Известия вузов. Математика
2008, 4 (551), с. 3–15
http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
email: izvuz.matem@ksu.ru

В.В. Балащенко

ИНВАРИАНТНЫЕ f-СТРУКТУРЫ НА ЕСТЕСТВЕННО РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация. В работе исследуются инвариантные метрические f-структуры на естественно редуктивных однородных пространствах и устанавливается их связь с обобщенной эрмитовой геометрией. Доказана серия критериев, характеризующих геометрические и алгебраические свойства важнейших классов метрических f-структур — приближенно келеровых, эрмитовых, келеровых, киллинговых. Показана примечательная роль для этого направления канонических f-структур на однородных Ф-пространствах порядка k (однородных k-симметрических пространствах). В частности, приведены окончательные результаты о канонических f-структурах на естественно редуктивных однородных Ф-пространствах порядков 4 и 5.
Ключевые слова: естественно редуктивное пространство, инвариантная f-структура, обобщенная эрмитова геометрия, однородное Ф-пространство, однородное k-симметрическое пространство, каноническая f-структура.

УДК: 514.765

1. Введение

Классическими объектами исследования в дифференциальной геометрии являются аффинорные структуры на гладких многообразиях, т. е. гладкие тензорные поля типа $(1,1)$, реализованные в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к многообразию. Число видов таких структур велико (напр., обзор [1]), при этом возникает много новых. В то же время интенсивно изучаемыми традиционно являются почти комплексные структуры, структуры почти произведения, почти контактные структуры и ряд других. С 1960-х годов значительную роль стали играть f-структуры К. Яно [2] ($f^3+f=0$), которые обобщают почти комплексные и почти контактные структуры. Вместе с согласованной (псевдо)римановой метрикой на многообразии *метрические f-структуры* включают классы *почти эрмитовых структур* и *метрических почти контактных структур*, роль которых в дифференциальной геометрии и ее многочисленных приложениях чрезвычайно велика. В свою очередь метрические f-структуры являются важнейшим объектом в обширной *обобщенной эрмитовой геометрии* — области современной дифференциальной геометрии, развиваемой с середины 1980-х годов (напр., [3]–[5]).

Что касается дифференциальной геометрии однородных многообразий групп Ли, то здесь исследование инвариантных аффинорных структур является одним из фундаментальных направлений. Классические теории римановых и эрмитовых симметрических пространств (напр., [6]) стали основой для поиска новых классов однородных пространств с инвариантными структурами.

Поступила 17.10.2007

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (код проекта Ф06Р-137) в рамках совместного проекта БРФФИ–РФФИ.

Значительное место здесь принадлежит *однородным Φ-пространствам* (напр., [7]–[9]), которые называют также *обобщенными симметрическими пространствами* [10]. Прежде всего, однородные Φ-пространства порядка 3 (однородные 3-симметрические пространства [10]), обладающие канонической почти комплексной структурой ([11], [8]), обеспечили широкий спектр инвариантных почти эрмитовых структур, которые в случае естественно редуктивной метрики являются приближенно келеровыми [12]–[14]. Позднее было обнаружено, что регулярные Φ-пространства (в частности, однородные k-симметрические пространства) обладают обширным запасом канонических структур классического типа, в том числе почти комплексными и f-структурами [15], [16]. Это позволило не только существенно расширить ресурс однородных многообразий с инвариантными почти эрмитовыми структурами, но и предъявить с помощью канонических f-структур первые классы инвариантных примеров в обобщенной эрмитовой геометрии [17]–[23]. Заметим, что важнейшую роль здесь сыграли однородные Φ-пространства порядков 4 и 5, снабженные естественно редуктивной метрикой, при этом выявилась значительная аналогия с классическими результатами Н.А. Степанова, Дж.А. Вольфа, А. Грея, В.Ф. Кириченко в эрмитовой геометрии.

Класс естественно редуктивных однородных пространств интенсивно изучается в дифференциальной геометрии и ее приложениях. Такие пространства, широко обобщающие римановы глобально симметрические пространства, обладают тем свойством, что все геодезические на этих пространствах являются однородными, т.е. могут быть получены как траектории однопараметрических подгрупп группы изометрий [24]. Позднее оказалось, что таким свойством обладают и другие пространства, что в свою очередь привело к возникновению нового научного направления — поиска геодезически орбитальных пространств (g. o. spaces). Не останавливаясь на истории вопроса и обширной библиографии, укажем лишь недавние работы [25], [26] в этом направлении. Заметим еще, что естественно редуктивными является большинство примеров инвариантных эйнштейновых метрик на компактных однородных пространствах (обзор [27]).

Объектом исследования данной работы являются инвариантные метрические f-структуры на естественно редуктивных однородных пространствах. Установлена серия критериев, характеризующих геометрические и алгебраические свойства важнейших классов метрических f-структур — приближенно келеровых, эрмитовых, келеровых, киллинговых. Приведены окончательные результаты о канонических f-структурах на естественно редуктивных однородных Φ-пространствах порядков 4 и 5.

Некоторые из представленных здесь результатов частично анонсированы ранее в [17], [19].

2. Метрические f-структуры на многообразиях

Приведем кратко некоторые сведения из обобщенной эрмитовой геометрии, относящиеся к метрическим f-структурам на гладких многообразиях. Более подробную информацию и общий подход можно найти в [3]–[5].

Напомним, что f-структурой на многообразии M называется поле эндоморфизмов f, действующих в его касательном расслоении и удовлетворяющих условию $f^3 + f = 0$ [2]. Число $r = \dim \operatorname{Im} f$ постоянно для всех точек из M [28] и называется *рангом* f-структуры. Кроме того, число $\dim \operatorname{Ker} f = \dim M - r$ обычно называют *дефектом* f-структуры и обозначают $\operatorname{def} f$. Легко видеть, что частные случаи $\operatorname{def} f = 0$ и $\operatorname{def} f = 1$ для f-структур приводят к почти комплексным и почти контактным структурам соответственно.

