k = \frac{2}{a\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\int_0^a Bx(a-x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx = \frac{4Ba}{(k\pi)^2\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\int_0^a \sin\frac{k\pi x}{a}\,dx =$$

$$= \frac{4Ba^2}{(k\pi)^3\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} 0, \ k = 2n, \\ \dfrac{8Ba^2}{(2n+1)^3\pi^3\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}, \ k = 2n+1. \end{cases}$$

Тут пры выкарыстанні формулы інтэгравання часткамі абодва разы першыя складнікі звярнуліся ў нуль.

Падстаўляючы выразы для каэфіцыентаў у шэраг, будзем мець

$$v(x,y) = \frac{8Ba^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi}{a}(b-y)}{(2n+1)^3\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}.$$

Аналагічна развязваецца краявая задача для функцыі $w(x,y)$. Лічачы $w(x,y) = X(x)Y(y)$ і падзяляючы зменныя, для $Y(y)$ прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^2 Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

з развязкамі $\lambda_s = \dfrac{s\pi}{b}$, $Y_s(y) = \sin\dfrac{s\pi y}{b}$, $s = 1, 2, \ldots$. Дыферэнцыяльнае раўнанне $X_s'' - \left(\dfrac{s\pi}{b}\right)^2 X_s = 0$ мае развязкі

$$X_s(x) = C_s \operatorname{sh}\frac{s\pi}{b}x + D_s\operatorname{sh}\frac{s\pi}{b}(a-x).$$

Складзем шэраг

$$w(x,y) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[C_s\operatorname{sh}\frac{s\pi}{b}x + D_s\operatorname{sh}\frac{s\pi}{b}(a-x)\right]\sin\frac{s\pi y}{b}$$

і падставім яго ў межавыя ўмовы, калі $x = 0$ і $x = a$:

$$\sum_{s=1}^{\infty} D_s\operatorname{sh}\frac{s\pi a}{b}\sin\frac{s\pi y}{b} = A\sin\frac{3\pi y}{b}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} C_s\operatorname{sh}\frac{s\pi a}{b}\sin\frac{s\pi y}{b} = 0.$$

Адсюль знаходзім

$$C_s = 0, \quad s = 1, 2, \ \ldots, \quad D_3 = \frac{A}{\operatorname{sh}\dfrac{3\pi a}{b}}, \quad D_s = 0, \quad s \neq 3$$

(формулы для D_s атрымліваюцца, калі прыраўняць каэфіцыенты ля аднолькавых уласных функцый). Такім чынам, маем

$$w(x, y) = \frac{A}{\operatorname{sh}\dfrac{3\pi a}{b}} \operatorname{sh}\frac{3\pi}{b}(a - x) \sin\frac{3\pi y}{b}.$$

Складаючы функцыі $v(x, y)$ і $w(x, y)$, атрымаем адказ

$$u(x, y) = \frac{8Ba^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi}{a}(b - y)}{(2n+1)^3 \operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{a} + \\ + \frac{A}{\operatorname{sh}\dfrac{3\pi a}{b}} \operatorname{sh}\frac{3\pi}{b}(a - x) \sin\frac{3\pi y}{b}.$$

Задача 68. Развязаць краявую задачу ў прамавугольніку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = A, \quad u\big|_{y=b} = Bx, \quad A, B = \text{const}. \end{cases}$$

Развязанне. Адзначым, што на баках прамавугольніка $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b\}$ межавыя ўмовы з'яўляюцца аднароднымі, таму адразу будзем шукаць нетрывіяльны развязак ў выглядзе $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Пасля падстаноўкі ў дыферэнцыяльнае раўнанне і падзелу зменных прыходзім да роўнасцяў

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

З межавых умоваў вынікае, што $X'(0) = 0, \ X'(a) = 0$. Далучаючы гэтыя ўмовы да дыферэнцыяльнага раўнання для функцыі $X(x)$, атрымаем задачу Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X'(a) = 0, \end{cases}$$

развязкамі якой з'яўляюцца

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{a}, \ \ k = 0, 1, \ \ldots, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \ \ k = 1, 2, \ \ldots, \quad X_0(x) = 1.$$

Запішам дыферэнцыяльнае раўнанне для функцыі $Y(y)$

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0.$$

Калі $k = 1, 2, \ldots,$ яго агульны развязак мае выгляд

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\, y + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\,(b-y),$$

а, калі $k = 0$, развязкам дыферэнцыяльнага раўнання $Y_0'' = 0$ будзе лінейная функцыя $Y_0(y) = A_0 y + B_0$. Тым самым пабудаваная гарманічная ў абсягу Ω функцыя

$$u(x,y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\, y + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\,(b-y)\Big]\cos\frac{k\pi x}{a},$$

якая задавальняе межавыя ўмовы для $x = 0, \;\; x = a$.

Падставім шэраг у межавую ўмову $u|_{y=0} = A$

$$B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}\cos\frac{k\pi x}{a} = A.$$

Па прычыне артаганальнасці ўласных функцый $X_k(x) = \cos\dfrac{k\pi x}{a}$ з вагой $\rho(x) = 1$ на адрэзку $[0, a]$ з гэтай роўнасці вынікае, што

$$B_0 = A, \quad B_k = 0, \quad k = 1, 2, \ \ldots .$$

Падстаўляючы цяпер шэраг у межавую ўмову $u|_{y=b} = Bx$, атрымаем

$$A_0 b + A + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}\cos\frac{k\pi x}{a} = Bx.$$

Адсюль знаходзім каэфіцыенты A_k:

$$A_0 b + A = \frac{1}{\|X_0\|^2}\int_0^a Bx\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{Ba^2}{2} = \frac{Ba}{2} \;\Rightarrow\; A_0 = \frac{Ba - 2A}{2b},$$

$$A_k = \frac{2}{a\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\int_0^a Bx\cos\frac{k\pi x}{a}\,dx = -\frac{2B}{k\pi\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\int_0^a \sin\frac{k\pi x}{a}\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, \ k = 2n, \\ -\dfrac{4Ba}{(2n+1)^2\pi^2\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}, \ k = 2n+1. \end{cases}$$

Канчаткова прыходзім да развязку краявой задачы

$$u(x,y) = \frac{Ba-2A}{2b}\, y + A -$$

$$- \frac{4Ba}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi}{a}\, y}{(2n+1)^2\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{a}.$$

Задача 69. Знайсці патэнцыял электрастатычнага поля ўсярэдзіне абсягу, абмежаванага праводзячымі пласцінамі $x = 0$, $y = 0$ і $y = b$, калі пласціна $x = 0$ зараджаная да патэнцыялу $A\Big(1-\dfrac{y}{b}\Big)$, $A = \mathrm{const}$, а пласціны $y = 0$ і $y = b$ заземленыя. Электрычныя зарады ўсярэдзіне разгляданага абсягу адсутнічаюць.

Развязанне. Дадзеная тэкставая задача эквівалентная краявой задачы ў паўпаласе $\Omega = \big\{0 \leqslant x \leqslant \infty,\, 0 \leqslant y \leqslant b\big\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = A\Big(1-\dfrac{y}{b}\Big), \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

Лічачы $u(x,y) = X(x)Y(y)$ і падстаўляючы гэты выраз у раўнанне, будзем мець

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

Далучым да раўнання для функцыі $Y(y)$ межавыя ўмовы $Y(0) = 0$, $Y(b) = 0$, якія з'яўляюцца следствам краявых умоваў на верхняй і ніжняй асновах паўпаласы Ω,

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^2 Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Развязваючы гэтую задачу, знаходзім уласныя значэнні і ўласныя функцыі

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{b}, \quad Y_k(y) = \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad k = 1, 2, \ \ldots .$$

Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне для функцыі $X(x)$

$$X_k''(x) - \Big(\frac{k\pi}{b}\Big)^2 X_k(x) = 0.$$

Выбіраючы ў якасці фундаментальнай сістэмы развязкаў стандартны набор функцый $e^{-\frac{k\pi x}{b}}$, $e^{\frac{k\pi x}{b}}$, запішам агульны развязак ў выглядзе

$$X_k(x) = A_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{\frac{k\pi x}{b}}.$$

Перамнажаючы $X_k(x)$ і $Y_k(x)$, атрымаем частковыя развязкі

$$u_k(x,y) = \Big(A_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{\frac{k\pi x}{b}}\Big)\sin\frac{k\pi y}{b},$$

якія задавальняюць суадносіны $u_k(x,0) = 0$, $u_k(x,b) = 0$. З абмежаванасці функцый $u_k(x,y)$ на бясконцасці вынікае, што $B_k = 0$. Складзем шэраг

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \sin\frac{k\pi y}{b}$$

і падпарадкуем яго межавай умове для $x=0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi y}{b} = A\Big(1-\frac{y}{b}\Big).$$

Адсюль выцякаюць формулы для каэфіцыентаў A_k:

$$A_k = \frac{2}{b}\int_0^b A\Big(1-\frac{y}{b}\Big)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy = -\frac{2A}{k\pi b}\,(b-y)\cos\frac{k\pi y}{b}\Big|_0^b = \frac{2A}{k\pi}.$$

Такім чынам, у адказе атрымаем

$$u(x,y) = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,e^{-\frac{k\pi x}{b}}\sin\frac{k\pi y}{b}.$$

Задача 70. Знайсці стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ўсярэдзіне прамавугольнай пласціны $\Omega = \big\{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\big\}$, калі бакі $x=a$ і $y=b$ пакрытыя цеплавой ізаляцыяй, на баках $x=0$ і $y=0$ падтрымліваецца нулявая тэмпература, а ў пласціне вылучаецца цеплыня са шчыльнасцю $Q = \text{const}$.

