# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ СУММЫ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ЗАДЕРЖЕК

**С. А. Кравченко**

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси*
*Минск, Беларусь*
*E-mail: kravch@newman.bas-net.by*

Исследуется задача минимизации суммы относительных задержек на множестве параллельных приборов. Доказывается NP-трудность в сильном смысле для общего случая исследуемой задачи. Выделяются полиномиально разрешимые случаи.

*Ключевые слова*: динамическое программирование, линейное программирование, унарная NP-трудность.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуемая задача может быть сформулирована следующим образом. В обслуживающую систему, состоящую из $m$ параллельных идентичных приборов, поступает $n$ требований. Для каждого требования известен момент поступления $r_j$, т. е. момент времени, начиная с которого требование может обрабатываться приборами, и время $p_j$, необходимое для обработки требования в системе. Каждое требование в произвольный момент времени может обслуживаться только одним прибором. Каждый прибор, в свою очередь, может обслуживать не более одного требования одновременно. При обслуживании требований допустимы прерывания, т. е. обслуживание любого требования может быть прервано и возобновлено в более позднее время и, возможно, другим прибором. Необходимо построить расписание, при котором минимизируется сумма относительных задержек $\sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{p_j}$, где $C_j$ – момент завершения обслуживания требования $j$. Данная задача обозначается $P\left|r_j, pmtn\right|\sum S_j$. Если рассматривается задача с одним прибором, то используется обозначение $1\left|r_j, pmtn\right|\sum S_j$. Критерий $\sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{p_j}$ эквивалентен критерию $\sum_{j=1}^{n} \frac{C_j - r_j}{p_j}$, который интуитивно можно трактовать как стремление к тому, что вне зависимости от времени поступления в обслуживающую систему требование с более длительным временем обслуживания будет находиться в системе дольше требования с меньшим временем обслуживания. Подобная задача возникает при компьютерном анализе биологических данных, в частности, при исследовании геномных последовательностей в вычислительной сети, содержащей кластеры разной производительности [4].

Рассматриваемая задача является частным случаем задачи $P\left|r_j, pmtn\right|\sum w_j C_j$, которая NP – трудна в сильном смысле [3].

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ

Можно доказать, что справедлива

**Теорема 1.** Задача $P\left|r_j, pmtn\right|\sum S_j$ является NP-трудной в сильном смысле.

Доказательство получается путем полиномиального сведения задачи о 3 – разбиении к данной задаче.

## ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ СЛУЧАИ

Для задачи $1\left|r_j, pmtn\right|\sum S_j$ справедливы следующие утверждения:

**Утверждение 1.** Если количество различных значений $r_j$ является фиксированным, то оптимальное расписание строится за полиномиальное время.

**Утверждение 2.** Если количество различных значений $p_j$ является фиксированным, то оптимальное расписание строится за полиномиальное время.

В обоих случаях можно построить алгоритмы динамического программирования, полиномиальное время работы которых обусловлено тем, что все множество требований можно разбить на линейно упорядоченные подмножества. Причем количество таких подмножеств будет фиксированным, а требования из каждого подмножества будут обслуживаться в заданном порядке.

Обобщение данных результатов на случай с произвольным числом приборов не является тривиальным. Отметим только, что задача $P\left|r_j, p_j = p, pmtn\right|\sum S_j$ эквивалентна задаче $P\left|r_j, p_j = p, pmtn\right|\sum C_j$, которая может быть решена за полиномиальное время [1– 2] при помощи следующей задачи линейного программирования:

Найти минимум $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{z}(C_k^i - r_i)$

при выполнении условий

$$r_i = C_0^i \le C_1^i \le \ldots \le C_n^i \le C_{n+1}^i = r_{i+1},\ \text{для}\ i = 0,\ldots,z;$$

$$\sum_{q=1}^{m} v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right) \le C_{k+1}^i - C_k^i,\ \text{для}\ i = 0,\ldots,z,\ \ j = 1,\ldots,n,\ \ k = 1,\ldots,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right) \le C_{k+1}^i - C_k^i,\ \text{для}\ i = 0,\ldots,z,\ \ q = 1,\ldots,m,\ \ k = 1,\ldots,n;$$

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{z} v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right) = p,\ \text{для}\ j = 1,\ldots,n;$$

$$C_k^i \ge 0,\ \text{для}\ i = 0,\ldots,z,\ \ k = 0,\ldots,n;$$

$$v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right) \ge 0,\ \text{для}\ \ j = 1,\ldots,n,\ i = 0,\ldots,z,\ k = 0,\ldots,n,\ q = 1,\ldots,m.$$

Предполагается, что моменты поступления упорядочены $r_1 \le \ldots \le r_n$.

Значения $C_k^i$ для $k = 0,\ldots,n-1$, $i = 0,\ldots,z$ и значения $v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)$ для $j = 1,\ldots,n$, $i = 0,\ldots,z$, $k = 0,\ldots,n-1$, $q = 1,\ldots,m$, являются переменными и определяют допустимое решение. При этом значение $C_k^i$ можно определить следующим образом:

$$C_k^i = \begin{cases} C_j \text{ если } r_i < C_j < r_{i+1} \\ r_i \text{ если } C_j \le r_i \\ r_{i+1} \text{ если } C_j \ge r_{i+1} \end{cases},$$

а значение $v_j^q\left(\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]\right)$ полагается равным времени выполнения требования $j$ на приборе $q$ в интервале $\left[C_k^i, C_{k+1}^i\right]$.

Таким образом, можно доказать, что справедлива

**Теорема 2.** Задача $P\left| r_j, p_j = p, pmtn \right| \sum S_j$ является полиномиально разрешимой.

При доказательстве теоремы существенным является тот факт, что в оптимальном расписании можно фиксировать порядок обслуживания всех требований.

Оказывается, что если указан порядок завершения требований, то исследуемая задача $P\left| r_j, pmtn \right| \sum S_j$ является полиномиально разрешимой. Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** Задача $P\left| r_j, C_1 \le \ldots C_n, pmtn \right| \sum S_j$ является полиномиально разрешимой.

Доказательство данной теоремы основывается на сведении указанной задачи к задаче линейного программирования.

Результаты, изложенные в данном докладе, были получены при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, договор № Ф10МС – 006.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Baptiste, P.* The complexity of mean flow time scheduling problems with release times / P. Baptiste, P. Brucker, M. Chrobak, C. Dürr, S. A. Kravchenko, F. Sourd // Journal of Scheduling. 2007. Vol. 10. P. 139–146.
2. *Kravchenko, S. A.* Minimizing a regular function on uniform machines with ordered completion times / S. A. Kravchenko, F. Werner / Magdeburg University. Magdeburg, 2010. 13 p. Preprint 25.
3. *Labetoulle, J.* Preemptive scheduling of uniform machines subject to release dates / J. Labetoulle, E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan // Progress in Combinatorial Optimization. N.-Y.: Academic Press, 1984. P. 245–261.
4. *Legrand, A.* Minimizing the stretch when scheduling flows of divisible requests / A. Legrand, A. Su, F. Vivien // Journal of Scheduling. 2008. Vol. 11. P. 381–404.