Пусть M — f-многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M. Тогда $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{L} = \operatorname{Im} f$ и $\mathcal{M} = \operatorname{Ker} f$ — взаимно дополнительные распределения, которые обычно называют *первым* и *вторым фундаментальными распределениями* f-структуры соответственно. Ясно, что эндоморфизмы $l = -f^2$ и $m = \mathrm{id} + f^2$ являются взаимно дополнительными проекторами на распределения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Заметим, что сужение F заданной f-структуры на $\mathcal{L}$ есть почти комплексная структура, т. е. $F^2 = -\,\mathrm{id}$.

Тензор Нейенхейса для f-структуры определяется формулой [5]

$$N(X,Y) = \frac{1}{4}([fX,fY] - f[fX,Y] - f[X,fY] + f^2[X,Y]), \tag{1}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. При этом критерием интегрируемости f-структуры является ([29], с. 20) условие $N = 0$.

Перейдем теперь непосредственно к некоторым понятиям из *обобщенной эрмитовой геометрии.* Создание такой геометрии (напр., [3], [4]) стало естественным следствием развития эрмитовой геометрии и теории почти контактных метрических структур вместе с многочисленными приложениями. Основным объектом этой геометрии является *обобщенная почти эрмитова структура* (короче, *GAH-структура*) произвольного *ранга* r на (псевдо)римановом многообразии (M, g) [3], [4]. Не приводя здесь детального определения этого общего понятия, ограничимся рассмотрением важнейшего частного случая GAH-структур ранга 1 — метрических f-структур, которые содержат класс почти эрмитовых структур.

Напомним, что f-структура на (псевдо)римановом многообразии $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *метрической f-структурой*, если $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ [4]. В этом случае тройка (M, g, f) называется *метрическим f-многообразием.* Ясно, что тензорное поле $\Omega(X,Y) = \langle X, fY\rangle$ кососимметрично, т. е. Ω есть 2-форма на M. Ω называется *фундаментальной формой* метрической f-структуры [3], [4]. Легко видеть, что частные случаи $\operatorname{def} f = 0$ и $\operatorname{def} f = 1$ метрических f-структур приводят к *почти эрмитовым структурам* и *почти контактным метрическим структурам* соответственно.

Пусть M — метрическое f-многообразие. Тогда первое и второе фундаментальные распределения $\mathcal{L} = \operatorname{Im} f$ и $\mathcal{M} = \operatorname{Ker} f$ взаимно ортогональны. Отметим, что в случае, когда ограничение метрики g на $\mathcal{L}$ невырождено, ограничение (F, g) метрической f-структуры на $\mathcal{L}$ есть почти эрмитова структура, т. е. $F^2 = -\,\mathrm{id}$, $\langle FX, FY\rangle = \langle X, Y\rangle$, $X, Y \in \mathcal{L}$.

Фундаментальную роль в геометрии обобщенных почти эрмитовых структур (в частности, метрических f-структур) играет специальный тензор T типа $(2,1)$, который называется *композиционным тензором.* Используя тензор T, можно задать алгебраическую структуру так называемой *присоединенной Q-алгебры* в $\mathfrak{X}(M)$ посредством формулы [3], [4]

$$X * Y = T(X,Y).$$

Это дает возможность ввести некоторые классы GAH-структур на основе естественных свойств присоединенной Q-алгебры [3], [4]. Отметим, что для метрических f-многообразий тензор T был точно указан в работе [4]:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \tag{2}$$

где ∇ — связность Леви-Чивита (псевдо)риманова многообразия (M, g), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Перечислим ниже основные классы метрических f-структур, указав для них определяющие свойства:

Kf	*келерова f-структура*	$\nabla f = 0$;
Hf	*эрмитова f-структура*	$T(X, Y) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ — абелева Q-алгебра;
$\mathbf{G_1f}$	f-структура класса G_1 или $G_1 f$-структура	$T(X, X) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ — антикоммутативная Q-алгебра;
QKf	*квазикелерова f-структура*	$\nabla_X f + T_X f = 0$;
Kill f	*киллингова f-структура*	$\nabla_X(f)X = 0$;
NKf	*приближенно келерова f-структура или NKf-структура*	$\nabla_{fX}(f)fX = 0$.

Классы **Kf**, **Hf**, $\mathbf{G_1f}$, **QKf** (в более общей ситуации) введены в [4] (см. также [30]). Киллинговы f-многообразия **Kill f** были определены и изучались в [31], [32]. Класс **NKf** определен в работах [19], [20].

Приведем следующие очевидные отношения включения между классами метрических f-структур:

$$\mathbf{Kf} = \mathbf{Hf} \cap \mathbf{QKf}; \quad \mathbf{Kf} \subset \mathbf{Hf} \subset \mathbf{G_1f}; \quad \mathbf{Kf} \subset \mathbf{Kill\ f} \subset \mathbf{NKf} \subset \mathbf{G_1f}.$$

Важно отметить, что в частном случае $f = J$ получаем соответствующие классы почти эрмитовых структур [33]. Например, для $f = J$ классы **Kill f** и **NKf** совпадают с хорошо известным классом **NK** *приближенно келеровых структур.*

Заметим, что келерова f-структура всегда интегрируема, что совпадает со случаем классической келеровой структуры J. Действительно, в силу отсутствия кручения у связности ∇ имеем $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$. Тогда тензор Нейенхейса $N(X, Y)$ для f-структуры можно записать в виде ([5], с. 410)

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}\left(\nabla_{fX}(f)Y - f\nabla_X(f)Y - \nabla_{fY}(f)X + f\nabla_Y(f)X\right),$$

откуда очевидным образом следует, что для келеровой f-структуры $N(X, Y) = 0$.

В то же время эрмитова f-структура интегрируемой, вообще говоря, не является, что существенно отличает ее от классической эрмитовой структуры. Напомним в связи с этим, что эрмитовость почти эрмитовой структуры (g, J) равносильна ее интегрируемости (напр., [33]).