Развязанне. Будзем развязваць неаднародную краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{Q}{K}, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

дзе K — каэфіцыент унутранай цеплаправоднасці. Разгледзім адпаведную задачу Штурма — Ліўвіля па кірунку x:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(a) = 0. \end{cases}$$

Яе ўласныя функцыі — $X_k(x) = \sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2a}$, $k = 0, 1, \ldots$. Будзем шукаць развязак ў выглядзе шэрагу Фур'е

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(y)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a},$$

дзе каэфіцыенты раскладу $U_k(y)$ вызначым так, каб шэраг задавальняў раўнанне і межавыя ўмовы ў пунктах $y=0$ і $y=b$. Правую частку таксама раскладзем у шэраг па ўласных функцыях

$$-\frac{Q}{K} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a},$$

дзе каэфіцыенты f_k вылічаюцца па формулах

$$f_k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \Big(-\frac{Q}{K}\Big)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\,dx = -\frac{4Q}{K(2k+1)\pi}.$$

Падстаўляючы шэрагі ў дыферэнцыяльнае раўнанне, атрымаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{U_k''(y) - \Big[\frac{(2k+1)\pi}{2a}\Big]^2 U_k(y) - f_k\Big\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a} = 0.$$

Гэтыя суадносіны будуць выкананыя, калі ўсе каэфіцыенты раскладу роўныя нулю

$$U_k''(y) - \Big[\frac{(2k+1)\pi}{2a}\Big]^2 U_k(y) = f_k, \quad k = 0, 1, \ \ldots.$$

З межавых умоваў $u\big|_{y=0} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0$ выцякаюць роўнасці

$$U_k(0) = 0, \quad U_k'(b) = 0.$$

У выніку прыходзім да сям'і краявых задач для неаднароднага звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку са сталымі каэфіцыентамі адносна функцый $U_k(y)$. У якасці частковага развязку возьмем $\widetilde{U}_k(y) = C_k$. Падстаўляючы ў раўнанне, з улікам значэнняў f_k атрымаем

$$\widetilde{U}_k(y) = \frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3}.$$

Тады агульны развязак можна запісаць у выглядзе сумы

$$U_k(y) = \frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3} + A_k \operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{2a}\,y + B_k \operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{2a}\,(b-y).$$

З межавых умоваў вынікае, што

$$A_k = 0, \quad B_k = -\frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3 \operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}}.$$

Такім чынам, для каэфіцыентаў раскладу маем

$$U_k(y) = \frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi}{2a}\,(b-y)}{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}}\right].$$

Канчаткова прыходзім да развязку краявой задачы

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi}{2a}\,(b-y)}{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}.$$

Задачы для самастойнага развязання

Задача 71. Знайсці патэнцыял электрастатычнага поля ў прамавугольніку $\Omega = \big\{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\big\}$, калі ўздоўж боку $x = 0$ патэнцыял роўны v_0, а тры іншыя бакі заземленыя. Электрычныя зарады ўсярэдзіне прамавугольніка адсутнічаюць.

Задача 72. Знайсці стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ўсярэдзіне прамавугольнай пласціны $\Omega = \big\{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\big\}$, калі да боку $y = b$ падводзіцца сталая цеплавая плынь q, а на астатніх трох баках падтрымліваецца сталая тэмпература u_0.

Задача 73. Знайсці патэнцыял электрастатычнага поля ў скрынцы прамавугольнага сечыва $\Omega = \big\{-a \leqslant x \leqslant a,\, -b \leqslant y \leqslant b\big\}$, дзве процілеглыя грані якой $x = -a$ і $x = a$ маюць патэнцыял v_0, а дзве іншыя $y = -b$ і $y = b$ заземленыя.

Развязаць наступныя краявыя задачы:

74. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = A, \quad u\big|_{x=a} = By, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0, \quad A, B = \text{const}. \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = Ay(b-y), \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=b} = Bx(a-x), \quad A, B = \text{const}. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = \sin\dfrac{2\pi y}{b} + \sin\dfrac{7\pi y}{b}, \quad u\big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = \sin\dfrac{\pi x}{a}, \quad u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

77. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < \infty, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = A\Big(1 - \dfrac{x}{a}\Big), \quad u\big|_{y=\infty} = 0, \quad A = \text{const}. \end{cases}$$

78. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = u_0, \quad u\big|_{x=\infty} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

79. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad 0 < x < a, \quad -\dfrac{b}{2} < y < \dfrac{b}{2}, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=-b/2} = 0, \quad u\big|_{y=b/2} = 0. \end{cases}$$

80. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\dfrac{q}{a}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\dfrac{q}{b}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0, \quad q = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$$

3.2. МЕТАД ПАДЗЕЛУ ЗМЕННЫХ ДЛЯ КРУГАВЫХ І ЦЫЛІНДРЫЧНЫХ АБСЯГАЎ

Разгледзім унутраную задачу Дырыхле для круга:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{55}$$

$$u(a,\varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{56}$$

Развязак гэтай задачы будзем шукаць метадам падзелу зменных, лічачы

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0. \tag{57}$$

Падстаўляючы меркаваную форму развязку ў раўнанне (55) і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\Big(r\dfrac{dR}{dr}\Big)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda^2.$$

Адсюль вынікае, што функцыя $R(r)$ павінна быць знойдзеная як развязак дыферэнцыяльнага раўнання

$$r\frac{d}{dr}\Big(r\frac{dR}{dr}\Big) - \lambda^2 R = 0. \tag{58}$$

Для функцыі $\Phi(\varphi)$ атрымаем задачу на ўласныя значэнні

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda^2\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases} \tag{59}$$

Тут умова перыядычнасці функцыі $\Phi(\varphi)$ з'яўляецца следствам перыядычнасці шуканага развязку $u(r,\varphi)$ па вуглавой зменнай з перыядам 2π.

Задача (59) мае нетрывіяльныя перыядычныя развязкі толькі, калі $\lambda = \lambda_n = n$, $n = 0, 1, \ldots$. Гэтыя развязкі маюць выгляд

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,$$

дзе A_n і B_n — адвольныя сталыя.

З (58) для функцыі $R(r)$, калі $\lambda = n$, $n \geqslant 1$, атрымаем раўнанне

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2 R = 0. \tag{60}$$

Шукаем частковыя развязкі гэтага раўнання ў выглядзе сталай функцыі $R(r) = r^p$, $p = \text{const}$. Для вызначэння p маем суадносіны

$$r^2 p(p-1)r^{p-2} + rpr^{p-1} - n^2 r^p = 0,$$

адкуль $p^2 - n^2 = 0$ або $p = \pm n$. Такім чынам, раўнанне (60) мае два лінейна незалежныя развязкі $R_n(r) = r^n$ і $R_n(r) = r^{-n}$.

Калі $n = 0$, то раўнанне (60) набывае выгляд

$$rR'' + R' = 0 \quad \Rightarrow \quad R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r.$$

Развязак ўнутранай задачы Дырыхле павінен быць абмежаваным ў цэнтры круга $r = 0$. Таму са знойдзеных развязкаў трэба ўзяць толькі $R_n(r) = r^n$, $n = 0, 1, \ldots$.

Такім чынам, у адпаведнасці з роўнасцю (57) частковыя развязкі раўнання (55) можна запісаць у выглядзе

$$u_n(r, \varphi) = r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

З прычыны лінейнасці і аднароднасці раўнання (55) суперпазіцыя частковых развязкаў

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \tag{61}$$

таксама будзе задавальняць зыходнае раўнанне. Задавальняючы межавыя ўмовы (56), атрымаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi). \tag{62}$$

Параўноўваючы (62) з раскладам функцыі $f(\varphi)$ у шэраг Фур'е па трыганаметрычнай сістэме функцый, прыходзім да развязку ўнутранай задачы Дырыхле (55), (56):

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{r}{a}\Big)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{63}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{64}$$

Заўвага 4.. *Развязак краявой задачы для раўнання* (55) *з межавай умовай* $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = f(\varphi)$ *(задачаНоймана) даецца шэрагам*

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + C, \tag{65}$$

дзе C — адвольная сталая. Умовай развязання задачы Ноймана з'яўляецца роўнасць

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Развязак ўнутранай трэцяй краявой задачы з межавай умовай $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\Big|_{r=a} = f(\varphi)$ *мае выгляд*

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+ah)a^{n-1}}(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \tag{66}$$

Каэфіцыенты α_n *і* β_n *у формулах* (65), (66) *вызначаюцца паводле суадносін* (64).

Каб развязваць краявыя задачы для знешнасці круга замест (61) трэба выкарыстоўваць шэраг

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi).$$

Для краявой задачы ўсярэдзіне кругавога колца $a < r < b$ гарманічная функцыя набывае выгляд

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi).$$

Ужыванне метаду Фур'е для знаходжання развязкаў эліптычных раўнанняў, якія апісваюць стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў канцоўным цыліндры, патрабуе выкарыстання цыліндрычных функцый Бэсэля (гл. тэму 2).

Занятак 8

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 81. Знайсці функцыю, гарманічную ў колцы $1 < r < 2$ і такую, што $u|_{r=1} = A$, $u|_{r=2} = B\sin 2\varphi$, $A, B = \text{const}$.

Развязанне. Маем краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = A, \quad u|_{r=2} = B\sin 2\varphi. \end{cases}$$

Яе развязак выяўляецца шэрагам

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\big) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\big(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\big).$$

Падставім гэты шэраг у межавыя ўмовы:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\bigr) + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\bigr) = A,$$

$$A_0 + B_0\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}2^n\bigl(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\bigr) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\bigl(C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\bigr) = B\sin 2\varphi.$$

Прыраўноўваючы каэфіцыенты ля аднолькавых уласных функцый, прыходзім да суадносін:

$$A_0 = A,\quad A_n + C_n = 0,\quad B_n + D_n = 0,\quad n = 1, 2,\ \ldots,$$
$$A_0 + B_0\ln 2 = 0,\quad 2^n A_n + 2^{-n}C_n = 0,\quad n = 1, 2,\ \ldots,$$
$$4B_2 + \frac{1}{4}D_2 = B,\quad 2^n B_n + 2^{-n}D_n = 0,\quad n \neq 2.$$

Адсюль вынікае, што

$$A_0 = A,\quad B_0 = -\frac{A}{\ln 2},\quad A_n = C_n = 0,\quad n = 1, 2,\ \ldots,$$
$$B_2 = \frac{4B}{15},\quad D_2 = -\frac{4B}{15},\quad B_n = D_n = 0,\quad n \neq 2.$$

Такім чынам, гарманічная ў колцы функцыя мае выгляд

$$u(r,\varphi) = A - \frac{A\ln r}{\ln 2} + \frac{4B}{15}\Bigl(r^2 - \frac{1}{r^2}\Bigr)\sin 2\varphi.$$

Задача 82. Знайсці функцыю, гарманічную ў кругавым сектары $0 < r < a$, $0 < \varphi < \alpha$, якая задавальняе межавыя ўмовы $u|_{\varphi=0} = 0$, $u|_{\varphi=\alpha} = 0$, $u|_{r=a} = f(\varphi)$.

Развязанне. Краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad u|_{r=a} = f(\varphi), \end{cases}$$

будзем развязваць метадам Фур'е, лічачы $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Падстаўляючы гэты развязак ў дыферэнцыяльнае раўнанне, падзяляючы зменныя і задавальняючы межавыя ўмовы $u|_{\varphi=0} = 0$, $u|_{\varphi=\alpha} = 0$, прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля для вуглавой функцыі $\Phi(\varphi)$

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda^2\Phi = 0, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\alpha) = 0, \end{cases}$$

і дыферэнцыяльнага раўнання для функцыі $R(r)$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{1}{r^2}\lambda^2 R(r) = 0.$$

Агульны развязак раўнання для функцыі $\Phi(\varphi)$ мае выгляд

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi.$$

З першай межавай умовы знаходзім $B = 0$. Падстаўляючы развязак у другую межавую ўмову, атрымаем, што ўласныя значэнні роўныя $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$. Ім адпавядаюць уласныя функцыі $\Phi_n(\varphi) = A_n \sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}$, артаганальныя з вагой $\rho(\varphi) = 1$ на адрэзку $[0, \alpha]$:

$$\int_0^\alpha \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi = \begin{cases} 0, \quad n \neq k, \\ \left\|\sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}\right\|^2 = \dfrac{\alpha}{2}, \quad n = k. \end{cases}$$

Раўнанне для радыяльнай функцыі

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda_n^2 R(r) = 0$$

са знойдзенымі ўласнымі значэннямі λ_n з улікам умовы абмежаванасці ў цэнтры кругу $r = 0$ мае развязкі $R_n(r) = r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. Складваючы здабыткі вуглавых і радыяльных функцый, атрымаем набор частковых развязкаў выгляду $u_n(r,\varphi) = A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}$.

Пабудуем шэраг

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}$$

і запатрабуем выканання межавай умовы для $r = a$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} = f(\varphi).$$

Адсюль выцякае суадносіна для каэфіцыентаў A_n:

$$A_n = \frac{2}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}} \int_0^\alpha f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi.$$

Канчаткова прыходзім да адказу

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\int_0^\alpha f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi.$$

Задача 83. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -r^2\cos 2\varphi, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Развязанне. Запішам развязак зыходнай задачы ў выглядзе $u(r,\varphi) = = v(r,\varphi)+ w(r,\varphi)$, дзе $w(r,\varphi)$ — частковы развязак раўнання Пуасона. У якасці функцыі $w(r,\varphi)$ возьмем $w(r,\varphi) = W(r)\cos 2\varphi$. Тады

$$W''(r)\cos 2\varphi + \frac{1}{r}\,W'(r)\cos 2\varphi - \frac{4}{r^2}\,W(r)\cos 2\varphi = -r^2\cos 2\varphi,$$

або

$$r^2W''(r) + rW'(r) - 4W(r) + r^4 = 0.$$

У выніку прыходзім да раўнання Эйлера, развязак якога шукаем у выглядзе $W(r) = Cr^4$. Падстаўляючы $W(r)$ у раўнанне, знаходзім

$$12Cr^4 + 4Cr^4 - 4Cr^4 + r^4 = 0 \;\Rightarrow\; C = -\frac{1}{12}.$$

Такім чынам, частковым развязкам неаднароднага дыферэнцыяльнага раўнання будзе функцыя $w(r,\varphi) = -\dfrac{1}{12}\,r^4\cos 2\varphi$.

Адносна функцыі $v(r,\varphi)$ неабходна развязаць краявую задачу для раўнання Ляпляса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \\ v\big|_{r=a} = \dfrac{a^4}{12}\,\cos 2\varphi. \end{cases}$$

Развязак ўнутранай задачы Дырыхле мае выгляд

$$v(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\big).$$

З межавай умовы выцякае суадносіна

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n\big(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\big) = \frac{a^4}{12}\,\cos 2\varphi,$$

адкуль знаходзім, што

$$B_n = 0, \quad n = 1,2,\ldots, \quad A_2 = \frac{a^2}{12}, \quad A_n = 0, \quad n \neq 2.$$

Такім чынам, $v(r,\varphi) = \dfrac{a^2}{12}\,r^2\cos 2\varphi$, і развязкам зыходнай краявой задачы будзе функцыя

$$u(r,\varphi) = \frac{a^2}{12}\,r^2\cos 2\varphi - \frac{1}{12}\,r^4\cos 2\varphi.$$

Задача 84. Знайсці стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў цыліндры $\Omega = \big\{(r,\varphi,z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\; 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, да ніжняй асновы якога падводзіцца сталая цеплавая плынь q, а на бакавой паверхні і верхняй аснове падтрымліваецца нулявая тэмпература.

Развязанне. Сфармуляваная тэкставая задача эквівалентная краявой задачы для раўнання Ляпляса

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h,\\
\big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h,\\
\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\dfrac{q}{K}, \quad K = \mathrm{const} > 0, \quad u|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l.
\end{cases}
$$

У адпаведнасці з метадам Фур'е будзем шукаць развязак ў выглядзе здабытку $u(r,z) = R(r)Z(z)$. Падставім яго ў раўнанне і падзелім зменныя:

$$
\frac{R'' + \dfrac{1}{r}\,R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.
$$

З улікам межавых умоваў адносна радыяльнай функцыі $R(r)$ атрымаем задачу Штурма — Ліўвіля ў асаблівай пастаноўцы

$$
\begin{cases}
R'' + \dfrac{1}{r}\,R' + \lambda^2 R = 0,\\
\big|R(0)\big| < \infty, \quad R(l) = 0.
\end{cases}
$$

Уводзячы новую зменную $x = \lambda r$, прыходзім да раўнання

$$
\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + R = 0,
$$

агульны развязак якога запісваецца ў выглядзе

$$
R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x),
$$

або

$$
R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).
$$

Падстаўляючы ў межавыя ўмовы і ўлічваючы, што функцыя $N_0(r)$ не абмежаваная ў пункце $r = 0$, атрымаем

$$
\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big), \quad k = 1, 2, \ \ldots,
$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$. Адзначым, што ўласныя функцыі $J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$ утвараюць артаганальную з вагой r на адрэзку $[0, l]$ сістэму функцый.

Звернемся да дыферэнцыяльнага раўнання для функцыі $Z(z)$. З улікам знойдзеных λ_k маем

$$
Z_k''(z) - \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2 Z_k(z) = 0.
$$

Развязак гэтага раўнання зручна запісаць у выглядзе лінейнай камбінацыі гіпербалічных функцый

$$
Z_k(z) = A_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l} z + B_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h - z).
$$

Пабудуем шэраг

$$u(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}z+B_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h-z)\Big]J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)$$

і падставім яго ў межавую ўмову $u\big|_{z=h}=0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k h}{l}\,J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)=0\ \Rightarrow\ A_k=0,\ k=1,2,\ \ldots.$$

З межавай умовы на ніжняй аснове цыліндру маем

$$-\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{\mu_k}{l}\operatorname{ch}\frac{\mu_k h}{l}\,J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)=-\frac{q}{K}.$$

Адсюль выцякаюць формулы для каэфіцыентаў B_k :

$$B_k=\frac{ql}{K\mu_k\operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}}\,\frac{2}{l^2J_1^2(\mu_k)}\int\limits_0^l rJ_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)dr=$$

$$=\frac{2q}{lK\mu_kJ_1^2(\mu_k)\operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}}\,\frac{l^2J_1(\mu_k)}{\mu_k}=\frac{2ql}{K\mu_k^2J_1(\mu_k)\operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}}.$$

З улікам знойдзеных значэнняў каэфіцыентаў канчаткова прыходзім да адказу:

$$u(r,z)=\frac{2ql}{K}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2J_1(\mu_k)\operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}}\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h-z)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big).$$

Задача 85. Знайсці стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў цыліндры $\Omega=\big\{(r,\varphi,z):0\leqslant r\leqslant l,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant h\big\}$, калі тэмпература ніжняй асновы роўная нулю, бакавая паверхня цыліндру пакрытая непранікальным для цеплыні чахлом, а тэмпература верхняй асновы роўная $u\big|_{z=h}=f(r)$. Разгледзець прыватны выпадак, калі $f(r)=u_0r^2$.

Развязанне. Неабходна развязаць краявую задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0,\quad 0\leqslant r<l,\quad 0<z<h,\\[2mm] \big|u\big|_{r=0}\big|<\infty,\quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=l}=0,\quad 0\leqslant z\leqslant h,\\[2mm] u\big|_{z=0}=0,\quad u\big|_{z=h}=f(r),\quad 0\leqslant r\leqslant l.\end{cases}$$

Падстаўляючы здабытак $u(r,z)=R(r)Z(z)$ у зыходнае раўнанне і падзяляючы зменныя, атрымаем два звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні адносна радыяльнай $R(r)$ і каардынатнай $Z(z)$ функцый

$$\frac{R''+\dfrac{1}{r}R'}{R}=-\frac{Z''}{Z}=-\lambda^2.$$

З межавай умовы $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=l} = 0$ вынікае, што $R'(l) = 0$. З улікам умовы абмежаванасці на восі цыліндру $|R(0)| < \infty$ прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R'(l) = 0. \end{cases}$$

Уласныя значэнні і ўласныя функцыі гэтай задачы маюць выгляд (гл. занятак 6)

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big), \quad k = 0, 1, \ \ldots,$$

дзе μ_k — неадмоўныя карані раўнання $J_1(\mu) = 0$. Уласнаму значэнню $\lambda_0 = 0$ адпавядае ўласная функцыя $R_0(r) = 1$, артаганальная функцыям $J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)$, $k = 1, 2, \ \ldots,$ з вагой $\rho(r) = r$ на адрэзку $[0, l]$.