Заметим также, что киллинговы f-структуры определяются часто тем требованием, что фундаментальная форма Ω является формой Киллинга, т.е. $d\Omega = \nabla\Omega$ [31], [34]. Нетрудно показать, что такое определение равносильно приведенному выше условию ([5], с. 419).

Композиционный тензор T для специальных классов метрических f-структур может быть записан проще. Более точно, справедлива

Лемма 1. *Композиционный тензор T любой NKf-структуры на гладком многообразии $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ имеет вид*

$$T(X, Y) = \frac{1}{2} f\nabla_{fX}(f)(fY), \tag{3}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Доказательство. Определяющее условие для NKf-структуры при поляризации может быть записано в виде

$$\nabla_{fX}(f)(fY) + \nabla_{fY}(f)(fX) = 0.$$

Далее, для любой f-структуры имеет место тождество (напр., [34]), справедливость которого легко проверить,

$$f\nabla_X(f)(f^2Y) + f^2\nabla_X(f)(fY) = 0.$$

Используя теперь приведенные выше равенства, можем вычислить

$$-f\nabla_{f^2X}(f)(f^2Y) = f^2\nabla_{f^2X}(f)(fY) = -f^2\nabla_{fY}(f)(f^2X) = f^3\nabla_{fY}(f)(fX) = f\nabla_{fX}(f)(fY).$$

С учетом последнего равенства формула (2) принимает вид (3). $\square$

Заметим, что формула (3) обобщает формулу, полученную ранее (тем же способом) в работе [34] для киллинговых f-многообразий (см. также [5]).

3. Естественно редуктивные пространства с инвариантными метрическими f-структурами

Перейдем теперь к рассмотрению инвариантных метрических f-структур на (псевдо)римановых однородных пространствах.

Пусть G — связная группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — инвариантная (псевдо)риманова метрика на однородном пространстве G/H. Как обычно, обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли, соответствующие группам G и H. Предположим, что G/H — редуктивное однородное пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отождествим $\mathfrak{m}$ с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Тогда инвариантная метрика g полностью определяется своим значением в точке o. Для удобства будем обозначать одинаково как саму инвариантную метрику $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на G/H, так и ее значение в точке o. Это соглашение будем использовать также для всех других инвариантных структур на G/H, в частности, для инвариантных f-структур.

Любая инвариантная f-структура на G/H задает разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Im} f$ и $\mathfrak{m}_2 = \operatorname{Ker} f$ вполне определяют первое и второе фундаментальные распределения соответственно.

Пусть теперь $(G/H, g = \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ — однородное редуктивное пространство с инвариантной (псевдо)римановой метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и инвариантной метрической f-структурой. Это означает, что для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ выполняется равенство

$$\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0. \tag{4}$$

Кроме того, подпространства $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ в этом случае ортогональны относительно метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Напомним, что $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *естественно редуктивным* пространством относительно редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ [24], если

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle = \langle X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}\rangle \tag{5}$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$. Здесь, как обычно, индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию векторов из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$ относительно указанного редуктивного разложения.

Рассмотрим теперь некоторые из приведенных выше классов инвариантных метрических f-структур на естественно редуктивных однородных пространствах.

3.1. **Инвариантные NKf-структуры.** Пусть $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ — однородное редуктивное пространство с инвариантной естественно редуктивной метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и инвариантной метрической f-структурой.

Как известно [20], критерием принадлежности инвариантной метрической f-структуры классу **NKf** в естественно редуктивном случае является выполнение условия $[fX, f^2X]_{\mathfrak{m}} = 0$ для всех $X \in \mathfrak{m}$. Поляризуя это равенство, приходим к критерию вида

$$[fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}} = [f^2X, fY]_{\mathfrak{m}}, \tag{6}$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$. Это равенство эквивалентно следующему:

$$[f^2X, f^2Y]_{\mathfrak{m}} = -[fX, fY]_{\mathfrak{m}}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Для инвариантной NKf-структуры на естественно редуктивном пространстве $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ имеет место соотношение*

$$f([X, fY]_{\mathfrak{m}}) = f^2([X, f^2Y]_{\mathfrak{m}}), \tag{8}$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Доказательство. Используя (4), (5) и (7), для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ получим $\langle f([X, fY]_{\mathfrak{m}}), Z\rangle = -\langle [X, fY]_{\mathfrak{m}}, fZ\rangle = -\langle X, [fY, fZ]_{\mathfrak{m}}\rangle = \langle X, [f^2Y, f^2Z]_{\mathfrak{m}}\rangle = \langle [X, f^2Y]_{\mathfrak{m}}, f^2Z\rangle = \langle f^2([X, f^2Y]_{\mathfrak{m}}), Z\rangle$.

Отсюда в силу невырожденности метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{m}$ следует равенство (8). □

Вычислим далее композиционный тензор T для NKf-структуры в рассматриваемом случае.

Теорема 1. *Композиционный тензор* T *инвариантной* NKf*-структуры на естественно редуктивном пространстве* $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ *имеет вид*

$$2T(X, Y) = -f^2([fX, fY]_{\mathfrak{m}}) = f^2([f^2X, f^2Y]_{\mathfrak{m}}), \tag{9}$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Доказательство. Вид композиционного тензора T для NKf-структуры на гладком многообразии указан в лемме 1. Поскольку $\nabla_X(f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y$ для гладких векторных полей X и Y, то в случае редуктивного однородного пространства, используя традиционную технику специальных векторных полей в окрестности точки $o = H \in G/H$, получим

$$\nabla_X(f)Y = \alpha(X, fY) - f\alpha(X, Y).$$

Здесь α — функция Номидзу инвариантной аффинной связности ∇ на G/H, а $X, Y \in \mathfrak{m}$ [35]. Поскольку связность Леви-Чивита для естественно редуктивных пространств определяется формулой $\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}}$, то приходим к равенству