Разгледзім дыферэнцыяльнае раўнанне для функцыі $Z(z)$

$$Z_k''(z) - \Big(\frac{\mu_k}{l}\Big)^2 Z_k(z) = 0.$$

Калі $k = 0$, атрымаем раўнанне $Z_0'' = 0$, развязкам якога з'яўляецца палiном першай ступені

$$Z_0(z) = A_0 z + B_0.$$

Для значэнняў $k = 1, 2, \ \ldots,$ агульны развязак можна запісаць у выглядзе

$$Z_k(z) = A_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l} z + B_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h - z).$$

Складзем шэраг са здабыткаў $Z_k(z)$ на функцыі $R_k(r)$:

$$u(r, z) = A_0 z + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[A_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l} z + B_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h - z)\Big] J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big).$$

Падстаўляючы яго ў межавыя ўмовы на ніжняй і верхняй асновах цыліндру, атрымаем

$$B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k h}{l}\, J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = 0 \ \Rightarrow \ B_k = 0, \ k = 0, 1, \ \ldots,$$

$$A_0 h + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k h}{l}\, J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) = f(r) \Rightarrow A_0 = \frac{1}{h\|R_0(r)\|^2} \int_0^l r f(r)\, dr =$$

$$= \frac{2}{hl^2} \int_0^l r f(r)\, dr, \quad A_k = \frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_k) \operatorname{sh}\dfrac{\mu_k h}{l}} \int_0^l r f(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr.$$

Такім чынам, атрымаем развязак краявой задачы ў выглядзе шэрагу

$$u(r, z) = \frac{2z}{hl^2} \int_0^l r f(r)\, dr + \frac{2}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k z}{l}\, J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k h}{l}\, J_0^2(\mu_k)} \int_0^l r f(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr.$$

У прыватным выпадку, калі $f(r) = u_0 r^2$, маем

$$A_0 = \frac{2u_0}{hl^2}\int\limits_0^l r^3 dr = \frac{u_0 l^2}{2h}, \quad A_k = \frac{2u_0}{l^2 J_0^2(\mu_k)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_k h}{l}}\int\limits_0^l r^3 J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr =$$

$$= \frac{2u_0 l^4 \mu_k^{-4}}{l^2 J_0^2(\mu_k)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_k h}{l}}\big[2\mu_k^2 J_0(\mu_k) + (\mu_k^3 - 4\mu_k)J_1(\mu_k)\big] = \frac{4u_0 l^2}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_k h}{l}}.$$

Канчаткова прыходзім да адказу

$$u(r,z) = \frac{u_0 l^2 z}{2h} + 4u_0 l^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_k z}{l}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_k h}{l}\;\mu_k^2 J_0(\mu_k)} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_1(\mu) = 0$.

Задача 86. Знайсці стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў цыліндры $\Omega = \big\{(r,\varphi,z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, калі ніжняя аснова цыліндру мае нулявую тэмпературу, верхняя аснова цеплаізаляваная, а тэмпература бакавой паверхні роўная $u|_{r=l} = f(z)$. Разгледзець прыватны выпадак, калі $f(z) = \dfrac{Az}{h}$, $A =$ const.

Развязанне. У дадзенай сітуацыі маем справу з краявой задачай

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = f(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ u|_{z=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Лічачы $u(r,z) = R(r)Z(z)$ і падзяляючы зменныя, атрымаем

$$-\frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} = \frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.$$

Тут неабходна разгледзець задачу Штурма — Ліўвіля для каардынатнай функцыі $Z(z)$

$$\begin{cases} Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad 0 < z < h, \\ Z(0) = 0, \quad Z'(h) = 0. \end{cases}$$

Развязваючы яе, знаходзім уласныя значэнні і ўласныя функцыі:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2h}, \quad Z_k(z) = \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}, \quad k = 0, 1, \ \ldots.$$

У сваю чаргу, для радыяльнай функцыі $R(r)$ прыходзім да дыферэнцыяльнага раўнання

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \lambda^2 R = 0,$$

якое з дапамогай замены $x = \lambda r$ прыводзіцца да выгляду

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - R = 0.$$

Развязак гэтага раўнання можна выявіць у выглядзе лінейнай камбінацыі лінейна незалежных частковых развязкаў

$$R(x) = AI_0(x) + BK_0(x),$$

дзе $I_0(x) = J_0(ix)$ — цыліндрычная функцыя Бэсэля нулявога парадку ад чыста ўяўнага аргументу, $K_0(x)$ — функцыя Макдональда, прычым $I_0(0) = 1$, $K_0(x) \to \infty$, калі $x \to 0$. Вяртаючыся да зменнай r і ўлічваючы знойдзеныя значэнні λ_k, атрымаем

$$R_k(r) = A_k I_0\Big[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\Big] + B_k K_0\Big[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\Big].$$

Такім чынам, пабудаваныя частковыя развязкі

$$u_k(r,z) = \Big\{A_k I_0\Big[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\Big] + B_k K_0\Big[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\Big]\Big\}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h},$$

якія задавальняюць аднародныя межавыя ўмовы на ніжняй і верхняй асновах цыліндру. З умовы $|u_k(0,z)| < \infty$ і неабмежаванасці функцыі Макдональда ў наваколлі пункту $r = 0$ адразу вынікае, што $B_k = 0$, $k = 0, 1, \ \ldots .$

Складзем шэраг

$$u(r,z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k I_0\Big[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\Big]\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}$$

і запатрабуем выканання межавай умовы на бакавой паверхні цыліндру

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k I_0\Big[\frac{(2k+1)\pi l}{2h}\Big]\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h} = f(z).$$

Гэтая суадносіна ўяўляе сабой расклад зададзенай функцыі $f(z)$ у шэраг Фур'е па артаганальнай сістэме функцый $\{Z_k(z)\}$ на адрэзку $[0,h]$, прычым $\|Z_k\|^2 = \dfrac{h}{2}$. Каэфіцыенты A_k вылічаюцца па формулах

$$A_k = \frac{2}{hI_0\Big[\dfrac{(2k+1)\pi l}{2h}\Big]}\int\limits_0^h f(z)\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\,dz, \quad k = 0, 1, \ \ldots .$$

Канчаткова атрымаем

$$u(r,z) = \frac{2}{h}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_0^h f(z)\sin\dfrac{(2k+1)\pi z}{2h}\,dz}{I_0\Big[\dfrac{(2k+1)\pi l}{2h}\Big]} I_0\Big[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\Big]\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}.$$

Разгледзім прыватны выпадак, калі $f(z) = \dfrac{Az}{h}$. Выкарыстоўваючы формулу інтэгравання часткамі, атрымаем

$$\int\limits_0^h \frac{Az}{h}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\,dz = -\frac{2A}{(2k+1)\pi}\int\limits_0^h z\,d\Big[\cos\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\Big] =$$

$$= \frac{4Ah}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\Big|_0^h = \frac{4Ah(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Такім чынам, развязак запішацца ў выглядзе

$$u(r,z) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\,\frac{I_0\Big[\dfrac{(2k+1)\pi r}{2h}\Big]}{I_0\Big[\dfrac{(2k+1)\pi l}{2h}\Big]}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}.$$

Задачы для самастойнага развязання

Задача 87. Знайсці развязак краявой задачы для раўнання Ляпляса ўсярэдзіне адзінкавага круга, калі зададзеныя межавыя ўмовы:

1) $u|_{r=1} = \cos^2\varphi$; 2) $u|_{r=1} = \cos^4\varphi$; 3) $u|_{r=1} = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi$.

Задача 88. Знайсці развязак краявой задачы для раўнання Ляпляса ўсярэдзіне круга радыюса a, калі зададзеныя межавыя ўмовы:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = A\cos\varphi$; 2) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = A\cos 2\varphi$; 3) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = \sin^3\varphi$.

Задача 89. Знайсці развязак краявой задачы для раўнання Ляпляса па-за кругам радыюса a, калі зададзеныя межавыя ўмовы:

1) $u|_{r=a} = A + B\sin\varphi$; 2) $u|_{r=a} = \sin^3\varphi$; 3) $u|_{r=a} = A\cos^2\varphi$.

Задача 90. Знайсці функцыю, гарманічную ў колцы $1 < r < 2$ і такую, што выконваюцца межавыя ўмовы:

1) $u|_{r=1} = A\cos 2\varphi$, $u|_{r=2} = B$;

2) $u|_{r=1} = 1 + \cos^2\varphi$, $u|_{r=2} = \sin^2\varphi$;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = A\cos\varphi$, $u|_{r=2} = A\sin 2\varphi + B$.

Развязаць наступныя краявыя задачы:

91. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad u|_{r=a} = A\varphi, \quad A = \mathrm{const}. \end{cases}$$

92. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad u|_{r=a} = \mathrm{sgn}\Big(\varphi - \dfrac{\alpha}{2}\Big). \end{cases}$$

93. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -4r, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u\big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

94. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\dfrac{1}{2}\,r^2 \sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u\big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

95. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -12r^2 \cos 2\varphi, \quad 1 < r < 2, \\ u\big|_{r=1} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

Задача 96. Знайсці стацыянарнае размеркаванне тэмпературы ў цыліндры $\Omega = \big\{(r,\varphi,z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, калі ніжняя аснова цыліндру мае тэмпературу u_0, а на астатняй паверхні тэмпература роўная нулю.

Задача 97. Знайсці стацыянарную тэмпературу $u(r,z)$ унутраных пунктаў цыліндру $\Omega = \big\{(r,\varphi,z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, калі ў цыліндры маюцца крыніцы цеплыні аб'ёмнай шчыльнасці Q, а тэмпература паверхні цыліндру роўная нулю.

Задача 98. Знайсці патэнцыял электрастатычнага поля ўсярэдзіне абмежаванага цыліндру $\Omega = \big\{(r,\varphi,z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, абедзве асновы якога заземленыя, а бакавая паверхня зараджаная да патэнцыялу v_0.

Развязаць наступныя краявыя задачы:

99. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \Big(\dfrac{\partial u}{\partial r} + h_0 u\Big)\Big|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = -q, \quad u\big|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \quad h_0 = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$$

100. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = f(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

3.3. РАЗВЯЗАННЕ МЕЖАВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШАРАВЫХ АБСЯГАЎ

Разгледзім задачу Дырыхле для раўнання Ляпляса ў шары радыюса a з цэнтрам у пачатку каардынат:

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{67}$$

$$u\big|_{r=a} = f(\theta,\varphi). \tag{68}$$

Згодна са схемай метаду падзелу зменных, будзем шукаць развязак раўнання (67) у выглядзе
$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi).$$
Падстаўляючы ў (67) і падзяляючы зменныя, атрымаем раўнанне з частковымі вытворнымі
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0 \tag{69}$$
і звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне
$$r^2R''+2rR'-\lambda R=0. \tag{70}$$

Падрабязней спынімся на дыферэнцыяльным раўнанні (69). Запатрабуем, каб функцыя $Y(\theta,\varphi)$ была абмежаваная на адзінкавай сферы і задавальняла ўмову перыядычнасці па зменнай φ: $Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi)$. Лічачы $Y(\theta,\varphi)=\Phi(\varphi)W(\theta)$, атрымаем
$$-\frac{\sin\theta\,\dfrac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\,\dfrac{dW}{d\theta}\Big)+\lambda W\sin^2\theta}{W}=\frac{\Phi''}{\Phi}=-\mu^2.$$

Для функцыі $\Phi(\varphi)$ з улікам умовы перыядычнасці прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля
$$\begin{cases}\Phi''+\mu^2\Phi=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi).\end{cases}$$
Яе развязкамі для $\mu=m$ з'яўляюцца функцыі $\Phi_m(\varphi)=\cos m\varphi$ і $\Phi_m(\varphi)=\sin m\varphi$, $m=0,1,\ \ldots$.

Функцыя $W(\theta)$ вызначаецца з раўнання
$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{dW}{d\theta}\Big)+\Big(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Big)W=0, \tag{71}$$
і яна павінна быць абмежаваная ў пунктах $\theta=0$ і $\theta=\pi$. Лічачы у (71) $x=\cos\theta$ і ўлічваючы, што $\dfrac{d}{d\theta}=-\sin\theta\,\dfrac{d}{dx}$, будзем мець
$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dW}{dx}\Big]+\Big(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\Big)W=0, \tag{72}$$
$$\big|W(-1)\big|<\infty,\quad \big|W(1)\big|<\infty. \tag{73}$$

Краявая задача (72), (73) уяўляе сабой задачу Штурма — Ліўвіля для *далучаных функцый Лежандра*. Яе абмежаваныя, калі $\lambda=n(n+1)$, развязкі запісваюцца ў выглядзе
$$W_n(x)=Z_n^{(m)}(x)\equiv\big(1-x^2\big)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m)}(x),$$
дзе $P_n^{(m)}(x)$ — вытворная m-га парадку ад палінома Лежандра $P_n(x)$. Вяртаючыся да зменнай θ, знаходзім частковыя развязкі раўнання (71) для $\lambda=n(n+1)$:
$$W_n(\theta)=Z_n^{(m)}(\cos\theta),\quad n=0,1,\ \ldots,\quad m=0,1,\ \ldots,n. \tag{74}$$

Складаючы здабыткі функцый (74) на функцыі $\Phi_m(\varphi)$, атрымаем мноства развязкаў раўнання (69):

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = Z_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi) = Z_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi,$$
$$n = 0, 1, \ \ldots, \quad m = 0, 1, \ \ldots, n.$$

Гэтыя развязкі называюцца *сферычнымі функцыямі*. Яны валодаюць уласцівасцю артаганальнасці на адзінкавай сферы:

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta \, Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi) Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)\, d\varphi\, d\theta = 0, \quad n_1 \neq n_2 \ \text{ або } \ m_1 \neq m_2.$$

Прывядзем відавочны выгляд некаторых сферычных функцый:

$$Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) = 1, \quad Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) = \cos\theta, \quad Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) = \sin\theta\, \cos\varphi,$$
$$Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = \sin\theta\, \sin\varphi, \quad Y_2^{(0)}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\big(3\cos^2\theta - 1\big),$$
$$Y_2^{(1)}(\theta,\varphi) = 3\sin\theta\, \cos\theta\, \cos\varphi, \quad Y_2^{(-1)}(\theta,\varphi) = 3\sin\theta\, \cos\theta\, \sin\varphi,$$
$$Y_2^{(2)}(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\, \cos 2\varphi, \quad Y_2^{(-2)}(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\, \sin 2\varphi,$$

і для любога n маем

$$Y_n^{(n)}(\theta,\varphi) = C_n \sin^n\theta\, \cos n\varphi, \quad Y_n^{(-n)}(\theta,\varphi) = C_n \sin^n\theta\, \sin n\varphi,$$

дзе C_n — некаторая канстанта.

Пяройдзем да дыферэнцыяльнага раўнання (70). Яго развязак мае выгляд ступеневай функцыі $R(r) = r^p$. Пасля падстаноўкі маем

$$p(p-1)r^p + 2pr^p - n(n+1)r^p = 0,$$

або

$$p^2 + p - n(n+1) = 0.$$

Адсюль знаходзім, што $p_1 = n$, $p_2 = -(n+1)$ і, такім чынам,

$$R_n(r) = r^n, \quad R_n(r) = r^{-(n+1)}.$$

Такім чынам, атрыманыя частковыя развязкі раўнання (67):

$$u_n(r,\theta,\varphi) = r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \quad u_n(r,\theta,\varphi) = r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$
$$n = 0, 1, \ \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots, \pm n.$$

Паколькі разглядаецца ўнутраная задача Дырыхле, яе развязак шукаем у выглядзе шэрагу з нявызначанымі каэфіцыентамі

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi). \tag{75}$$

У якасці функцый $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ у роўнасці (75) бяруцца толькі тыя функцыі, якія прысутнічаюць у раскладзе $f(\theta,\varphi)$ у шэраг па сферычных функцыях

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}a^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Адзначым, што для развязання знешняй задачы Дырыхле, як і іншых знешніх краявых задач, замест суадносін (75) неабходна выкарыстаць шэраг

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{nm}r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Функцыю, гарманічную ў шаравым пласце $a < r < b$, якая прымае зададзеныя значэнні на мяжы пласта, трэба шукаць у выглядзе

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \big[A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)}\big] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Занятак 9

Прыклады развязання тыпавых задач

Задача 101. Знайсці функцыю, гарманічную ўсярэдзіне шару радыюса a і такую, што $u|_{r=a} = \cos 2\theta$.

Развязанне. Паколькі межавая ўмова не залежыць ад зменнай φ, то развязак задачы таксама не залежыць ад φ, г. зн. $u = u(r,\theta)$. У гэтым выпадку неабходна разгледзець краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\Big) = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u|_{r=a} = \cos 2\theta. \end{cases}$$

Лічачы $u(r,\theta) = R(r)W(\theta)$, пасля падстаноўкі ў раўнанне і падзелу зменных, атрымаем

$$-\frac{\dfrac{d}{dr}\Big(r^2\dfrac{dR}{dr}\Big)}{R} = \frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\dfrac{dW}{d\theta}\Big)}{W} = -\lambda,$$

прычым дыферэнцыяльнае раўнанне для функцыі $W(\theta)$ развязваецца пры ўмовах абмежаванасці ў абсягу $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Тым самым для $W(\theta)$ прыходзім да краявой задачы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\dfrac{dW}{d\theta}\Big) + \lambda W = 0, \\ \big|W(0)\big| < \infty, \quad \big|W(\pi)\big| < \infty. \end{cases}$$

Увядзем новую незалежную зменную $x = \cos\theta$. Тады адрэзак $[0,\pi]$ пераходзіць у адрэзак $[-1,1]$, $\dfrac{d}{d\theta} = -\sin\theta\dfrac{d}{dx}$, і раўнанне набывае выгляд

$$\frac{1}{\sin\theta}(-\sin\theta)\frac{d}{dx}\Big[\sin\theta(-\sin\theta)\frac{dW}{dx}\Big] + \lambda W = 0,$$

або з улікам роўнасці $\sin^2\theta = 1 - x^2$

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dW}{dx}\Big] + \lambda W = 0.$$

Межавыя ўмовы набываюць выгляд

$$\big|W(-1)\big| < \infty, \quad \big|W(1)\big| < \infty.$$

Атрыманае дыферэнцыяльнае раўнанне і межавыя ўмовы ўтвараюць задачу Штурма — Ліўвіля для раўнання Лежандра. Абмежаваныя на адрэзку $[-1,1]$ развязкі гэтай задачы існуюць толькі, калі $\lambda = n(n+1)$, і маюць выгляд

$$W_n(x) = P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, \ \ldots .$$

У прыватнасці, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \dfrac{1}{2}\,(3x^2-1)$, $P_3(x) = \ = \dfrac{1}{2}\,(5x^3-3x)$, $P_4(x) = \dfrac{1}{8}\,(35x^4 - 30x^2 + 3)$. Паліномы Лежандра ўтвараюць артаганальную з вагой $\rho(x) = 1$ сістэму функцый на адрэзку $[-1,1]$, г. зн.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m,$$

прычым $\|P_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \dfrac{2}{2n+1}$. Вяртаючыся да зменнай θ, знаходзім уласныя значэнні і уласныя функцыі:

$$\lambda_n = n(n+1), \quad W_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \quad n = 0, 1, \ \ldots .$$

Пяройдзем да задачы для радыяльнай функцыі $R(r)$, якую можна запісаць у выглядзе

$$r^2\,\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\,\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0.$$

Гэтае раўнанне мае развязкі $R_n(r) = r^n$ і $R_n(r) = r^{-(n+1)}$.