$$\nabla_X(f)Y = \frac{1}{2}([X, fY]_{\mathfrak{m}} - f([X, Y]_{\mathfrak{m}})), \quad X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Используя теперь лемму 2, получим $\nabla_{fX}(f)fY = \frac{1}{2}([fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}} - f([fX, fY]_{\mathfrak{m}})) = \frac{1}{2}([fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}} - f^2([fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}})) = \frac{1}{2}(1 - f^2)([fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}})$. Учитывая последнее равенство и применяя леммы 1 и 2, а также равенство (7), можем вычислить $2T(X, Y) = f\nabla_{fX}(f)fY = \frac{1}{2}f(1 - f^2)([fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}}) = f([fX, f^2Y]_{\mathfrak{m}}) = f^2([fX, f^3Y]_{\mathfrak{m}}) = -f^2([fX, fY]_{\mathfrak{m}}) = f^2([f^2X, f^2Y]_{\mathfrak{m}})$. Тем самым равенство (9) полностью доказано. □

Условимся, как обычно, обозначать индексами 1 и 2 проекции векторов из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ соответственно относительно разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$.

Теорема 2. *Пусть* $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ *— естественно редуктивное однородное пространство с инвариантной* NKf*-структурой. Структура* f *является эрмитовой* f*-структурой тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}. \tag{10}$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что формулу (9) для композиционного тензора T можно записать в виде

$$2T(X, Y) = -[X_1, Y_1]_1. \tag{11}$$

В самом деле, для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ получим $2T(X, Y) = f^2([f^2X, f^2Y]_{\mathfrak{m}}) = f^2([-X_1, -Y_1]_{\mathfrak{m}}) = -[X_1, Y_1]_1$. Эрмитова f-структура определяется условием $T(X, Y) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. В силу равенства (11) это условие принимает вид $[X_1, Y_1]_1 = 0$, что эквивалентно включению $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$. □

Отметим частный случай полученного утверждения.

Следствие 1. Инвариантная NK-структура на естественно редуктивном однородном пространстве $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ келерова тогда и только тогда, когда G/H — локально симметрическое пространство (т. е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$).

Доказательство. Действительно, в случае $f = J$ условие (10) принимает вид $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$, т. е. G/H — локально симметрическое пространство. Поэтому эрмитова структура J на G/H является келеровой. □

Отметим, что утверждение следствия 1 впервые (в несколько иной формулировке) доказано в [13].

Замечание 1. Одно из утверждений теоремы 2 справедливо в более сильной формулировке. Точнее, как доказано в [22], условие (10) влечет эрмитовость инвариантной метрической f-структуры на любом редуктивном однородном пространстве $(G/H, g)$, где g — произвольная инвариантная (псевдо)риманова метрика (не обязательно естественно редуктивная).

3.2. **Инвариантные келеровы f-структуры.** Рассмотрим здесь инвариантные келеровы f-структуры на естественно редуктивных однородных пространствах. Укажем несколько характеристических условий.

Теорема 3. *Пусть $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ — естественно редуктивное однородное пространство с инвариантной метрической f-структурой. Следующие условия эквивалентны*:

1) f *— келерова f-структура*;
2) $[X, fY]_{\mathfrak{m}} = f([X, Y]_{\mathfrak{m}})$ *для всех* $X, Y \in \mathfrak{m}$;
3) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$ *и* $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$.

Доказательство. 1) $\Longleftrightarrow$ 2). Условие $\nabla f = 0$ для инвариантной f-структуры на редуктивном однородном пространстве в терминах функции Номидзу α инвариантной аффинной связности ∇ принимает вид $\alpha(X, fY) - f\alpha(X, Y) = 0$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$. В силу естественной редуктивности имеем $\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}}$, и тогда получаем равенство $\frac{1}{2}[X, fY]_{\mathfrak{m}} - f(\frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}}) = 0$, что эквивалентно условию 2).

2) $\Longleftrightarrow$ 3). Пусть выполняется условие 2). Прежде заметим, что из условия 2) следует равенство

$$[X, fY]_{\mathfrak{m}} = [fX, Y]_{\mathfrak{m}}. \tag{12}$$

В самом деле, полагая в 2) $Y = X$, имеем $[X, fX]_{\mathfrak{m}} = 0$ для всех $X \in \mathfrak{m}$. После поляризации этого равенства приходим к (12). С другой стороны, используя (4), (5) и (12), для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ получим $\langle f([X, Y]_{\mathfrak{m}}), Z\rangle = -\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, fZ\rangle = -\langle X, [Y, fZ]_{\mathfrak{m}}\rangle = -\langle X, [fY, Z]_{\mathfrak{m}}\rangle = -\langle [X, fY]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle$. Отсюда в силу невырожденности метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{m}$ приходим к равенству

$$f([X, Y]_{\mathfrak{m}}) = -[X, fY]_{\mathfrak{m}}. \tag{13}$$

Теперь из условия 2) и равенства (13) имеем $f([X, Y]_{\mathfrak{m}}) = 0 = [X, fY]_{\mathfrak{m}}$. В силу произвольности X и Y отсюда получаем включения $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$ и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$. Обратно, если выполняются соотношения 3), то равенство 2) тривиально выполняется. □

Замечание 2. Условие 3) доказанной теоремы 3 можно записать в эквивалентной форме

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}.$$

Рассматривая частный случай $f = J$ теоремы 3, приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. Инвариантная почти эрмитова структура J на естественно редуктивном однородном пространстве $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ келерова тогда и только тогда, когда G/H — локально симметрическое пространство (т. е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$).

Отметим, что это утверждение усиливает следствие 1.