Памнажаючы функцыі $R_n(r)$ і $W_n(\theta)$, атрымаем частковыя развязкі раўнання Ляпляса

$$u_n(r,\theta) = \big[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\big]P_n(\cos\theta),$$

дзе $P_n(\cos\theta)$ — паліномы Лежандра. Паколькі разглядаецца ўнутраная краявая задача, то гарманічную ў шары функцыю трэба шукаць у выглядзе

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta).$$

Падставім шэраг у межавую ўмову і выкарыстаем трыганаметрычную формулу падвойнага аргументу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

Правая частка гэтай роўнасці ўяўляе сабой лінейную камбінацыю паліномаў Лежандра $P_0(\cos\theta)$ і $P_2(\cos\theta)$:

$$2\cos^2\theta - 1 = C_1 P_0(\cos\theta) + C_2 P_2(\cos\theta) = C_1 + \frac{C_2}{2}(3\cos^2\theta - 1).$$

Адсюль выцякае, што $C_1 = -\dfrac{1}{3}$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$. Такім чынам,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = -\frac{1}{3}\, P_0(\cos\theta) + \frac{4}{3}\, P_2(\cos\theta).$$

Улічваючы ўласцівасць артаганальнасці паліномаў Лежандра, прыраўнуем каэфіцыенты ля аднолькавых уласных функцый:

$$A_0 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{4}{3a^2}, \quad A_n = 0, \quad n \neq 0, \quad n \neq 2.$$

Канчаткова гарманічная ўсярэдзіне шару функцыя мае выгляд

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3a^2}\, r^2 P_2(\cos\theta).$$

Задача 102. Знайсці функцыю, гарманічную па-за адзінкавым шарам і такую, што $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = \sin\Big(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\Big)\sin\theta.$

Развязанне. Разгледзім знешнюю краявую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = \sin\Big(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\Big)\sin\theta, \end{cases}$$

дзе

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Яе развязак запісваецца ў выглядзе шэрагу

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{nm} r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Падстаўляючы шэраг у межавую ўмову, атрымаем

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} (n+1) B_{nm} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = \sin\Big(\frac{\pi}{4} - \varphi\Big)\sin\theta.$$

Пераўтворым правую частку гэтай роўнасці:

$$\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \varphi\Big)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\sin\theta\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, Y_1^{(1)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, Y_1^{(-1)}.$$

Такім чынам, толькі каэфіцыенты B_{11} і $B_{1,-1}$ будуць адрозныя ад нуля. Маем

$$-2B_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -2B_{1,-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad B_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad B_{1,-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Такім чынам,

$$u(r,\theta,\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,r^{-2}Y_1^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,r^{-2}Y_1^{(-1)} = -\frac{1}{2}\,r^{-2}\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\varphi\Big)\sin\theta.$$

Канчаткова атрымаем, што шуканая гарманічная па-за адзінкавым шарам функцыя мае выгляд

$$u(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{2}\,r^{-2}\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\varphi\Big)\sin\theta + C,$$

дзе C — адвольная сталая.

Задача 103. Знайсці развязак краявой задачы ў шаравым пласце

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = 3\sin 2\varphi\,\sin^2\theta, \quad u|_{r=2} = 3\cos\theta. \end{cases}$$

Развязанне. Агульны выгляд гарманічнай у шаравым пласце функцыі даецца шэрагам

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\big[A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)}\big]Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Паколькі

$$3\sin 2\varphi\,\sin^2\theta = Y_2^{(-2)}(\theta,\varphi), \quad \cos\theta = Y_1^{(0)}(\theta,\varphi),$$

то ўсе каэфіцыенты, акрамя $A_{2,-2}, B_{2,-2}, A_{10}, B_{10}$, будуць роўныя нулю. Развязваючы дзве сістэмы алгебраічных раўнанняў

$$\begin{cases} A_{2,-2} + B_{2,-2} = 1, \\ 4A_{2,-2} + \dfrac{1}{8}\,B_{2,-2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_{10} + B_{10} = 0, \\ 2A_{10} + \dfrac{1}{4}\,B_{10} = 3, \end{cases}$$

якія з'яўляюцца вынікам падстаноўкі шэрагу ў межавыя ўмовы, знаходзім

$$A_{2,-2} = -\frac{1}{31}, \quad B_{2,-2} = \frac{32}{31}, \quad A_{1,0} = \frac{12}{7}, \quad B_{10} = -\frac{12}{7}.$$

У выніку прыходзім да адказу

$$u(r,\theta,\varphi) = \Big(\frac{12}{7}\,r - \frac{12}{7}\,r^{-2}\Big)\cos\theta + \Big(\frac{96}{31}\,r^{-3} - \frac{3}{31}\,r^2\Big)\sin 2\varphi\,\sin^2\theta.$$

Задачы для самастойнага развязання

Развязаць наступныя краявыя задачы:

104. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ u|_{r=a} = \cos^2\theta. \end{cases}$

105. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ \Big(u - \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big)\Big|_{r=a} = \sin^2\theta. \end{cases}$

106. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ u|_{r=1} = 1 - \cos 2\theta, \quad u|_{r=2} = 2\cos\theta. \end{cases}$

107. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = (\sin\theta + \sin 2\theta)\sin\Big(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\Big). \end{cases}$

108. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=a} = \sin\Big(3\varphi + \dfrac{\pi}{4}\Big)\sin^3\theta. \end{cases}$

109. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \Big(u + \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big)\Big|_{r=a} = \sin\theta(\sin\varphi + \cos\varphi\,\cos\theta + \sin\theta). \end{cases}$

110. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \Big(u - \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big)\Big|_{r=a} = \sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}\,\sin\Big(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\Big). \end{cases}$

111. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=a} = \sin 100\varphi\,\sin^{100}\theta. \end{cases}$

112. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = 7\sin\theta\,\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 7\cos\theta. \end{cases}$

113. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = 12\sin\theta\,\cos^2\dfrac{\theta}{2}\,\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 0. \end{cases}$

114. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \Big(3u + \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big)\Big|_{r=1} = 5\sin^2\theta\,\sin 2\varphi, \quad u|_{r=2} = -\cos\theta. \end{cases}$

Занятак 10. Кантрольная работа

Заданні для падрыхтоўкі да КР

I. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

II. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin\dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

III. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + e^{-t}J_0(\mu_n x), \quad \mu_n \text{ — дадатны} \\ \text{корань раўнання} \quad J_0(\mu) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u\big|_{x=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{x=1} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

IV. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\cos 2t, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u\big|_{x=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{x=1} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1\Big] + J_0(\mu_n x), \quad \mu_n \text{ — дадатны} \\ \text{корань раўнання} \quad J_0(\mu) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

V. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = \sin\dfrac{3\pi y}{b}, \quad u\big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = \sin\dfrac{2\pi x}{a} + \sin\dfrac{5\pi x}{a}, \quad u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

VI. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = \sin\dfrac{\pi y}{b} + \sin\dfrac{4\pi y}{b}, \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{3\pi x}{a} + \sin\dfrac{7\pi x}{a}. \end{cases}$$

VII. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r > a, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = A\cos 2\varphi. \end{cases}$$

VIII. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 1 < r < 2, \\ u\big|_{r=1} = A\sin 2\varphi, \quad u\big|_{r=2} = B. \end{cases}$$

IX. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = q, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

X. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=h} = u_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

XI. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u\big|_{r=1} = \sin\theta(\sin\theta + \cos\varphi\,\cos\theta). \end{cases}$$

XII. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u\big|_{r=1} = 2\cos 2\varphi\,\sin^2\theta, \quad u\big|_{r=2} = 2\cos\varphi\,\sin\theta. \end{cases}$$

АДКАЗЫ І ЎКАЗАННІ

4 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & 0 \leqslant x < h, \\ 0, & h \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(x,t) = \frac{u_0 h}{l} + \frac{2u_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi h}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

5 $u(x,t) = \sin\dfrac{7\pi x}{l}\,e^{-\left(\frac{7\pi a}{l}\right)^2 t}.$

6 $u(x,t) = \dfrac{4l}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\,e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right]^2 t}.$

7 $u(x,t) = \dfrac{32}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\,e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right]^2 t}.$

8 $u(x,t) = \sin\dfrac{3\pi x}{2l}\,e^{-\left(\frac{3\pi a}{2l}\right)^2 t} + \sin\dfrac{7\pi x}{2l}\,e^{-\left(\frac{7\pi a}{2l}\right)^2 t}.$

9 $u(x,t) = \cos\dfrac{\pi x}{2l}\,e^{-\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2 t} + \cos\dfrac{5\pi x}{2l}\,e^{-\left(\frac{5\pi a}{2l}\right)^2 t}.$

10 $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\,e^{-\left\{\left[\frac{(2n+1)\pi}{l}\right]^2+1\right\}t}.$

13 $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-t}\right)\cos x + \dfrac{1}{18}\left(e^{-9t} - 1\right)\cos 3x.$

14 $u(x,t) = e^t - \cos t + \sin t + e^{-3t}\cos 2x.$

15 $u(x,t) = \dfrac{1}{4}\left(e^{4t} - 1\right) + t\cos 2x.$

16 $u(x,t) = 2e^{9t} + (2t - \sin 2t)\cos 3x.$

17 $u(x,t) = e^{\frac{27}{4}t}\sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{13}{19}\left(e^{\frac{19}{4}t} - 1\right)\sin\dfrac{3x}{2}.$

18 $u(r,t) = \dfrac{q}{6a^2}\left[b^2 - r^2 + \dfrac{12b^3}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\,e^{-\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 t}\,\frac{\sin\frac{k\pi r}{b}}{r}\right].$

21 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = Ae^{-t}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{Ax}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

калі $l \neq k\pi a$, $k = 1, 2, \ \ldots,$ з'яўляецца функцыя

$$u(x,t) = \frac{Ax}{l}\, e^{-t} + \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\big[(k\pi a)^2 - l^2\big]} \Big[e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \Big] \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Калі $l = k_0 \pi a$, развязак задачы мае наступны выгляд:

$$u(x,t) = \frac{Ax}{l}\, e^{-t} + \frac{2A(-1)^{k_0+1}}{k_0 \pi}\, te^{-t} \sin \frac{x}{a} + \\ + \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{k=1, k\neq k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\big[(k\pi a)^2 - l^2\big]} \Big[e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \Big] \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

22 $u(x,t) = x^2 t + \dfrac{1}{4}\left(e^{4t} - 1\right) + t \cos 2x.$

23 $u(x,t) = x + t \sin x + \dfrac{1}{8}\left(1 - e^{-8t}\right) \sin 3x.$

24 $u(x,t) = 2x^2 + 2e^{9t} + (2t - \sin 2t) \cos 3x.$

25 $u(x,t) = t + 1 + e^{x} \sin x.$

26 $u(x,t) = U_0 - 2U_0 h \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \big[l(\lambda_k^2 + h^2) + h\big]}\, e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \big(\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x\big)$, дзе λ_k — дадатныя карані раўнання $\operatorname{tg} \lambda l = \dfrac{h}{\lambda}$.