3.3. **Инвариантные киллинговы f-структуры.** Будем теперь рассматривать инвариантные киллинговы f-структуры на естественно редуктивном пространстве $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Как известно [20], критерием киллинговости для инвариантной метрической f-структуры на таком пространстве является выполнение условия $[X, fX]_{\mathfrak{m}} = 0$ для всех $X \in \mathfrak{m}$. Снова поляризуя это равенство, указанный критерий запишем в виде

$$[X, fY]_{\mathfrak{m}} = [fX, Y]_{\mathfrak{m}}, \quad X, Y \in \mathfrak{m}. \tag{14}$$

Лемма 3. *Для инвариантной киллинговой f-структуры на естественно редуктивном пространстве $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$ выполняются равенства*

$$f([X, Y]_{\mathfrak{m}}) = -[X, fY]_{\mathfrak{m}} = -[fX, Y]_{\mathfrak{m}}. \tag{15}$$

Доказательство. Рассуждения, устанавливающие справедливость первого равенства, фактически повторяют фрагмент из доказательства теоремы 3. А именно, используя (4), (5) и (14), для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ получим

$$\langle f([X, Y]_{\mathfrak{m}}), Z\rangle = -\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, fZ\rangle = -\langle X, [Y, fZ]_{\mathfrak{m}}\rangle = -\langle X, [fY, Z]_{\mathfrak{m}}\rangle = -\langle [X, fY]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle.$$

Теперь из невырожденности метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{m}$ с учетом критерия (14) приходим к равенствам (15). □

Теорема 4. *Для инвариантной киллинговой f-структуры на естественно редуктивном пространстве $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ тензор Нейенхейса N и композиционный тензор T имеют вид*

$$N(X, Y) = [fX, fY]_{\mathfrak{m}} = -[f^2X, f^2Y]_{\mathfrak{m}} = f^2([X, Y]_{\mathfrak{m}}) = 2T(X, Y),$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Доказательство. Тензор Нейенхейса N, определяемый равенством (1), для инвариантной метрической f-структуры на редуктивном однородном пространстве вычисляется по формуле $N(X, Y) = \frac{1}{4}\left([fX, fY]_{\mathfrak{m}} - f([fX, Y]_{\mathfrak{m}}) - f([X, fY]_{\mathfrak{m}}) + f^2([X, Y]_{\mathfrak{m}})\right)$, где $X, Y \in \mathfrak{m}$. С учетом равенств (14) и (15) для киллинговой f-структуры получим

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}\left([fX, fY]_{\mathfrak{m}} + [fX, fY]_{\mathfrak{m}} + [fX, fY]_{\mathfrak{m}} + [fX, fY]_{\mathfrak{m}}\right) = [fX, fY]_{\mathfrak{m}}.$$

Перейдем далее к вычислению композиционного тензора T. Прежде всего, поскольку **Kill f** $\subset$ **NKf**, будем использовать лемму 1. Аналогично рассуждениям из теоремы 1 с использованием (15) и (14) последовательно для нашего случая получим $\nabla_X(f)Y = \frac{1}{2}([X, fY]_{\mathfrak{m}} - f([X, Y]_{\mathfrak{m}})) = -f([X, Y]_{\mathfrak{m}})$, $X, Y \in \mathfrak{m}$. Далее, $2T(X, Y) = f\nabla_{fX}(f)fY = f(-f([fX, fY]_{\mathfrak{m}})) = -f^2([fX, fY]_{\mathfrak{m}}) = -[fX, f^3Y]_{\mathfrak{m}} = [fX, fY]_{\mathfrak{m}}$. Иную запись для тензора T можно получить, например, используя равенство (7): $2T(X, Y) = [fX, fY]_{\mathfrak{m}} = -[f^2X, f^2Y]_{\mathfrak{m}}$. Наконец, согласно равенству (15) запишем еще одно представление $2T(X, Y) = [fX, fY]_{\mathfrak{m}} = -f([fX, Y]_{\mathfrak{m}}) = f^2([X, Y]_{\mathfrak{m}})$. □

Теорема 5. *Пусть $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ — естественно редуктивное пространство с инвариантной киллинговой f-структурой. Тогда справедливы следующие соотношения*:

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}.$$

В частности, оба фундаментальных распределения киллинговой f-структуры определяют инвариантные вполне геодезические слоения многообразия G/H.

Доказательство. Установим первое соотношение. Подпространство $\mathfrak{m}_1$ характеризуется условием $f^2|_{\mathfrak{m}_1} = -\operatorname{id}$. Возьмем любые $X, Y \in \mathfrak{m}$, тогда с использованием леммы 3 получим $f^2([fX, fY]_{\mathfrak{m}}) = [f^3X, fY]_{\mathfrak{m}} = -[fX, fY]_{\mathfrak{m}}$. Отсюда следует $[fX, fY]_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}_1$, т. е. $[fX, fY] \in \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}$. В силу произвольности X и Y имеем $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}$.

Перейдем к доказательству второго соотношения. Пусть $X \in \mathfrak{m}_2$, $Y \in \mathfrak{m}$. Тогда $f([X,Y]_\mathfrak{m}) = -[fX,Y]_\mathfrak{m} = -[0,Y]_\mathfrak{m} = 0$. Это означает, что $[X,Y]_\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}_2 = \mathrm{Ker}\, f$, т. е. $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$. Отсюда, в частности, следует второе включение.

Наконец, докажем третье соотношение. Возьмем любые $fX \in \mathfrak{m}_1$ и $Y \in \mathfrak{m}_2$. Тогда из полученного выше соотношения $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$ следует $[fX, Y] \in \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$. С другой стороны, вычислим $f^2([fX,Y]_\mathfrak{m}) = [f^3X, Y]_\mathfrak{m} = -[fX,Y]_\mathfrak{m}$. Следовательно, $[fX,Y]_\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}_1$, т. е. $[fX,Y] \in \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}$. Из полученных двух включений следует $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}$.

Обсудим теперь свойства фундаментальных распределений f-структуры, определяемых подпространствами $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$. Как известно, любая f-структура порождает на многообразии структуру почти произведения P по правилу: $P = 2f^2 + \mathrm{id}$. При этом вертикальное и горизонтальное распределения этой структуры P определяются подпространствами $\mathfrak{m}_2$ и $\mathfrak{m}_1$ соответственно. Кроме того, нетрудно показать, что для метрической f-структуры на (псевдо)римановом многообразии построенная структура P является (псевдо)римановой структурой почти произведения, т. е. $\langle PX, PY\rangle = \langle X, Y\rangle$. Заметим, что полученные нами включения в естественно редуктивном случае в точности являются критерием того [36], что оба распределения порождают инвариантные вполне геодезические слоения на G/H. □

Замечание 3. Известно [31], что второе фундаментальное распределение f-структуры на произвольном киллинговом f-многообразии M инволютивно и его слои являются вполне геодезическими подмногообразиями в M. Иными словами, информация об этом распределении, полученная в теореме 5, справедлива в общей ситуации. В то же время в [31] отмечено, что первое фундаментальное распределение на киллинговом f-многообразии так называемого основного типа [31] не инволютивно. Поскольку по теореме 5 распределение, порождаемое подпространством $\mathfrak{m}_1$, инволютивно, приходим к следующему выводу.

Следствие 3. На естественно редуктивном однородном пространстве $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ не существует нетривиальных инвариантных киллинговых f-структур основного типа.

Отмеченный факт широко обобщает соответствующий результат А.С. Гриццанса, полученный для римановых глобально симметрических пространств.

Замечание 4. Вид композиционного тензора T для инвариантных киллинговых f-структур, указанный в теореме 4, может быть также получен детализацией результата теоремы 1 с использованием первого включения из теоремы 5. Действительно, $2T(X,Y) = -f^2([fX,fY]_\mathfrak{m}) = [fX,fY]_\mathfrak{m}$.

Установим теперь один из основных результатов об инвариантных киллинговых f-структурах.

Теорема 6. *Пусть $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ — естественно редуктивное пространство с инвариантной киллинговой f-структурой. Следующие условия эквивалентны*:

1) f — *эрмитова f-структура*;
2) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$;
3) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$;
4) f *интегрируема*;
5) f — *келерова f-структура.*

Доказательство. 1) $\Longleftrightarrow$ 2). Из теоремы 4 имеем, что $T(X,Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $[fX, fY]_\mathfrak{m} = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$, что равносильно включению $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$.

1) $\Longleftrightarrow$ 3). Используя теорему 4, рассмотрим для тензора T представление в виде $2T(X,Y) = f^2([X,Y]_\mathfrak{m})$. Теперь условие $T(X,Y) = 0$ эквивалентно равенству $f^2([X,Y]_\mathfrak{m}) = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$, что равносильно включению $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$.

1) $\Longleftrightarrow$ 4). Это утверждение очевидно, поскольку по теореме 4 тензор T равен нулю тогда и только тогда, когда $N = 0$.

2) $\Longleftrightarrow$ 5). Пусть выполняется условие 2). В силу того, что f-структура киллингова, по теореме 5 имеем включения $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}$. Таким образом, приходим к включениям $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$ и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$. Теперь согласно п. 3 теоремы 3 получаем, что f-структура является келеровой. Обратная импликация в силу п. 3 теоремы 3 очевидна. □

Замечание 5. В качестве частного случая этой теоремы (при $f = J$) снова приходим к утверждению следствия 1.

В заключение сформулируем еще один результат, показывающий "степень отличия" в естественно редуктивном случае киллинговых f-структур от NKf-структур.

Теорема 7 ([23])**.** *Пусть $(G/H, \langle\cdot,\cdot\rangle, f)$ — естественно редуктивное пространство с инвариантной метрической f-структурой. Следующие условия эквивалентны*:

1) *f — киллингова f-структура*;
2) *f является NKf-структурой, для которой выполняется соотношение $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}$.*

4. Канонические f-структуры на однородных Φ-пространствах

Рассмотренные выше классы инвариантных метрических f-структур могут быть эффективно реализованы как на специальных семействах однородных многообразий, так и в виде отдельных конкретных примеров. В частности, однородные Φ-пространства вместе с каноническими f-структурами на них обеспечивают обширный класс инвариантных структур в обобщенной эрмитовой геометрии. Укажем в краткой форме некоторые из результатов в этом направлении.

Приведем прежде необходимые сведения об однородных Φ-пространствах и канонических структурах на них. Подробную информацию можно найти в [15], [7], [9].

Пусть Φ — автоморфизм связной группы Ли G, G^Φ — подгруппа неподвижных точек автоморфизма Φ, G^Φ_o — связная компонента единицы e подгруппы G^Φ. Однородное пространство G/H называется *однородным Φ-пространством*, если замкнутая подгруппа Ли H в G удовлетворяет условию $G^\Phi_o \subset H \subset G^\Phi$. Положим $A = \varphi - \mathrm{id}$, где $\varphi = d\Phi_e$ — соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ состоит в этом случае из φ-неподвижных векторов из $\mathfrak{g}$. Однородное Φ-пространство G/H называется *регулярным Φ-пространством*, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$ ([15], [7], [9]). Фундаментальным свойством регулярных Φ-пространств является их редуктивность [7], при этом редуктивным разложением является указанное выше разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Такое разложение называется *каноническим редуктивным разложением* [7] регулярного Φ-пространства G/H. Еще один фундаментальный результат состоит в том, что все однородные Φ-пространства *порядка* k ($\Phi^k = \mathrm{id}$) регулярны [7]. Эти пространства называют также *однородными k-симметрическими пространствами* [10].