29 Для доказу роўнасці выкарыстаем паданне (22):

$$x^\nu \frac{d}{dx}\Big(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\Big) = x^\nu \frac{d}{dx} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)}\, \frac{x^{2p}}{2^{2p+\nu}} = \\ = \Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p\, 2p\, x^{2p-1}}{p!\, \Gamma(p+\nu+1) 2^{2p}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p)\Gamma(p+\nu+1)} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2p+(\nu-1)}.$$

Уводзячы новы індэкс сумавання $m = p - 1$, атрымаем

$$x^\nu \frac{d}{dx}\Big(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\Big) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma\big[m + (\nu+1) + 1\big]} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2m+(\nu+1)} = -J_{\nu+1}(x).$$

Адкуль вынікае, што

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}\, J_\nu(x).$$

30 $\displaystyle\int_0^l r J_0(ar) J_0(br)\, dr = \frac{l\big[bJ_0(al)J_0'(bl) - aJ_0(bl)J_0'(al)\big]}{a^2 - b^2}.$

31 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = h\Big(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\Big), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = 8h\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos\frac{\mu_k a t}{l}\, J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

32 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = AJ_0\Big(\dfrac{\mu_n r}{l}\Big), \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

дзе μ_n — дадатны корань раўнання $J_0(\mu) = 0$, з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = Ae^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_n r}{l}\Big).$$

33 $u(r,t) = \dfrac{2u_0 l}{a}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \sin\frac{\mu_k a t}{l}\, J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)$, дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

34 $u(r,t) = \dfrac{2}{l^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-ht} \frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{J_1^2(\mu_k)} \Big(\cos q_k t + \frac{h}{q_k}\sin q_k t\Big) \int_0^l r\varphi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big) dr$, дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$, $q_k = \sqrt{\Big(\dfrac{\mu_k a}{l}\Big)^2 - h^2}$.

35 $u(x,t) = \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\Big(\mu_k\sqrt{\dfrac{x}{l}}\Big)}{J_1^2(\mu_k)} \cos\frac{\mu_k a t}{2\sqrt{l}} \int_0^l f(x) J_0\Big(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\Big) dx$, дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

41 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) + \dfrac{p_0}{\rho_0}, \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = \frac{p_0}{\rho_0 a^2}\Big[\frac{l^2 - r^2}{4} - 2l^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos\frac{\mu_k a t}{l}\, J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\Big],$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

42 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = A\sin\omega t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = A\,\frac{J_0\Big(\dfrac{\omega r}{a}\Big)}{J_0\Big(\dfrac{\omega l}{a}\Big)}\sin\omega t - \frac{2Aa\omega}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{(\omega_k^2-\omega^2)J_1(\mu_k)}\sin\omega_k t,$$

дзе $\omega_k = \dfrac{\mu_k a}{l}$, μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

43 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) + \dfrac{p_0}{\rho_0}\sin\omega t, \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = \frac{2p_0}{\rho_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{\mu_k J_1(\mu_k)}\,\frac{(\omega_k^2-\omega^2)\sin\omega t - 2h\omega\cos\omega t}{(\omega_k^2-\omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} +$$

$$+ \frac{2p_0\omega}{\rho_0}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ht}\,\frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{\mu_k J_1(\mu_k)}\,\frac{2h\cos\omega_k t + \dfrac{1}{\omega_k}\big(2h^2 - \omega_k^2 + \omega^2\big)\sin\omega_k t}{(\omega_k^2-\omega^2)^2 + 4h^2\omega^2},$$

дзе $\omega_k = \dfrac{\mu_k a}{l}$ — уласныя часціні ваганняў мембраны, μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

44 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = u_1, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0 r^2, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = u_1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_0 l^2(\mu_k^2 - 4) - u_1\mu_k^2}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}\,e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$.

45 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = u_0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя (канцэнтрацыя рэчыва ў неабмежаваным цыліндры)

$$u(r,t) = u_0 - 2u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu) = 0$. Колькасць прадыфундаванага ўнутр цыліндру рэчыва роўна

$$Q(t) = 2\pi \int_0^l r u(r,t)\, dr = \pi l^2 u_0 \Big[1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}\Big].$$

46 $u(x,t) = \dfrac{1}{\mu_n^2 - 1}\Big[\sin t - \dfrac{1}{\mu_n}\sin\mu_n t\Big] J_0(\mu_n x)$.

47 $u(x,t) = \cos 2t\, \dfrac{J_0(2x)}{J_0(2)}$.

48 $u(x,t) = t - 1 + \cos\mu_1 t\, J_0(\mu_1 x)$.

49 $u(x,t) = \cos t\Big[1 - \dfrac{J_0(x)}{J_0(1)}\Big]$.

50 $u(x,t) = 1 + \dfrac{1}{9}\sin 3t\Big[1 - \dfrac{J_0(3x)}{J_0(3)}\Big]$.

51 $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\cos 2t\Big[\dfrac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1\Big] + \cos\mu_1 t\, J_0(\mu_1 x)$.

52 $u(x,t) = \dfrac{4}{\mu_1^2 - 4}\Big(\sin t - \dfrac{2}{\mu_1}\sin\dfrac{\mu_1 t}{2}\Big) J_0\big(\mu_1\sqrt{x}\big)$.

53 $u(x,t) = \dfrac{1}{\mu_n^2 + 1}\Big(e^t - \cos\mu_n t - \dfrac{1}{\mu_n}\sin\mu_n t\Big) J_1(\mu_n x)$.

54 $u(x,t) = \sin t\, \dfrac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \sin 3t\, \dfrac{J_1(3x)}{2J_1(3)}$.

55 $u(x,t) = \dfrac{1}{\mu_1^2 - 1}\big(\cos t - \cos\mu_1 t\big) J_2(\mu_1 x)$.

56 $u(x,t) = \Big[\dfrac{1}{\mu_1^2}\, t + \dfrac{1}{\mu_1^4}\big(e^{-\mu_1^2 t} - 1\big)\Big] J_0(\mu_1 x)$.

57 $u(x,t) = \dfrac{1}{\mu_n^4 + 1}\big(\mu_n^2 \sin t - \cos t + e^{-\mu_n^2 t}\big) J_1(\mu_n x)$.

58 $u(x,t) = e^{-\frac{\mu_n^2 t}{4}} J_3\big(\mu_n\sqrt{x}\big)$.

62 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), & 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=l} = 0, & t > 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0 r^2, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = \frac{u_0 l^2}{2} + 4u_0 l^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0'(\mu)=0$.

63 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=l} = \dfrac{q}{K}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = u_0 + \frac{q}{K}\Big[\frac{2a^2 t}{l} + \frac{r^2}{2l} - \frac{l}{4} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big)\Big],$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0'(\mu)=0$.

64 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad \Big(\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\Big)\Big|_{r=l} = 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0 r^2, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = 2u_0 l^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+hl)\mu_k^2 - 4hl}{\mu_k^2(\mu_k^2 + h^2 l^2) J_0(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $\mu J_0'(\mu) + hlJ_0(\mu) = 0$.

65 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad \Big(\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\Big)\Big|_{r=l} = h(u_1 + bt), \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t) = u_0 + b\left[t + \frac{r^2 - l^2 - \dfrac{2l}{h}}{4a^2}\right] + \frac{2hbl^3}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{\mu_k^2(\mu_k^2 + h^2 l^2) J_0(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t},$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $\mu J_0'(\mu) + hlJ_0(\mu) = 0$.

66 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big), \quad l_1 < r < l_2, \quad t > 0, \\ u|_{r=l_1} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=l_2} = \dfrac{q}{K}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad l_1 \leqslant r \leqslant l_2, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,t)=\frac{ql_2}{K}\ln\frac{r}{l_1}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\big[J_0(\lambda_k l_1)N_0(\lambda_k r)-N_0(\lambda_k l_1)J_0(\lambda_k r)\big],$$

$$A_k=\frac{\pi^2\lambda_k^2}{2}\,\frac{J_1^2(\lambda_k l_2)}{J_0^2(\lambda_k l_1)-J_1^2(\lambda_k l_2)}\int\limits_{l_1}^{l_2} r u_s(r)\big[J_0(\lambda_k l_1)N_0(\lambda_k r)-N_0(\lambda_k l_1)J_0(\lambda_k r)\big]dr,$$

дзе λ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\lambda l_1)N_0'(\lambda l_2)-N_0(\lambda l_1)J_0'(\lambda l_2)=0$.