Заметим далее, что каноническое редуктивное дополнение $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$ является φ-инвариантным подпространством в $\mathfrak{g}$. Обозначим через θ сужение φ на $\mathfrak{m}$. Инвариантная аффинорная структура F на регулярном Φ-пространстве G/H называется *канонической*, если ее значение в точке o является полиномом от θ: $F = F(\theta)$ [15]. Все канонические структуры образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре $\mathcal{A}$ всех инвариантных аффинорных структур на однородном пространстве G/H. Важнейшей особенностью алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ является наличие в ней значительного запаса структур классического типа (почти произведения, почти комплексные, f-структуры классического и гиперболического типов), которые в [15], [16] полностью описаны. В частности, для однородных Φ-пространств порядка k получены точные вычислительные формулы. Например, все канонические f-структуры могут быть заданы формулами

$$f = \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{u} \left(\sum_{j=1}^{u} \zeta_j \sin \frac{2\pi m j}{k} \right) (\theta^m - \theta^{k-m}), \tag{16}$$

где $u = \begin{cases} n, & \text{если } k = 2n+1; \\ n-1, & \text{если } k = 2n, \end{cases}$ а $\zeta_j \in \{-1, 0, 1\}$, при этом среди чисел ζ_j есть отличные от нуля [15]. В частности, при $\zeta_j \in \{-1, 1\}$ формула (16) дает явное выражение для всех канонических почти комплексных структур J на G/H (при условии, что спектр оператора θ не содержит -1).

Интересно отметить, что для однородного симметрического Φ-пространства ($\Phi^2 = \mathrm{id}$) алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ тривиальна, т. е. состоит лишь из скалярных структур. Для случаев $k = 3, 4, 5$ общие формулы для классических канонических структур детализированы в [15]. Среди этих структур — классическая каноническая почти комплексная структура $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2)$ на однородном Φ-пространстве порядка 3, впервые обнаруженная в [11] (см. также [8], [12]). На однородном Φ-пространстве порядка 4 имеется (с точностью до знака) одна каноническая структура почти произведения $P = \theta^2$ и одна каноническая f-структура $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ [15]. Что касается однородного Φ-пространства порядка 5, то оно допускает (в случае максимального спектра оператора θ), с точностью до знака, одну каноническую структуру почти произведения P, две канонические почти комплексные структуры J_1 и J_2 и две f-структуры f_1 и f_2 [15]. Не указывая здесь точных формул для этих структур, отметим лишь, что фундаментальные распределения канонических f-структур связаны следующим образом:

$$\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Im} f_1 = \operatorname{Ker} f_2, \quad \mathfrak{m}_2 = \operatorname{Im} f_2 = \operatorname{Ker} f_1, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2.$$

Пусть, далее, на однородном Φ-пространстве G/H порядка k задана (псевдо)риманова метрика, порождаемая симметрической билинейной формой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$, которая инвариантна относительно подгруппы $\mathrm{Ad}_G(H)$ и оператора θ. Такая метрика инвариантна не только относительно группы G, но и обобщенных симметрий однородного Φ-пространства G/H. Известно [23], что все канонические f-структуры на $(G/H, g)$ с этой метрикой согласованы, т. е. являются инвариантными метрическими f-структурами. В частности, канонические почти комплексные структуры J являются инвариантными почти эрмитовыми структурами.

В случае полупростой группы Ли G классическим примером метрики g с указанными свойствами является так называемая стандартная метрика, индуцированная формой Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим также, что эта метрика на произвольном регулярном Φ-пространстве G/H естественно редуктивна относительно канонического редуктивного разложения [7].

Сформулируем теперь в наиболее полном виде результаты, относящиеся к обобщенной эрмитовой геометрии канонических f-структур на однородных Φ-пространствах порядков 4 и 5 с естественно редуктивной метрикой.

Теорема 8. *Каноническая метрическая f-структура $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ на естественно редуктивном однородном Φ-пространстве $(G/H, g)$ порядка 4 является одновременно эрмитовой f-структурой и приближенно келеровой f-структурой. Кроме того, следующие условия эквивалентны*:

1) *f квазикелерова*; 2) *f киллингова*; 3) *f интегрируема*; 4) *f келерова*; 5) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{h}$*;* 6) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$*;* 7) *$G/H$ — локально симметрическое пространство.*

Теорема 9. *Пусть G/H — естественно редуктивное Φ-пространство порядка 5, f_1, f_2, J_1, J_2 — канонические структуры на нем. Тогда обе структуры f_1 и f_2 являются как эрмитовыми f-структурами, так и приближенно келеровыми f-структурами. Более того, следующие условия эквивалентны*:

1) *f_1 квазикелерова*; 2) *f_2 квазикелерова*; 3) *f_1 киллингова*; 4) *f_2 киллингова*; 5) *f_1 интегрируема*; 6) *f_2 интегрируема*; 7) *f_1 келерова*; 8) *f_2 келерова*; 9) *J_1 и J_2 — NK-структуры*; 10) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] = 0$*;* 11) *$G/H$ — локально симметрическое пространство.*

Замечание 6. Доказательства приведенных в теоремах 8 и 9 результатов используют как общие факты, установленные нами выше, так и специфику канонических f-структур на однородных Φ–пространствах порядков 4 и 5 [37], [38], [21]. Частично эти результаты анонсированы либо доказаны в работах [17]–[21]. Подробное изложение этих и некоторых смежных вопросов будет представлено в отдельной публикации.

Заметим также, что много конкретных примеров однородных пространств, удовлетворяющих условиям теорем 8 и 9, содержится в работах [39], [40] и некоторых других.

В заключение отметим, что к настоящему времени получена значительная информация о канонических f-структурах на однородных Φ-пространствах порядка 6, а также серия общих фактов об однородных Φ-пространствах произвольного порядка k, канонических структурах на них и их связи с обобщенной эрмитовой геометрией. Кроме того, интенсивно развивается сейчас направление, нацеленное на исследование инвариантных f-структур на флаговых многообразиях (напр., [41]) и тесно связанное с представленной здесь тематикой.

Литература

[1] Широков А.П. *Структуры на дифференцируемых многообразиях* // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. – М.: ВИНИТИ, 1969. – С. 127–188.

[2] Yano K. *On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3+f=0$* // Tensor. – 1963. – V. 14. – P. 99–109.

[3] Кириченко В.Ф. *Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Т.47. – № 6. – С. 1208–1223.