71 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,\\ u|_{x=0}=v_0, \quad u|_{x=a}=0,\\ u|_{y=0}=0, \quad u|_{y=b}=0, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(x,y)=\frac{4v_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi a}{b}}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}.$$

72 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,\\ u|_{x=0}=u_0, \quad u|_{x=a}=u_0,\\ u|_{y=0}=u_0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=\dfrac{q}{K}, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(x,y)=u_0+\frac{4qa}{K\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1)^2\operatorname{ch}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}.$$

73 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad -a<x<a, \quad -b<y<b,\\ u|_{x=-a}=v_0, \quad u|_{x=a}=v_0,\\ u|_{y=-b}=0, \quad u|_{y=b}=0, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(x,y)=\frac{4v_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{ch}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2b}}{(2n+1)\operatorname{ch}\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}.$$

74 $u(x,y)=A+\dfrac{(Bb-2A)x}{2a}-\dfrac{4Bb}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi x}{b}}{(2n+1)^2\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi a}{b}}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{b}.$

75 $u(x,y)=\dfrac{8Ba^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1)^3\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{a}+$

$$+\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi x}{b}}{(2n+1)^3\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi a}{b}}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}.$$

76 $u(x,y)=\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(b-y)}{a}\sin\dfrac{\pi x}{a}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{a}}+\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{2\pi(a-x)}{b}\sin\dfrac{2\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{2\pi a}{b}}+\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{7\pi(a-x)}{b}\sin\dfrac{7\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{7\pi a}{b}}.$

77 $u(x,y)=\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\,e^{-\frac{n\pi y}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}.$

78 $u(x,y)=\dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\,e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{b}}\sin\dfrac{(2n+1)\pi y}{b}.$

79 $u(x,y)=x(a-x)-\dfrac{8a^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1)^3\operatorname{ch}\dfrac{(2n+1)\pi b}{2a}}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{a}.$

80 $u(x,y)=-\dfrac{q}{2ab}\,(x-a)^2+\dfrac{2q}{a\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\,\cos\dfrac{n\pi y}{b}+C,$ дзе C — адвольная сталая.

87 1) $u(r,\varphi)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\,r^2\cos 2\varphi;$ 2) $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\,r^2\cos 2\varphi+\dfrac{1}{8}\,r^4\cos 4\varphi;$

3) $u(r,\varphi)=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\,r^4\cos 4\varphi.$

88 1) $u(r,\varphi)=Ar\cos\varphi+C;$ 2) $u(r,\varphi)=\dfrac{A}{2a}\,r^2\cos 2\varphi+C;$

3) $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{4}\,r\sin\varphi-\dfrac{1}{12a^2}\,r^3\sin 3\varphi+C.$

89 1) $u(r,\varphi)=A+B\Big(\dfrac{a}{r}\Big)\sin\varphi;$ 2) $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{a}{r}\Big)\sin\varphi-\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{a}{r}\Big)^3\sin 3\varphi;$

3) $u(r,\varphi)=\dfrac{A}{2}+\dfrac{A}{2}\Big(\dfrac{a}{r}\Big)^2\cos 2\varphi.$

90 1) $u(r,\varphi)=\dfrac{B\ln r}{\ln 2}+\dfrac{A}{15}\Big(\dfrac{16}{r^2}-r^2\Big)\cos 2\varphi;$ 2) $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln r}{\ln 2}+\Big(\dfrac{2}{3r^2}-$

$-\dfrac{1}{6}\,r^2\Big)\cos 2\varphi;$ 3) $u(r,\varphi)=B+\dfrac{A}{5}\Big(r-\dfrac{4}{r}\Big)\cos\varphi+\dfrac{4A}{17}\Big(r^2+\dfrac{1}{r^2}\Big)\sin 2\varphi.$

91 $u(r,\varphi)=\dfrac{2A\alpha}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big(\dfrac{r}{a}\Big)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}.$

92 $u(r,\varphi)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\Big(\dfrac{r}{a}\Big)^{\frac{(2n+1)\pi}{\alpha}}\cos\dfrac{(2n+1)\pi\varphi}{\alpha}.$

93 $u(r)=\dfrac{4a^3}{9}-\dfrac{4}{9}\,r^3.$

94 $u(r,\varphi)=\dfrac{a^2}{24}\,r^2\sin 2\varphi-\dfrac{1}{24}\,r^4\sin 2\varphi.$

95 $u(r,\varphi)=\dfrac{1}{17}\Big(129r^2-\dfrac{112}{r^2}\Big)\cos 2\varphi-r^4\cos 2\varphi.$

96 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad 0\leqslant r<l, \quad 0<z<h,\\ \big|u\big|_{r=0}\big|<\infty, \quad u\big|_{r=l}=0, \quad 0\leqslant z\leqslant h,\\ u\big|_{z=0}=u_0, \quad u\big|_{z=h}=0, \quad 0\leqslant r\leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,z)=2u_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k(h-z)}{l}}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k h}{l}}\,J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu)=0$.

97 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{Q}{K}, \quad 0\leqslant r<l, \quad 0<z<h,\\ \big|u\big|_{r=0}\big|<\infty, \quad u\big|_{r=l}=0, \quad 0\leqslant z\leqslant h,\\ u\big|_{z=0}=0, \quad u\big|_{z=h}=0, \quad 0\leqslant r\leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,z)=\frac{Q}{4K}\big(l^2-r^2\big)-\frac{2Ql^2}{K}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k z}{l}+\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k(h-z)}{l}}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k h}{l}}\,J_0\Big(\frac{\mu_k r}{l}\Big),$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $J_0(\mu)=0$.

98 Развязкам змяшанай задачы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad 0\leqslant r<l, \quad 0<z<h,\\ \big|u\big|_{r=0}\big|<\infty, \quad u\big|_{r=l}=v_0, \quad 0\leqslant z\leqslant h,\\ u\big|_{z=0}=0, \quad u\big|_{z=h}=0, \quad 0\leqslant r\leqslant l, \end{cases}$$

з'яўляецца функцыя

$$u(r,z)=\frac{4v_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{I_0\Big[\dfrac{(2n+1)\pi r}{h}\Big]}{I_0\Big[\dfrac{(2n+1)\pi l}{h}\Big]}\,\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi z}{h}}{2n+1}.$$

99 $u(r,z)=2qh_0^2l^3\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\Big(\dfrac{\mu_k r}{l}\Big)}{\mu_k^2(\mu_k^2+h_0^2l^2)J_0(\mu_k)}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k(h-z)}{l}}{\operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}}$, дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $\mu J_0'(\mu)+h_0 l J_0(\mu)=0$.

100 $u(r,z)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h f(z)dz+\frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_0\Big(\dfrac{k\pi r}{h}\Big)}{I_0\Big(\dfrac{k\pi l}{h}\Big)}\,\cos\frac{k\pi z}{h}\int_0^h f(z)\cos\frac{k\pi z}{h}\,dz.$

104 $u(r,\theta) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\Big(\dfrac{r}{a}\Big)^2 P_2(\cos\theta).$

105 $u(r,\theta) = \dfrac{2a^2}{3(a+1)r} - \dfrac{2a^4}{3(a+3)r^3} P_2(\cos\theta).$

106 $u(r,\theta) = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{3r} + \dfrac{8}{7}\Big(r - \dfrac{1}{r^2}\Big)P_1(\cos\theta) + \dfrac{4}{93}\Big(r^2 - \dfrac{32}{r^3}\Big)P_2(\cos\theta).$

107 $u(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta + r^2\sin 2\theta)\sin\Big(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\Big).$

108 $u(r,\theta,\varphi) = \Big(\dfrac{r}{a}\Big)^3 \sin\Big(3\varphi + \dfrac{\pi}{4}\Big)\sin^3\theta.$

109 $u(r,\theta,\varphi) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{r}{a+1}Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) -$

$$- \frac{2r^2}{3a(a+2)}Y_2^{(0)}(\theta,\varphi) + \frac{r^2}{3a(a+2)}Y_2^{(1)}(\theta,\varphi).$$

110 $u(r,\theta,\varphi) = \Big[\dfrac{a}{2(a+2)}\Big(\dfrac{a}{r}\Big)^2\sin\theta + \dfrac{a}{2(a+3)}\Big(\dfrac{a}{r}\Big)^3\sin\theta\cos\theta\Big]\sin\Big(\varphi + \dfrac{\pi}{3}\Big).$

111 $u(r,\theta,\varphi) = \Big(\dfrac{a}{r}\Big)^{101}\sin 100\varphi\,\sin^{100}\theta.$

112 $u(r,\theta,\varphi) = 4\Big(r - \dfrac{1}{r^2}\Big)Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) + \Big(\dfrac{8}{r^2} - r\Big)Y_1^{(1)}(\theta,\varphi).$

113 $u(r,\theta,\varphi) = \dfrac{12}{7}\Big(\dfrac{4}{r^2} - \dfrac{r}{2}\Big)Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) + \dfrac{24}{93}\Big(\dfrac{8}{r^3} - \dfrac{r^2}{4}\Big)Y_2^{(1)}(\theta,\varphi).$

114 $u(r,\theta,\varphi) = \Big(\dfrac{4}{r^2} - r\Big)Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) + \dfrac{1}{3}\Big(r^2 - \dfrac{32}{r^3}\Big)Y_2^{(-2)}(\theta,\varphi).$

БІБЛІЯГРАФІЧНЫ СПІС

1. *Ягораў, А. А.* Практыкум па метадах матэматычнай фізікі. Ч. 1 [Электронны рэсурс] : вучэб.-метад. дапаможнік / А. А. Ягораў, І. В. Рыбачэнка. — 2013. — Рэжым доступу : http://elib.bsu.by/handle/123456789/32147. — Дата доступу : 13.02.14.
2. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. — М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. — 798 с.
3. *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Высш. шк., 1970. — 712 с.
4. *Арсенин, В. Я.* Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1984. — 367 с.
5. *Свешников, А. Г.* Лекции по математической физике / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. — М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. — 416 с.
6. *Русак, В. Н.* Математическая физика / В. Н. Русак. — Минск: Дизайн ПРО, 1998. — 208 с.
7. *Никифоров, А. Ф.* Основы теории специальных функций / А.Ф.Никифоров, В. Б. Уваров. — М.: Наука, 1974. — 304 с.
8. *Никифоров, А. Ф.* Лекции по уравнениям и методам математической физики / А. Ф. Никифоров. — Долгопрудный: Интеллект, 2009. — 133 с.
9. *Будак, Б. М.* Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — М.: Физматлит, 2004. — 688 с.
10. *Смирнов, М. М.* Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 1975. — 128 с.
11. Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В. С. Владимирова. — М.: Физматлит, 2003. — 288 с.
12. *Бицадзе, А. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. — М.: Наука, 1977. — 224 с.
13. *Русак, В. Н.* Задачи по математической физике и их решение / В. Н. Русак, Н. К. Филиппова. — Минск : БГУ, 2007. — 112 с.

ЗМЕСТ