[4] Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий* // Итоги науки и техники. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. 18. – С. 25–71.

[5] Кириченко В.Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.

[6] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* – М.: Мир, 1964. – 533 с.

[7] Степанов Н.А. *Основные факты теории φ-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.

[8] Wolf J.A., Gray A. *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms* // J. Diff. Geom. – 1968. – V. 2. – № 1–2. – P. 77–159.

[9] Феденко А.С. *Пространства с симметриями.* – Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1977. – 168 с.

[10] Ковальский О. *Обобщенные симметрические пространства.* – М.: Мир, 1984. – 240 с.

[11] Степанов Н.А. *Однородные 3-циклические пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 65–74.

[12] Gray A. *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order* 3 // J. Diff. Geom. – 1972. – V. 7. – № 3–4. – P. 343–369.

[13] Кириченко В.Ф. *О геометрии однородных K-пространств* // Матем. заметки. – 1981. – Т. 30. – № 4. – С. 569–582.

[14] Gray A. *Homogeneous almost Hermitian manifolds* // Proceedings of the Conference on Differential Geometry on Homogeneous Spaces, Turin, Italy, 1983; Rendiconti del Seminario Matematico Universita e Politecnico di Torino. – 1983. – Special Issue. – P. 17–58.

[15] Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.

[16] Балащенко В.В. *Канонические f-структуры гиперболического типа на регулярных Φ-пространствах* // УМН. – 1998. – Т. 53. – Вып. 4. – С. 213–214.

[17] Балащенко В.В. *Естественно редуктивные киллинговы f-многообразия* // УМН. – 1999. – Т. 54. – Вып. 3. – С. 151–152.

[18] Балащенко В.В. *Однородные эрмитовы f-многообразия* // УМН. – 2001. – Т. 56. – Вып. 3. – С. 159–160.

[19] Балащенко В.В. *Однородные приближенно келеровы f-многообразия* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 376. – № 4. – С. 439–441.

[20] Balashchenko V. V. *Invariant nearly Kähler f-structures on homogeneous spaces* // Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray. Contemporary Mathematics. – 2001. – V. 288. – P. 263–267.

[21] Чурбанов Ю.Д. *Геометрия однородных Φ-пространств порядка* 5 // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 70–81.

[22] Балащенко В.В., Вылегжанин Д.В. *Обобщенная эрмитова геометрия на однородных Φ-пространствах конечного порядка* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 10. – С. 33–44.

[23] Balashchenko V.V. *Invariant structures generated by Lie group automorphisms on homogeneous spaces* // Proceedings of the Workshop “Contemporary Geometry and Related Topics” (Belgrade, Yugoslavia, 15–21 May, 2002). Editors: N. Bokan, M. Djoric, A.T. Fomenko, Z. Rakic, J. Wess. – World Scientific, 2004. – P. 1–32.
[24] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
[25] Alekseevsky D., Arvanitoyeorgos A. *Metrics with homogeneous geodesics on flag manifolds* // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 2002. – V. 43. – № 2. – P. 189–199.
[26] Dušek Z., Kowalski O., Nikčević S.Ž. *New examples of Riemannian g.o. manifolds in dimension* 7 // Diff. Geom. Appl. – 2004. – V. 21. – P. 65–78.
[27] Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. *Геометрия однородных римановых многообразий* // Современная математика и ее приложения. – 2006. – Т. 37. – С. 1–78.
[28] Stong R.E. *The rank of an f-structure* // Kodai Math. Sem. Rep. – 1977. – V. 29. – P. 207–209.
[29] Яно К., Кон М. *CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях.* – М.: Наука, 1990. – 192 с.
[30] Singh K.D., Singh Rakeshwar. *Some $f(3,\varepsilon)$-structure manifolds* // Demonstr. Math. – 1977. – V. 10. – № 3–4. – P. 637–645.
[31] Грицанс А.С. *О геометрии киллинговых f-многообразий* // УМН. – 1990. – Т. 45. – Вып. 4. – С. 149–150.
[32] Грицанс А.С. *О строении киллинговых f-многообразий* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 49–57.
[33] Gray A., Hervella L.M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* // Ann. Mat. Pura ed Appl. – 1980. – V. 123. – № 4. – P. 35–58.
[34] Кириченко В.Ф., Липагина Л.В. *Киллинговы f-многообразия постоянного типа* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63. – № 5. – С. 127–146.
[35] Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces* // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76. – № 1. – P. 33–65.
[36] Balashchenko V.V. *Naturally reductive almost product manifolds* // Diff. Geom. Appl. Proc. of the 7th Intern. Conf., Satellite Conf. of ICM in Berlin. Aug. 10–14, 1998, Brno, Masaryk University in Brno (Czech Republic). – 1999. – P. 13–21.
[37] Балащенко В.В., Дашевич О.В. *Геометрия канонических структур на однородных* Φ*-пространствах порядка* 4 // УМН. – 1994. – Т.49. – Вып. 4. – С.153–154.
[38] Балащенко В.В., Чурбанов Ю.Д. *Инвариантные структуры на однородных* Φ*-пространствах порядка* 5 // УМН. – 1990. – Т. 45. – Вып. 1. – С. 169–170.
[39] Jimenez J.A. *Riemannian* 4*-symmetric spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 306. – № 2. – P. 715–734.
[40] Tsagas Gr., Xenos Ph. *Homogeneous spaces which are defined by diffeomorphisms of order* 5 // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. – 1987. – V. 31. – № 1. – P. 57–77.
[41] Cohen N., Negreiros C.J.C., Paredes M., Pinzon S., San Martin L.A.B. *$\mathcal{F}$-structures on the classical flag manifold which admit $(1,2)$-symplectic metrics* // Tohoku Math. J. – 2005. – V. 57. – P. 261–271.

В.В. Балащенко
доцент, кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики,
механико-математический факультет,
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220050, Минск, просп. Независимости, 4
E-mail: balashchenko@bsu.by; vitbal@tut.by